Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Матеріали XVII Міжнародної
науково-практичної конференції

«Шевченківська весна – 2019»

квітень 2019 р., м. Київ, Україна

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Proceeding of XVII International
Scientific – Practical Conference

«Shevchenkivska Vesna – 2019»

April 2019, Kyiv, Ukraine

Програмний комітет

Городній Михайло Федорович – доктор фізико-математичних наук, професор, декан механіко-математичного факультету

Анісімов Анатолій Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, декан факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Безущак Оксана Омелянівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник декана з навчальної роботи механіко-математичного факультету

Капустян Олена Анатоліївна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, заступник декана з наукової та міжнародної роботи факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Харитонов Олексій Михайлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник декана з наукової роботи механіко-математичного факультету

Мішура Юлія Степанівна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Організаційний комітет

Зубченко Володимир Петрович – кандидат фізико-математичних наук, голова Ради молодих вчених механіко-математичного факультету

Білоножко Аліна Вадимівна – голова студентського парламенту факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Верстка: Юрченко-Титаренко А.Ю.

Секція «Математика, статистика та механіка»

Математичне моделювання поверхонь, утворених при обертанні ромба навколо осі, що лежить в його площині

Е. Дж. Абдуллаєв

Інженерна діяльність людини в багатьох випадках напрямлена на проектування та створення поверхонь необхідної форми. В зв'язку з простотою отримання, тіла та поверхні обертання є найбільш поширеними, а отже їх дослідження і надалі залишається актуальним.

Метою даної роботи є дослідження поверхонь, утворених при обертанні ромба навколо осі, що лежить у його площині.

У даній роботі автором розглянуто чотирипараметричну задачу про обертання ромба навколо осі, що лежить з ромбом у одній площині. У якості параметрів ромба обрано довжину більшої його діагоналі та гострий кут. Введено декартову прямокутну систему координат, одна з осей якої, а саме вісь OY, напрямлена вздовж осі обертання, вісь Oz є перпендикулярною до неї і проходить через точку перетину діагоналей ромба, яка знаходиться на відстані m від початку координат. Параметрами розміщення ромба є відстань точки перетину діагоналей ромба від початку системи координат та кут, який утворює більша діагональ ромба з віссю OY.

Досліджено різні випадки розміщення ромба по відношенню до осі обертання в залежності від вхідних параметрів. Виведено чотирипараметричні рівняння утворених поверхонь обертання. Побудовано відповідні тіла обертання. Досліджено зміни геометричних характеристик поверхонь обертання, що обмежують геометричне тіло, утворене при обертанні ромба навколо осі, що лежить в його площині, в залежності від двох визначальних параметрів ромба та двох параметрів, що характеризують його положення відносно осі обертання.

Автор

Ельмір Джалалович Абдуллаєв — учениk 10 класу, гімназія №283 Деснянського району м. Києва, Київська мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: *Elmir.bloody13@gmail.com*

Побудова регресійної моделі для передбачення успіху ico на основі публічної інформації

І. Ю. Бараненко

На сьогоднішній день є великий інтерес у нових способах інвестування грошей. Одним з таких способів є інвестування у ico (initial coin offering). Основною складністю отримання прибутку при такому виді інвестування є те, що більшість проектів не досягають успіху. Після проведення ico, вартість монети може бути нижче, ніж під час ico. Такий результат означає, що інвестори помилились при виборі проекту для інвестування.

Метою дослідження є аналіз уже проведених ico для визначення залежності успіху цих проектів після проведення ico від різних параметрів. Під час дослідження використовувались методи регресійного аналізу для побудови моделі залежності ефективності проекту від таких його параметрів: оцінка експертів, розмір команди проекту та кількість людей, що слідкують за проектом у соціальних мережах.

В результаті дослідження була отримана модель залежності успішності ісо від розглянутих параметрів. Тестування моделі на великому наборі даних показала точність у 78%. Дана модель є корисною для інвесторів, які хочуть оцінити перспективність інвестування у нові проекти на ринку.

Список літератури

[1] А.А. Барсегян, М.С. Куприянов, В.В. Степаненко, И.И. Холод, *Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining*, 2004.

[2] В.Є. Бахрушин, *Методи аналізу даних: навчальний посібник для студентів*, 2011.

Автор

Ілля Юрійович Бараненко — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *baranenkoillya@gmail.com*

1/4-правильні многокутники

Д. К. Басюк

Дана робота присвячена дослідженню властивостей нового типу многокутників – на чверть правильних многокутників.

Будемо називати многокутник з парною кількістю вершин на чверть правильним, якщо його кути рівні через один і сторони рівні через одну. Частинними випадками 1/4-правильних многокутників є напівправильні та правильні многокутники з парною кількістю вершин та паралелограми. На чверть правильними дружніми многокутниками будемо називати такі 1/4-правильні многокутники, які утворені на базі одного й того ж правильного многокутника і кути яких відповідно рівні. Зрозуміло, що вершини дружніх на чверть правильних многокутників лежать на рівних (допоміжних) колах, хордами яких є сторони правильного базового многокутника.

У роботі сформульовано та доведено такі твердження.

Твердження 1. Якщо 1/4-правильний $2n$-кутник є описаним, то він є напівправильним рівностороннім. Якщо 1/4-правильний $2n$-кутник є вписаним, то він є напівправильним рівнокутним.

Твердження 2. Серединним до 1/4-правильного многокутника є 1/4-правильний многокутник.

Твердження 3. Серед дружніх невироджених на чверть правильних многокутників найбільший периметр має рівносторонній напівправильний многокутник.

У роботі введено поняття та досліджено деякі властивості 1/4-правильних та дружніх на чверть правильниї многокутників, проведено порівняння їх властивостей з властивостями напівправильних многокутників, сформульовано та доведено ряд тверджень.

Автор

Дар'я Костянтинівна Басюк — учениця 10 класу, гімназія №283 Деснянського району м. Києва, Київська мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: *das_2002@ukr.net*

Heath-Jarrow-Morton (HJM) model

A. Bahchedjioglu, O. Kharytonova

In this work we explore HJM model for modeling forward rates and it's use for financial derivative pricing. In particular, we show that this model has some computational advantages compared to traditional short rate models for pricing certain derivatives. The work is structured as follows: first we briefly explain the notion of forward rates and their connection to the short rate. Next we explore the theory behind Heath-Jarrow-Morton (HJM) model. Additionally we demonstrate how this model can be discretized for simulating purposes and illustrate cases in which this model is preferable to the short rate models. In the last section we provide our simulation results for forward rates and different derivative prices.

References

[1] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag New York, 2003.

Authors

Atilla Bahchedjioglu — the 2nd year Master, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Volodymyrska, 60, 01601 Kiev, Ukraine; E-mail: *atik16209@gmail.com*

Olena Kharytonova — the 2nd year Master, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Volodymyrska, 60, 01601 Kiev, Ukraine; E-mail: *olenakharytonova06@gmail.com*

Про ідемпотенти напівгруп перетворень, які зберігають відношення еквівалентності

Д. І. Безущак

Кажуть, що перетворення α із напівгрупи (S, M) перетворень (можливо, часткових) множини M *зберігає відношення еквівалентності* ρ на M, якщо

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (\alpha(x), \alpha(y)) \in \rho$$

для довільних $x, y \in dom\alpha$. Множина $S^{(\rho)}$ усіх перетворень із S, які зберігають дане відношення ρ, утворює піднапівгрупу напівгрупи (S, M).

Далі розглядатимемо випадки, коли (S, M) — це або симетрична напівгрупа $\mathcal{T}_n$ всіх перетворень множини $\mathsf{N} = \{1, \ldots, n\}$, або напівгрупа $\mathcal{PT}_n$ всіх часткових перетворень N, або симетрична інверсна напівгрупа $\mathcal{IS}_n$ всіх часткових ін'єктивних перетворень множини N.

Теорема 1. Якщо класи еквівалентності $M_1, \ldots, M_k$ відношення ρ на множині N мають відповідно потужності $n_1, \ldots, n_k$, $n_1 + \cdots + n_k = n$, то для порядку

напівгрупи $\mathcal{IS}_n^{(\rho)}$ маємо таке рекурентне співвідношення:

$$|\mathcal{IS}_n^{(\rho)}| = f(n_1, \dots, n_{k-1}; n_1, \dots, n_k) +$$
$$+ \sum_{r=1}^{n_p} \binom{n_p}{r} \sum_{i=1}^{q} \binom{n_i}{r} f(n_1, \dots, n_{p-1}; n_1, \dots, n_i - r, \dots, n_q) r!.$$

Теорема 2. Нехай класи еквівалентності $M_1, \dots, M_k$ відношення еквівалентності ρ мають потужності $n_1, \dots, n_k$, де $n_1 + \cdots + n_k = n$.

a) Напівгрупа $\mathcal{IS}_n^{(\rho)}$ містить усі ідемпотенти з $\mathcal{IS}_n$. Зокрема, вона має 2^n ідемпотентів.

b) Кількість ідемпотентів у напівгрупі $\mathcal{T}_n^{(\rho)}$ дорівнює

$$\sum_{\substack{1 \le m_1 + \cdots + m_k \le n \\ m_1 \le n_1, \dots, m_k \le n_k}} \prod_{i=1}^{k} A_i \binom{n_i}{m_i}, \quad \text{де } A_i = \begin{cases} \sum\limits_{j \ne i} m_j^{n_i}, & \text{якщо } m_i = 0; \\ m_i^{n_i - m_i}, & \text{якщо } m_i \ne 0. \end{cases}$$

c) Кількість ідемпотентів у напівгрупі $\mathcal{PT}_n^{(\rho)}$ дорівнює

$$\sum_{\substack{0 \le m_1 + \cdots + m_k \le n \\ m_1 \le n_1, \dots, m_k \le n_k}} \prod_{i=1}^{k} B_i \binom{n_i}{m_i}, \quad \text{де } B_i = \begin{cases} \sum\limits_{j \ne i} (m_j + 1)^{n_i}, & \text{якщо } m_i = 0; \\ (m_i + 1)^{n_i - m_i}, & \text{якщо } m_i \ne 0. \end{cases}$$

Список літератури

[1] O. Ganyushkin, V. Mazorchuk, *Classical finite transformation semigroups. An introduction.* Springer–Verlag, 2009.

Дмитро Ігорович Безущак — студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *bezushchak@gmail.com*

Математична модель інвестиційного страхування та її реалізація в Excel

А. М. Буковецька

Метою роботи є порівняння двох видів страхування: звичайного накопичувального та інвестиційного, розгляд доцільності використання продукту «unit-linked». Накопичувальне страхування базується на тому, що клієнт сплачує гроші, а страхова компанія інвестує ці гроші. Останні роки набула актуальності стратегія, коли власник договору самостійно розпоряджається інвестуванням, адже більший ризик може принести більший виграш. Саме це і називається договорами Unit-linked.

Під час доповіді буде розглянуто теоретичну модель інвестиційного страхування, висвітлено особливості даного продукту. Детальну увагу присвячено розвитку в Україні. У практичній частині реалізовано модель інвестиційного страхування в Excel, що дало змогу проілюструвати позитивні зміни у динаміці договору страхування. Проте, головним результатом є той факт, що ефективність моделі базуються виключно на обранні стратегії власником договору.

Договір unit-linked може стати складовою грамотного диверсифікованого портфелю. Але варто пам'ятати, що цей продукт не може бути єдиним при інвестиції грошей. Інвестиційне страхування не є панацеєю від бідності, хоча і може суттєво покращити фінансовий стан власника.

Список літератури

[1] В. Д. Базилевич , К. С. Базилевич, *Страхова справа.* К.: Товариство «Знання», 2002.

[2] В. П. Зубченко, *Математичні основи страхування життя: навчальний посібник.* К.: ВПЦ «Київський університет», 2016.

Автор

Андріяна Миколаївна Буковецька — студентка третього курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *19odri99@gmail.com*

On Jackson type estimates for piecewise q-monotone approximation

V. Voloshyna

Let $f \in C[a,b]$ be q-monotone, $q \geq 2$, if $f \in C^{(q-2)}(a,b)$ and $f^{(q-2)}$ is a convex function on (a,b).

Consider $\mathbf{T}= \{T_k[a,b]\}$ where $T_k[a,b] = t_i{}_{i=0}^{k+1}$ such that

$$t_{k+1} = a < t_k < ... < t_1 < b = y_0, \quad k \geq 1.$$

$f \in C[a,b]$ is piecewise q-monotone with respect to $T_k[a,b]$ if it changes its q-monotonicity at the points t_i, if $(-1)^{i-1} f^{(q-2)}$ is convex in $(t_i, t_{i-1}), 1 \leq i \leq k+1$. $\Delta^{(q)}(T_k[a,b])$ is the collection of all such piecewise q-monotone functions and $W^r[a,b]$ is the Sobolev class of $f \in AC^{r-1}[a,b]$, such that $||f^{(r)}[a,b]|| \leq 1$.

Let P_n, be the space of trygonometrical polynomials of degree $\leq$n. For $g \in C[-1,1]$, let $E_n(g) := \inf_{\tau_n \in P_n} ||g-\tau_n||$ denote the error of the best approximation of the function g. If $g \in \Delta^{(q)}(T_k)$, we use the notation

$$E_n^{(q)}(g, T_k) := \inf_{\tau_n \in P_n \bigcap \Delta^{(q)}(T_k)} ||g - \tau_n||,$$

the error of the best co-q-monotone approximation of the function g.

We are going to prove or disprove the conjectures 1 and 2.

Conjecture 1. For each $q \geq 3$, $r \in N$, $k \in N$ and any $T_k \in \mathbf{T}$, there exists a function $f \in \Delta^{(q)}(T_k) \bigcap W^r$, such that $\limsup_{n\to\infty} n^r E_n^{(q)}(f, T_k) = \infty$.

Conjecture 2. Let $q \geq 3$,$k \in N$, and $T_k \in \mathbf{T}$. There is a function $f \in \Delta^{(q)}(T_k) \bigcap W^{q-2}$, such that $E_n^{(q)}(f, T_k) \geq C(q, T_k)$, $n \in N$, $C(q, T_k) > 0$ depends only on q and T_k.

Author

Viktoriia Voloshyna — 1st year PhD student, Department of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: *victoria.voloshyna@yahoo.com*

Умови обмеженості гауссового випадкового процесу з ймовірністю 1 на $\mathbb{R}^+$ та їх застосування

О. М. Гопкало

Робота присвячена знаходженню умов, за яких існують обмежені на $\mathbb{R}^+$ розв'язки рівняння теплопровідності параболічного типу. Для цього вивчаються умови, за яких випадкові процеси є обмеженими на $\mathbb{R}^+$ з ймовірністю одиниця, зокрема такі умови отримані для гауссових процесів.

Для рівнянь параболічного типу, у яких початкові умови є гауссовим процесом, знайдено умови існування розв'язку, а також зображення цього розв'язку у вигляді формули Пуассона. Знайдені також оцінки розподілу супремума розв'язку на необмеженій області.

Ця задача є нетривіальною. Подібним задачам, а саме дослідженню поведінки супремума на нескінченності, присвячено багато робіт, зокрема роботи [2], [3].

Робота є актуальною, оскільки знайдені результати можна застосовувати для знаходження розв'язків рівнянь математичної фізики.

Отримані результати опубліковано в журналі «Науковий вісник Ужгородського університету» [4].

Список літератури

[1] V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko, "Metric Characterization of Random Variables and Random Processes". *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2000.

[2] Yu. Kozachenko, A. Slyvka-Tylyshchak, "The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\phi(\Omega)$". *Applied Mathematics*, no. 5, pp. 2318-2333, 2014.

[3] Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno, O. Vasylyk, "Estimates for functional of solution to Higher-Order Heat-Type equation with random initial condition". *Journal of statistical physics first online*, vol. 72, no. 6, pp. 1641–1662, 2018.

[4] О. М. Гопкало, "Умови обмеженості гаусового випадкового процесу з ймовірністю 1 на $\mathbb{R}^+$ та їх застосування". *Науковий вісник Ужгородського університету*, вип. 33(2), сс. 61-69, 2018.

Автор

Ольга Михайлівна Гопкало — аспірантка 2-го року навчання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *Olia_ Gopkalo@ukr.net*

Объёмная повреждаемость резиновых частей шины и дорожного полотна в области контакта многоэлементной системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при различных нагрузках

Г. В. Грибовский

В автомобильной промышленности и для автодорожных служб большое практическое значение имеют компьютерные модели, которые позволяют смоделировать пространственное напряжённо-деформированное состояние (НДС) многоэлементной системы «автомобильная шина–асфальтобетон» при оценке объмёной повреждаемости и износа как протектора шины, так и асфальтобетонного дорожного покрытия, работающих в условиях контактной, механической и фрикционной усталости.

В данной работе рассматривается полное взаимодействие всех элементов системы «автомобильная шина–асфальтобетон» с помощью компьютерного моделирования в ANSYS. На систему воздействует радиальная нагрузка на диск (с 6 до 10 кН) и внутреннее давление в шине (с 0,65 до 0,85 МПа) [1, 2]. Главной задачей этой работы является оценка объёмной повреждаемости в области контакта шины и асфальтобетона (рис. 1а), где возникают наибольшие напряжения: 1) резиновый протектор, 2) асфальтобетон; 3) резина под нейлоновым каркасом.

Расчёт повреждаемости был основан на использовании модели деформированного твёрдого тела с опасным объёмом. В соответствии с данной моделью, опасным объёмом является пространственная область нагруженного тела, в которой действующие напряжения превышают предельные [3]. Предел допустимых напряжений на фрикционную усталость был равен 0,5 МПа, а для остальных резиновых частей системы – 1 МПа. Расчёт опасных объёмов производился по интенсивности напряжений.

В протекторе и асфальтобетоне с увеличением радиальной нагрузки на диск с 6 до 10 кН, опасные объёмы возрастают в 2,7–3 и 6–7,5 раза соответственно (рис. 1). Однако, при увеличении радиальной нагрузки на диск, опасные объёмы для резины под нейлоновым каркасом уменьшаются примерно на 17–34%, что может быть вызвано сложным характером перераспределения напряжений в данной области. При изменении внутреннего давления в шине с 0,65 до 0,85 МПа опасные объёмы, в среднем, изменяются не более чем на 1-3% в протекторе и 3–30% в асфальтобетоне, за исключением резины под нейлоновым каркасом, где данные характеристики увеличиваются примерно в 2,4–3,1 раза, т.к. данная зона испытывает большие изгибающие нагрузки при радиальной нагрузке на диск в условии взаимодействия с нейлоновым каркасом и стальным брекером.

Список литературы

[1] G. V. Gribovskii, “Damageability in contact area of tire and asphalt concrete under various loads”, *Abstract book of 62th International Conference for Students of Physics and Natural Sciences Open Readings*, p. 311, 2019.

[2] С. С. Щербаков, Г. В. Грибовский, “Напряжённо-деформированное состояние многокомпонентной системы «диск–шина–асфальтобетон» при различных соотношениях радиальной нагрузки на диск и внутреннего давления в шине”, *Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник, вып. 33.* Минск: БНТУ, с. 281-286.

[3] L. A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov, *Mechanothermodynamics.* Springer, 2016.

Автор

Глеб Викентьевич Грибовский — аспирант, кафедра теоретической и при-

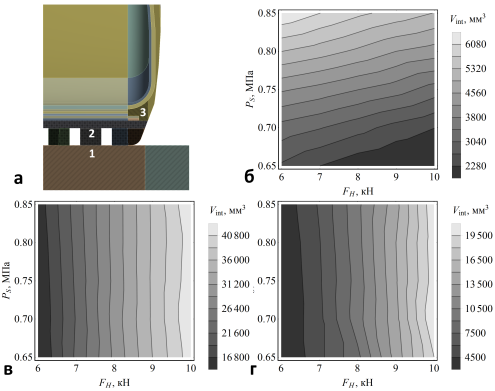

Рис. 1. Рассматриваемые зоны (а) в области контакта шины и асфальтобетона для анализа опасных объёмов в резине под нейлоновым каркасом (б), протекторе шины (в) и асфальтобетоне (г)

кладной механики, Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь; E-mail: *hleb.hrybouski@gmail.com*

Визначення неоднорідності пружних властивостей п'єзокерамічного стержня

О. А. Гур'єва

В промислових процесах виготовлення елементів конструкцій можливі випадки появи неоднорідностей, мікротріщин та інших дефектів матеріалу деталі. Наявність таких неоднорідностей в об'ємі пружних тіл призводить до зміни усереднених механічних характеристик (пружних модулів) та до можливої появи областей концентрації напружень, і, як наслідок, до руйнування складових частин механізмів та конструкцій. Наявність локальної неоднорідності приводить до зміни динамічної поведінки елементів конструкцій, зокрема змінюється спектр власних частот коливань. Виникає питання про визначення характеру та положення областей дефектів у пружному тілі за порівняльним аналізом реального спектра власних частот з ідеальним (аналітично визначеним) спектром.

Метою роботи є дослідження впливу локальних неоднорідностей на спектр власних частот п'єзокерамічного стрижня та ефективності спектрального методу визначення таких локальних неоднорідностей. Для побудови рішення таких задач необхідно мати додаткову інформацію про об'єкт дослідження, наприклад, про розташування неоднорідності і її приблизні розміри. Якщо ж геометрію тіла вважати заданою, то спектральні методики вирішення такого завдання дозволяють визначити просторовий розподіл його фізичних властивостей.

Як приклад, розглянуто задачу про повздовжні коливання п'єзокерамічного стержня з товщинною поляризацією, з розділеним електродним покриттям на лицьових поверхнях, що дозволяє змоделювати пружний стержень з включеною неоднорідністю матеріалу. Механічна неоднорідність матеріалу п'єзостержня досягається підведенням до різних частин електродів синфазного електричного навантаження різної амплітуди. Збудження коливань здійснюється генератором електричної напруги з різницею вихідних потенціалів, що змінюється за гармонічним законом.

Для декількох перших нормальних мод визначені власні частоти коливань розглянутого стержня при відсутності механічного навантаження. Знайдені частотні спектри співставлені зі спектром повздовжніх коливань п'єзокерамічного стержня з суцільним електродним покриттям [1].

Список літератури

[1] В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга, *Механика связанных полей в элементах конструкций.* Киев: Наук. Думка, 1975.

Автор

Олена Андріївна Гур'єва — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *hurieva.alyona@gmail.com*

Узагальнені оцінки Надарая-Ватсона для суміші зі змінними концентраціями

Г. М. Дичко, Р. Є. Майборода

У даній роботі запропоновано узагальнення оцінки Надарая-Ватсона для вибірок з суміші зі змінними концентраціями. Отримано умови консистентності та асимптотичної нормальності. Визначені теоретично оптимальні ядро та параметр згладжування запропонованої оцінки.

Розглянемо задачу непараметричної регресії для сумішей, у яких кожен об'єкт O_j, $j = \overline{1,n}$, вибірки може належати одному з M компонентів. Справжнє значення номера компонента $\kappa_j = \kappa(O_j)$, якому належить об'єкт O_j невідоме, але відомі концентрації: $p_j^m = \mathbb{P}\{\kappa_j = m\}, j = \overline{1,n}, m = \overline{1,M}$.

Нехай $\xi(O_j) = (X_j, Y_j)$ – вектор характеристик об'єкта O_j. Припустимо, що залежність між регресором X_j та відгуком Y_j описується моделлю вигляду

$$Y_j = g^{(\kappa_j)}(X_j) + \varepsilon_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

де $g^{(m)}$ - невипадкова функція регресії m-го компонента суміші, ε_j - незалежні з X_j похибки регресії, які мають нульове середнє та невідому дисперсію. Позначимо також $\sigma^2_{(m)} = \mathbb{D}[\varepsilon_j | \kappa_j = m] < \infty, m = \overline{1,M}$.

Припустимо, що розподіли X для всіх компонент є абсолютно неперервними відносно міри Лебега і позначимо $f^{(m)}(x)$ – невідому щільність регресора для об'єктів m-того компоненту.

Тоді узагальнену оцінку Надарая-Ватсона регресії $g^{(k)}(x)$ із (1) можна задати як:

$$\hat{g}_n^{(k)}(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{j;n}^k Y_j K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)}{\sum_{j=1}^n a_{j;n}^k K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)}, \tag{2}$$

де $a_{j;n}^k$ - невипадкові вагові коефіцієнти

$$a_{j;n}^k = \frac{1}{\det \Gamma_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+k} \gamma_{km} p_j^m,$$

$\Gamma_n = (< p^l, p^m >_n)_{l,m=1}^M$, γ_{im} - i,m-й мінор матриці Γ_n (див. п. 2.1 у [2]);
$K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ядро оцінки;
h - параметр згладжування оцінки.

Теорема 1 (*консистентність*)**.** Нехай виконуються наступні умови.
1. K — фінітне обмежене ядро.
2. $x_0 \in \mathbb{R}$ є точкою неперервності функцій $g^{(k)}(x)$ та $f^{(k)}(x)$.
3. $f^{(k)}(x_0) > 0$.
4. Функції $g^{(m)}(x)$ і $f^{(m)}(x)$ обмежені в деякому околі точки x_0 для всіх $m = \overline{1,M}$.
5. Існує $c_0 > 0$, таке, що $\det \Gamma_n > c_0$ для всіх n.
6. $h = h_n \to 0$, $h_n n \to \infty$ при $n \to \infty$.
Тоді

$$\hat{g}_n^{(k)}(x_0) \xrightarrow{\mathrm{P}} g^{(k)}(x_0),\ n \longrightarrow \infty.$$

Введемо наступні позначення для запису умов асимптотичної нормальності узагальнених оцінок Надарая-Ватсона. Нехай

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 K(z) dz, d_-^2 = \int_{-\infty}^{0} (K(z))^2 dz,\ d_+^2 = \int_0^{\infty} (K(z))^2 dz,\ d^2 = d_-^2 + d_+^2.$$

Точками над символом функції будемо позначати похідні по dx:

$$\dot{f}^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x),\ \ddot{g}^{(k)}(x) = \frac{d^2}{dx^2} g^{(k)}(x).$$

Теорема 2 (*Асимптотична нормальність*)**.** Нехай виконуються умови.
1. Функція $g^{(k)}(x)$ має неперервну другу похідну $\ddot{g}^{(k)}(x)$ в околі точки x_0.
2. Функції $g^{(m)}(x)$, $m = \overline{1,M}$ мають границі

$$g^{(m)}(x_0-) = \lim_{x \uparrow x_0} g^{(m)}(x),\ g^{(m)}(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} g^{(m)}(x).$$

3. Існує $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n$ і $\det \Gamma \neq 0$.
4. Для всіх $m = \overline{1,M}$ існують границі $\langle \left(a^k\right)^2 p^m \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle \left(a^k\right)^2 p^m \rangle_n$
5. У деякому околі точки x_0 функції $f^{(m)}(x)$ - неперервні $m = \overline{1,M}$,
$f^{(k)}(x)$ — неперервно диференційовна і $f^{(k)}(x_0) > 0$.
6. K — фінітне обмежене ядро і $\int_{-\infty}^{\infty} zK(z)dz = 0$.
7. $h = h_n = Hn^{-1/5}$, де $H > 0$ деяке фіксоване число.
Тоді

$$n^{2/5}(\hat{g}_n^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(x_0)) \xrightarrow{\mathrm{W}} \mathcal{N}(\mu^{(k)}(x_0), S_{(k)}^2(x_0)),$$

де

$$\mu^{(k)}(x_0) = H^2 D \left(\frac{\dot{g}^{(k)}(x_0)\dot{f}^{(k)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)} + \frac{1}{2}\ddot{g}^{(k)}(x_0) \right),$$

$$S_{(k)}^2(x_0) = \frac{1}{H(f^{(k)}(x_0))^2} \sum_{m=1}^{M} f^{(m)}(x_0) \langle (a^k)^2 p^m \rangle R_m,$$

$$R_m = \sigma^2_{(m)} d^2 + (g^{(k)}(x_0) - g^{(m)}(x_0-))^2 d^2_- + (g^{(k)}_n(x_0) - g^{(m)}(x_0+))^2 d^2_+.$$

Зауваження 1. Обмеження $h_n n \to \infty$ у Теоремі 1 також вимагається для консистентності оцінок Надарая-Ватсона за однорідною вибіркою.

Зауваження 2. Швидкість збіжності оцінок у Теоремі 2 є непокращуваною навіть для оцінювання по однорідних вибірках, якщо розглядаються двічі неперервно диференційовні функції регресії.

У Теоремі 2 параметр згладжування задається у вигляді $h = Hn^{-\frac{1}{5}}$. Тому його вибір визначається значенням H. У термінах асимптотичної середньоквадратичної похибки, оптимальним значенням параметра буде

$$H_{opt} = \sqrt[5]{\frac{d^2 \frac{1}{(f^{(k)}(x_0))^2} \sum_{m=1}^{M} f^{(m)}(x_0) \langle (a^k)^2 p^m \rangle \left(\sigma^2_{(m)} + (g^{(k)}(x_0) - g^{(m)}(x_0))^2 \right)}{4D^2 \left(\frac{\dot{g}^{(k)}(x_0) \dot{f}^{(k)}(x_0)}{f^{(k)}(x_0)} + \frac{1}{2} \ddot{g}^{(k)}(x_0) \right)^2}}$$

При цьому, ядро Єпанєчнікова є оптимальним для оцінювання, якщо функції регресії всіх компонентів є неперервними у точці оцінювання.

Список літератури

[1] А.А. Боровков, *Теория вероятностей.* Наука: Москва, 1986.

[2] Р. Майборода, О. Сугакова, *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із сумішi.* К.: ВПЦ «Київський університет», 2008.

[3] W. Hardle, M. Muller, S. Sperlich, A. Werwatz, *Nonparametric and Semiparametric Models.* Springer-Verlag Berlin, 2004.

Автори

Галина Миколаївна Дичко — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *galia.dychko@gmail.com*

Ростислав Євгенович Майборода — професор, доктор фізико-математичних наук, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *mre@univ.kiev.ua*

Solvency II: структура та принципи, можливості та виклики

В. П. Зубченко

Під час доповіді розглянемо базову структуру та принципи Solvency II - європейської директиви платоспроможності для страхового сектору економіки. З одного боку, SII є складною системою, представленою значною кількістю компонент, модулів, зображень, звітів. З іншого боку, SII відкриває широкі можливості щодо забезпечення оперативного контролю діяльності страхової компанії, високого рівня її надійності та платоспроможності, прозорості та публічності інформації щодо основних показників діяльності страхового ринку, значно збільшує конкуренті переваги страхової компанії.

Проаналізуємо основні компоненти моделі:

- кількісні вимоги, зокрема моделі розрахунку платоспроможного та мінімального капіталу (Solvency Capital Requirement & Minimum Capital Requirement відповідно);
- управління та регулюючий нагляд, зокрема модель проспективого моніторингу процесу оцінки ризику та забезпечення платоспроможності страхової компанії (Own Risk and Solvency Assessment);
- прозорість та розкриття інформації кожним із учасників страхового ринку, що передбачає регулярну подачу комплексу стандартизованих звітів щодо ключових показників діяльності страхової компанії (Solvency and Financial Condition Report, Regular Supervisory Reporting, Quantitative Reporting Template, Own Risk and Solvency Assessment Report та ін.)

Проаналізуємо можливості та виклики впровадження Solvency II на страховому ринку України. Змоделюємо перспективи та ризики, доходи та витрати, складності та конкуренті переваги різних груп стейкхолдерів. Розглянемо необхідні зміни професійних стандартів підготовки актуаріїв та аналітиків страхового ринку України.

Список літератури

[1] *European Insurance and Occupation Pensions Authority*, https://eiopa.europa.eu/.

Автор

Володимир Петрович Зубченко — канд. фіз.-мат. наук, асистент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *volodymyr.zubchenko@gmail.com*

Побудова діаграми Вороного для рухомих точок на площині

А. М. Зуєв

Діаграма Вороного є дуже цікавою задачею у галузі обчислювальної геометрії. Вона має широке практичне застосування: катрографія, біологія, хімія, обробка зображень та багато іншого.

Проте, крім цього, дана задача дозволяє робити певні узагальнення. Розглянемо одне із них.

Нехай кожна з точок діаграми Вороного рухається по деякій траєкторії, і ми бажаємо мати можливість дізнатися стан діаграми у будь-який момент часу. Для розв'язання цієї задачі було проведено аналіз того, як структура діаграми змінюється з часом. Виходячи з цього, створено метод,що дозволяє знаходити час наступної зміни структури діаграми, виходячи з припущення, що залежність координат точки від часу можна виразити поліномом. І далі, згенерувавши всі зміни структури діаграми, ми зможемо швидко одержувати стан діаграми у довільний момент часу та виконувати запити.

Автор

Антон Миколайович Зуєв — студент 4 курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *ant0n3uev@gmail.com*

Мажорижація трикутників та нерівність Карамати

П. Є. Козаровицька

У даній роботі вводиться поняття мажоризації трикутників, за допомогою якого можна встановити багато цікавих геометричних нерівностей. Актуальність цієї роботи полягає тому, що поняття мажоризації має широке застосування в багатьох областях сучасної науки [3]. Мета даної роботи — вивчення цього поняття та знаходження нових геометричних співвідношень, які порівнюють відповідні елементи мажоруючих трикутників.

Надалі будемо використовувати такі позначення: $X \prec Y$ — набір Y мажорує набір X [2]; $X \prec_w Y$ — набір Y слабко мажорує набір X [3].

Будемо казати, що трикутник $A_2B_2C_2$ *мажорує* трикутник $A_1B_1C_1$, якщо $(a_1, b_1, c_1) \prec (a_2, b_2, c_2)$, тобто $a_1 \geq b_1 \geq c_1$, $a_2 \geq b_2 \geq c_2$ та справджуються такі співвідношення: $a_1 \leq a_2$; $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$; $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2$.

Користуючись тим фактом, що будь-який трикутник мажорує рівносторонній трикутник такого самого периметра, отримаємо оцінки певних елементів трикутника, які виражаються через його периметр P. Головним інструментом для доведення цих нерівностей є нерівність Карамати [1]. Декілька отриманих співвідношень наведено нижче.

Властивість 1. Для площ: $S_1 \geq S_2$.

Наслідок. У довільному трикутнику $S \leq \frac{P^2\sqrt{3}}{36}$.

Властивість 2. Для радіусів вписаних кіл: $r_1 \geq r_2$.

Наслідок. У довільному трикутнику $r \leq \frac{P\sqrt{3}}{18}$.

Властивість 3. Для висот: $\left(\frac{1}{h_{a_1}}, \frac{1}{h_{b_1}}, \frac{1}{h_{c_1}}\right) \prec_w \left(\frac{1}{h_{a_2}}, \frac{1}{h_{b_2}}, \frac{1}{h_{c_2}}\right)$.

Властивість 4. Для медіан: $\left(m_{c_1}^2, m_{b_1}^2, m_{a_1}^2\right) \prec_w \left(m_{c_2}^2, m_{b_2}^2, m_{a_2}^2\right)$.

Отже, у роботі введене поняття мажоризації трикутників, досліджено його застосування в геометрії та доведено декілька геометричних нерівностей та співвідношень за допомогою цього поняття.

Список літератури

[1] J. Karamata, "Sur une inégalitê relative aux fonctions convexes", *Publications of Mathematical University of Beograd*, vol. 1, pp. 145-148, 1932.

[2] Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства.* М: Государственное издательство иностранной литературы, 1948.

[3] A.W. Marshall, I. Olkin, B.C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications (2nd ed.)*. Springer, LLC, 2011.

Автор

Поліна Євгенівна Козаровицька — учениця 11 класу, Русанівський ліцей, Київ, Україна; E-mail: *polinaitsme@gmail.com*

Реалізація нечіткого екстрактору на основі проблеми навчання з помилками

П. В. Колесніченко

У роботі буде представлено схему нечіткого екстрактору, який дозволяє використовувати біометричні дані замість секретного ключа.

Нечіткий екстрактор створений на основі проблеми навчання з помилками (LWE), яка вважається складною. Зауважимо, що біометричні дані використовуються лише для генерації таємного ключа та ніде не зберігаються.

Означення 1 (*Нечіткий екстрактор)***.** Пара алгоритмів (Gen, Rec) зветься нечітким екстрактором, якщо

- Алгоритм Gen бере на вхід $\omega \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ - метричний простір, і повертає пару (pub, r), де r - секрет, а pub - підказка, яка може бути оприлюднена.
- Алгоритм Rec бере на вхід $\omega^{`} \in \mathcal{M}$ і підказку $pub$, та повертає $r^{`}$.

причому $\forall \omega, \omega^{`} \in \mathcal{M}$, $d(\omega, \omega^{`}) \leq t$, якщо $Gen(\omega) = (pub, r)$, то $Rec(pub, \omega^{`}) = r$;

$\mathbf{Gen}(\omega)$	$\mathbf{Rec}(pub, \omega^{`})$
1. Choose uniform $\mathbf{s} \leftarrow \mathbb{Z}_q^n$	1. Parse pub as $(\mathbf{c}, \mathbf{B}, \mathbf{h})$
2. Let $\mathbf{c} = \mathbf{As} + \omega$	let $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \omega^{`}$
3. Choose uniform $\mathbf{r} \leftarrow \{0,1\}^m$	2. Compute $\mathbf{s}^{`} = Decode_t(\mathbf{A}, \mathbf{b})$
and compute $(\mathbf{B}, \mathbf{h}) \leftarrow Enc_s(\mathbf{r})$	3. Compute $\mathbf{r}^{`} = Dec_{\mathbf{s}^{`}}(\mathbf{B}, \mathbf{h})$
4. Set $pub = (\mathbf{c}, \mathbf{B}, \mathbf{h})$	4. Output $\mathbf{r}^{`}$
5. Output (pub, r)	

Таблиця 1. Алгоритм нечіткого екстрактору [1]

Запропонований алгоритм було реалізованно за допомогою Java бібліотеки cc.redberry [2]. Реалізована схема нечіткого екстрактору показала здатність цього алгоритма працювати на штучно згенерованих замірах біометрики.

Список літератури

[1] D. Apon, C. Cho et al, *Efficient, Reusable Fuzzy Extractors from LWE.* https://eprint.iacr.org/2017/755.

[2] Java бібліотека cc.redberry. https://rings.readthedocs.io/en/latest/index.html.

Автор

Павло Васильович Колесніченко — студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *pavlo.kolesnichenko@gmail.com*

Використання ланцюгових дробів та їх зв'язок з гіперболічною геометрією

О. В. Кот

1. Метою роботи є дослідження використання ланцюгових дробів, як в математиці, так і в оточуючому середовищі.

2. Робота є актуальною тому, що ланцюгові дроби є основою багатьох процесів, що дозволяє з математичної точки зору поглянути на проблему, оцінити її та вирішити. Таким чином ланцюговий дріб є допоміжним математичним інструментом вчених при розробці певних речей, в яких зустрічається такий дріб.

3. Загальним виглядом ланцюгового дробу будь-якого числа (наприклад, b) є:

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots}}},$$

де b_n (за умови, що кожне наступне число є виду b_{n+1}) є цілими додатними числами (b_0 — ціле, а всі інші натуральні).

4. Перетворення ірраціональних дробів використовують для доведення ірраціональності чисел.

5. Сумарною послідовністю Фібоначчі можна трактувати закономірність проявів ланцюгових дробів, що зустрічаються у природі.

6. Прояв зв'язку між ланцюговими дробами та гіперболічною геометрією характеризується за допомогою теселяції Ферея та перетворень Мобіуса. Теселяція Ферея – це заміщення фігурами або поділ на плитки гіперболічної площини. Це означає, що існує стандартна фігура – рівносторонній трикутник, чиї зображення під певною групою симетрії накривають площину без перекриття. За допомогою перетворень Мобіуса було досліджена прості ланцюгові дроби з геометричної точки зору, на відміну від традиційної алгебраїчної.

Список літератури

[1] C. D. Olds, *Continued fractions.* Random House, 1963.

[2] J. T. Miller, *Families of continued fractions.* Arizona Maths, 2000.

[3] W. B. Jones , W. J. Thron, *Continued fractions. Analytic theory and applications.* Cambridge University Press, 1984.

[4] C. Series, *Continued Fractions and Hyperbolic Geometry.* Loughborough LMS Summer School, 2015.

[5] R. van Rensburg, *The geometry of continued fractions as analysed by considering Möbius transformations acting on the hyperbolic plane.* University of the Witwatersrand, 2011.

[6] A. Khinchin, *Continued fractions.* Univ. Press, 1964.

[7] Л. Ф. Пичурин, *За страницами учебника алгебры.* М.: Просвещение, 1990, сс. 120–130.

[8] А. Устинов, "Цепные дроби вокруг нас", *Квант*, №2, сс. 32–34, 2010.

[9] "Continued Fractions: An Introduction", in *MathArchieves.* Available: http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/intro.html

Автор

Олена Володимирівна Кот — учениця 11 класу гімназії №107 «Введенська», Київська мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: *kolenat2002@gmail.com*

Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку

В. П. Кравець

Нехай X - m-вимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B - лінійні оператори в X; I, O - одиничний та нульовий оператори в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = F_n x_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – шукана послідовність елементів простору X, $F_n = A, n \geq 1, F_n = B, n \leq 0$.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X.

Покладемо

$$X^2 := \big\{(x^{(1)}, x^{(2)})^t \big|\ x^{(1)}, x^{(2)} \in X\big\}.$$

Тоді X^2 — $2m$-вимірний банахів простір з покоординатними операціями і нормою $||\overline{x}||_* = ||x^{(1)}||+||x^{(2)}||$. Якщо E, F, G, H— лінійні оператори в X, то, як і для випадку числових матриць, $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає лінійний оператор в X^2.

Нехай $T_A = \begin{pmatrix} A+2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$, $\sigma(T_A)$ — спектр оператора T_A,

$$S = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}.$$

Справджуються такі теореми.

Теорема 1. Для того, щоб для різницевого рівняння (1) виконувалася умова 1, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови:
(i) $\sigma(T_A) \cap S = \varnothing$, $\sigma(T_B) \cap S = \varnothing$;
(ii) $X^2 = X^2_-(T_A) \dot{+} X^2_+(T_B)$, тобто X^2 є прямою сумою $X^2_-(T_A)$ та $X^2_+(T_B)$.

Теорема 2. Нехай оператори A, B в одному і тому ж базисі простору X зводяться до діагонального вигляду (тобто мають один і той же набір власних векторів $u_1, u_2, ..., u_m$, які утворюють базис в X). Тоді для різницевого рівняння (1) умова 1 виконується у тому і тільки у тому випадку, коли

$$\sigma(A) \cap [-4; 0] = \varnothing, \quad \sigma(B) \cap [-4; 0] = \varnothing.$$

Автори

Вікторія Павлівна Кравець — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *toriiawik@ukr.net*

Спектральні властивості напівгрупи часткових автоморфізмів регулярного кореневого дерева

О. В. Крицька

Нехай T – n-рівневе d-регулярне кореневе дерево, а $PAutT$ - напівгрупа його часткових перетворень. Позначатимемо через $x \in \mathcal{P}_n$ - частковий автоморфізм. Нехай B_n позначає кількість вершин на n-ому рівні T. Очевидно, що $|B_n| = d^n$. Занумеруємо вершини B_n натуральними числами від 1 до d^n:

$$B_n = \{v_i^n | i = 1, \dots, d^n\}.$$

Для довільно обраного перетворення $x \in \mathcal{P}_n$ задамо матрицю

$$A_x = \left(1_{\{x(v_i^n)=v_j^n\}}\right)_{i,j=1}^{d^n}.$$

Іншими словами, (i, j) компонента матриці A_x дорівнює 1, якщо перетворення x переводить $i-$ту вершину в $j-$ту, і дорівнює 0 в іншому випадку. Нехай $\chi_x(\lambda)$ –

характеристичний многочлен для A_x і $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d^n}$ - його корені з урахуванням кратності.

Означення. Кажуть, що випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність стала всередині відрізка та дорівнює нулю поза ним.

Позначимо

$$\Xi = \frac{1}{d^n} \sum_{k=1}^{d^n} \delta_{\lambda_k}$$

– рівномірний розподіл власних чисел матриці A_x. Для часткового автоморфізму $x \in \mathcal{P}_n$ нехай $\eta_n(x) = \Xi_n(0)$ позначає відношення нульових власних чисел матриці A_x, і нехай $\xi_n(x) = 1 - \eta_n(x)$ позначає відношення ненульових власних чисел. Тоді доречно стверджувати, що

$$\eta_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} 1, n \to \infty,$$

або, що еквівалентно,

$$\xi_n(x) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, n \to \infty.$$

Список літератури

[1] S.N. Evans, "Eigenvalues of random wreath products", *Electron. J. Probability*, vol.7, no. 9, pp.1-15, 2002.

[2] E. Kochubinska, "Spectral properties of partial automorphisms of a binary rooted tree", *Algebra and Discrete Mathematics*, vol. 26, no. 2, pp. 280-289, 2017.

Олена Вадимівна Крицька — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *lenuly95@gmail.com*

Асимптотична нормальність векторної оцінки максимальної вірогідності в дробовій моделі Васічека

С. С. Логвіненко

Розглядається дробова модель Васічека, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$X_t = x_0 + \int_0^t (\alpha - \beta X_s)\, ds + \gamma B_t^H, t \geq 0,$$

де B^H — це дробовий броунівський рух з індексом Хюрста H. Припускається, що параметри $x_0 \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ та $H \in (0, 1)$ відомі. Основною ціллю дослідження є оцінка невідомих параметрів $\alpha \in \mathbb{R}$ та $\beta > 0$ за допомогою неперервних траєкторій процесу X на інтервалі $[0, T]$.

Застосовуючи аналог теореми Гірсанова для дробового броунівського руху, було отримано оцінки максимальної вірогідності (ОМВ) $\widehat{\alpha}_T$ та $\widehat{\beta}_T$ для параметрів α та β відповідно при $H > 1/2$ та доведено їх консистентність та асимптотичну нормальність ([2, Теорема 3.4]).

У даній роботі досліджується асимптотичний розподіл ОМВ $\left(\widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\right)$ для векторного параметра (α, β). Було побудовано генератрису моментів для чотирьох допоміжних статистик, через які виражається ОМВ ([1, Теорема 3.4]). За допомогої цієї генератриси доведено асимптотичну нормальність ОМВ $\left(\widehat{\alpha}_T, \widehat{\beta}_T\right)$ ([1, Теорема 4.2]). Варто відзначити, що оцінки $\widehat{\alpha}_T$ та $\widehat{\beta}_T$ виявилися асимптотично незалежними.

Список літератури

[1] С. Логвіненко, К. Ральченко, "Асимптотичний розподіл оцінок максимальної вірогідності у дробовій моделі Васічека", *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 99, p. 134–151, 2018.

[2] S. Lohvinenko, K.Ralchenko, "Maximum likelihood estimation in the fractional Vasicek model", *Lithuanian Journal of Statistics*, 56(1), p. 77–87, 2017.

[3] S. Lohvinenko, K. Ralchenko, O. Zhuchenko, "Asymptotic properties of parameter estimators in fractional Vasicek model", *Lithuanian Journal of Statistics*, 55(1), p. 102–111, 2016.

Автор

Станіслав Станіславович Логвіненко — аспірант 2-го року навчання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *stanislav.lohvinenko@gmail.com*

Вплив попередніх напружень на швидкість розповсюдження плоских хвиль перпендикулярно до шарів нанокомпозитного матеріалу

С. Ю. Мазур

Останні десятиліття були присвячені пошукам матеріалів, властивості яких перевершують вже відомі. В цьому плані гарно себе проявляють композити, а ще краще – нанокомпозити. Специфікою останніх є характерний розмір складових – 10^{-9} - 10^{-7} м. Велика частина нанокомпозитів виготовляються за високих температур. Звідси – висока ймовірність появи залишкових напружень.

В доповіді вивчається вплив попередніх напружень на швидкість розповсюдження плоских хвиль перпендикулярно до шарів нанокомпозитного матеріалу. Шари композиту складаються з двох матеріалів, які чергуються. Визначальні співвідношення нелінійно пружних компонентів нанокомпозиту задаються потенціалом Мернагана:

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda(A_1)^2 + \mu A_1 + \frac{A}{3}(A_1)^3 + BA_1A_2 + \frac{C}{3}A_3, \tag{1}$$

де A_1, A_2, A_3 - перший, другий і третій алгебраїчні інваріанти тензора деформацій Гріна ε_{ij} відповідно.

Для беспосереднього визначення швидкостей хвиль при проходженні шарів нанокомпозиту проводиться аналіз дисперсійних рівнянь. Розглядається випадок довгих в порівнянні з товщинами шарів хвиль. Це дає змогу значно спростити дисперсійні рівняння.

В результаті отримано графіки залежності швидкості поздовжніх та поперечних хвиль в залежності від початкових напружень.

Список літератури

[1] Л.М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*. М.: Изд-во АН СССР, 1957.
[2] А.Н.Гузь, *Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями*. Киев: "А.С.К.", 2004.

Автори

Сергій Юрійович Мазур — студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *s.masur17@gmail.com*

Наближення розв'язків кабельного рівняння із загальною стохастичною мірою

Б. І. Манікін

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра підмножин X, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — повний ймовірнісний простір. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ позначимо множину всіх випадкових величин. Збіжність в L_0 означає збіжність за ймовірністю. Стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathcal{B} \to L_0$.

В роботі [1] досліджено стохастичне кабельне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - u(t,x) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(x)\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0\,, \quad u(0,x) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $0 \le t \le T,\ 0 \le x \le L$, $u : [0,T] \times [0,L] \times \Omega \to \mathbf{R}$ — невідома випадкова функція, μ — стохастична міра, визначена на борельовій $\sigma-$алгебрі в $[0,L] \subset \mathbf{R}$.

Розглядається розв'язок (1) у м'якому сенсі:

$$u(t,x) = \int_0^L G(t,x,y)u_0(y)\,dy + \int_{[0,L]} d\mu(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds. \tag{2}$$

Тут G — це фундаментальний розв'язок однорідного кабельного рівняння. Досліджується збіжність розв'язків рівняння

$$u^{(n)}(t,x) = \int_0^L G(t,x,y)u_0(y)\,dy + \int_{[0,L]} d\mu^{(n)}(y) \int_0^t G(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds. \tag{3}$$

Умова 1. $\sigma(t,x)$ має неперервну за парою змінних обмежену похідну $\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t\,\partial x}$.

Умова 2. $u_0(y) = u_0(y,\omega)$ вимірна, і при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$ має неперервну за y обмежену похідну $\dfrac{\partial u_0}{\partial y}$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 та 2, а також

$$\sup_{x\in[0,L]} |(\mu^{(n)} - \mu)[0,x])| \to 0 \quad \text{м.н.}, \quad n \to \infty.$$

Тоді існують модифікації u з (2), $u^{(n)}$ з (3) такі, що

$$\sup_{t\in[0,T],x\in[0,L]} |u^{(n)}(t,x) - u(t,x)| \to 0 \quad \text{м.н.}, \quad n \to \infty.$$

Список літератури

[1] В. М. Радченко, "Кабельне рівняння із загальною стохастичною мірою", *Теорія імовір. та матем. статист.*, 84, pp. 123–130, 2011.

Автор

Борис Ігорович Манікін — студент 4-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *bmanikin@gmail.com*

Доведення симетричних нерівностей з трьома змінними

С. В. Мицик

Проблема та актуальність дослідження. Ця робота є продовженням дослідження автором методів доведення нерівностей, частина результатів якого опублікована у збірнику матеріалів XVI Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2018».

Мета роботи полягає в аналізі новітніх технологій доведення симетричних нерівностей з трьома змінними – нерівності Шура, симетричної кубічної нерівності, теореми Столарскі, нерівності Мюрхеда – та демонстрації можливостей їх практичного застосування. З кількох збірників та досвіду участі автора у Всеукраїнському математичному олімпіадному русі підібрано симетричні нерівності з трьома змінними, для доведення яких використані представлені в роботі технології.

Одержані результати. Проведене дослідження засвідчило, що застосування технологій доведення симетричних нерівностей з трьома змінними дозволяє суттєво спростити алгоритм розв'язування багатьох нестандартних задач і тим самим підвищити ефективність підготовки до математичних олімпіад і турнірів, а також відкриває простір для творчості і надає можливості для створення авторських задач. В роботі представлені чотири задачі (автор С. Мицик), розв'язання яких передбачає використання проаналізованих технологій.

Задача 1. Нехай a, b, c – додатні дійсні числа, такі що $a^4 + b^4 + c^4 = 1/2$. Довести, що

$$abc(a+b+c) \geq (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) - 1.$$

Задача 2. Знайти найменше значення константи c, при якому для $\forall x, y, z \geq 0$, $xy + yz + zx = 2$ виконується нерівність

$$3(x+y+z)^3 + cxyz \geq 22(x+y+z).$$

Задача 3. Довести, що

$$\frac{p^3}{3} - pr^2 \geq 4R^3(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma),$$

де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола, R – радіус описаного кола, α, β, γ – кути трикутника.

Задача 4. Нехай x, y, z – невід'ємні дійсні числа, $n \geq 3$. Довести, що

$$\frac{x^n}{(y+1)(z+1)} + \frac{y^n}{(x+1)(z+1)} + \frac{z^n}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

З авторськими варіантами розв'язання цих задач можна ознайомитися у роботі «Доведення симетричних нерівностей з трьома змінними», представленій автором на II етапі конкурсу-захисту Київського відділення МАН України (секція: математика) у лютому 2019 р.

Автор

Сергій Вадимович Мицик — учень 10 класу, Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *serhiy49@ukr.net*

Оцінки параметрів нелінійної регресії за спостереженнями з суміші

В. О. Мірошниченко

Розглядається задача оцінювання коефіцієнтів нелінійної регресії за незалежними спостереженнями $\Xi = (X_i, Y_i)_{i=1^n}$ з суміші. При цому суміш складається з декількох компонент та ймовірностей змішування $(p_i^k)_{k=1,M}^{i=1,n}$, що є різними для різних компонент.

Модель регресії має вигляд

$$Y_i = g(X_i, b^{(k_i)}) + \varepsilon_i^{k_i},$$

де k_i – номер компоненти до якої належить i-й об'єкт вибірки, а $b^{(k_i)}$ – невідомі параметри регресії для об'єктів із k-ї компоненти, $\varepsilon_i^{k_i}$ – центрована похибка, розподіл якої залежить від номера компоненти. Слід зауважити, що k_i не спостерігається, а $\varepsilon_i^{k_i}$ не залежить від X_i.

Ймовірності $p_i^l = P(k_i = l)$ відомі.

Оцінки параметрів регресії є розв'язком оціночного рівняння, яке отримується шляхом диференціювання узагальненого функціоналу найменших квадратів:

$$\nabla G_n^k(\gamma) = \nabla(\sum_{i=1}^n a_{i:n}^k (Y_i - g(X_i, \gamma))^2) = \sum_{i=1}^n (-2) a_{i:n}^k (Y_i - g(X_i, \gamma)) \nabla g(X_i, \gamma) = 0, \quad (1)$$

де $a_{i:n}^k$ – мінімаксні ваги, наведені у [1].

Використовуючи результати з [2] можна отримати такі умови консистентності цих оцінок.

Теорема 1. Нехай $\{\hat{b_n^{(k)}}\}$ – послідовність оцінок, які отримуються з оціночного рівняння для k-ї компоненти, а $b^{(k)}$ – справжні значення параметрів. Припустимо, що виконуються наступні умови:

1. $\det \Gamma \neq 0$.
2. Θ – компакт в R^d.

3. $\mathsf{E}|\varepsilon^{(k)}|^\delta < \infty$ та $\mathsf{E}||X^{(m)}||^\delta < \infty$ для деякої $\delta > 0$ $\forall m$.

4. $\mathsf{E}|h(X^{(m)}, Y^{(m)})|^{1+\delta} < \infty$, де $h(x,y) = \sup_{\gamma\in\Theta} ||s(x,y,\gamma)||$ для δ з умови 3, $\forall m$, де $s(x,y,\gamma) = (y - g(x,\gamma))\nabla(g(x,\gamma))$.

5. $g(x,\gamma)$ та $\nabla g(x,\gamma)$ – рівностепенево неперервні по x, та неперервні по γ.

6. $\mathsf{E}s(X^{(k)}, Y^{(k)}, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = b^{(k)}$.

Тоді $\hat{b_n^{(k)}} \to^P b^{(k)}, n \to \infty$.

Алгоритм вирішення рівняння (1) ми реалізували у середовищі R. Готовий алгоритм ми застосували до виявлення зв'язків між результатами ЗНО 2018 та розповсюдженістю певних політичних поглядів у різних регіонах України. Для аналізу цих даних ми використали логістичну регресію, де

$$g(x,b) = \frac{1}{1 + e^{-b_0 - <(b_1,\ldots,b_d),x>}},$$

та d – розмірність x.

Список літератури

[1] R. Maiboroda, D. Liubashenko, "Linear regression by observations from mixture with varying concentrations", *Modern Stochastics: Theory and Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 343-353, 2015.

[2] J. Shao, *Mathematical Statistics*, Springer, 2007.

Автор

Віталій Олегович Мірошниченко — аспірант 1-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *vitaliy.miroshnychenko@gmail.com*

Екстремуми функціоналів ентропійного типу

Ю. С. Мішура, Г. С. Железняк

Розглянемо суму двох незалежних вінерівських процесів зі зносом і побудуємо сім'ю ймовірнісних мір, відносно яких знос дорівнює нулю. Серед цих мір шукаємо ті, які мінімізують або максимізують функціонали ентропійного типу. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathsf{P})$ – ймовірнісний простір з фільтрацією, на якому визначено всі об'єкти, що далі розглядаються. Розглядаючи задачу про усунення зсуву для суми двох незалежних вінерівських процесів, знайдемо ті міри P_1 і P_2, які доставляють екстремуми сумі двох функціоналів ентропійного типу:

$$\mathsf{H}(\mathsf{P}, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2) = \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)^2 \left(-\log\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)\right] + \mathsf{E}\left[\left(\frac{d\mathsf{P}_2}{d\,\mathsf{P}}\right)^2 \left(-\log\frac{d\mathsf{P}_1}{d\,\mathsf{P}}\right)\right]. \quad (1)$$

У статті [1] було знайдено мінімуми і максимуми функціонала (1) за умови, що $f_1(t) = \alpha f(t)$ та $f_1(t) = (1-\alpha)f(t)$, тобто ми шукали точку α, в якій цей мінімум досягався. Зараз будемо шукати мінімуми і максимуми цього ж функціонала в ширшому класі функцій $f_1(t) = \alpha(t)f(t)$ та $f_2(t) = (1-\alpha(t))f(t)$, де $\alpha(t) \in [0,1]$ – вимірна обмежена функція. Нагадаємо позначення $c = \|f\|_{L_2([0,T],\lambda_1)}$.

Теорема 1. (*основний результат*, [2])

1) Якщо $c \le 2$, то функціонал $\mathsf{H}(\mathsf{P}, \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2)$ досягає свого мінімуму при $f_1(t) = f_2(t) = \frac{f(t)}{2}$, і це мінімальне значення дорівнює $\frac{c}{4}e^{c/4}$, а максимуму, наприклад при $f_1(t) = 1$, і це максимальне значення дорівнює $c/2$.
2) Якщо $c > 2$, то функціонал досягає свого мінімуму при $f_1(t) = x_1 f(t)$ та $f_2(t) = (1 - x_1)f(t)$, де x_1 – той єдиний корінь рівняння

$$x \exp\{c(1 - 2x)\} + x - 1 = 0,$$

який належить до інтервалу $(0, 1/c)$. Це мінімальне значення дорівнює $\frac{1-x_1}{2}\exp\{cx_1^2\}$. В силу симетрії функціонал досягає свого мінімуму також при $f_1(t) = (1-x_1)f(t)$ та $f_2(t) = x_1 f(t)$. Щодо максимуму, при $2 \le c \le \ln 8$ він дорівнює $c/2$, а при $c \ge \ln 8$ він дорівнює $\frac{c}{4}e^{\frac{c}{4}}$. У випадку, коли $c \ge 4$ максимум досягається при $f_1(t) = x_{3,4}f(t)$ та $f_2(t) = (1 - x_{3,4})f(t)$, де $x_{3,4}$ – корені квадратного полінома $1 - xc + x^2c = 0$, які дорівнюють відповідно $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{c}}$. Значення максимуму дорівнює

$$\frac{1}{4}\exp\left\{\frac{(c-2) - \sqrt{c(c-4)}}{2}\right\}\Big((c-2) - \sqrt{c(c-4)} - \Big(\sqrt{c(c-4)} - (c-2)\Big)\exp\Big\{\sqrt{c(c-4)}\Big\}\Big).$$

Список літератури

[1] Y. Mishura, H. Zhelezniak, "Extreme measures for entropy functionals", *Bull. of Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv: Phys. & Math.*, no. 4, pp. 15–20, 2017.

[2] Y. S. Mishura, H. S. Zhelezniak, "Calculation of extremums of entropy functionals", *Theor. Probability and Math. Statist.*, 99, pp. 177–186, 2018.

Автори

Юлія Степанівна Мішура — д.ф-м.н., професор, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *myus@univ.kiev.ua*

Ганна Сергіївна Железняк — аспірант 1-го року начання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *hanna.zhelezniak@gmail.com*

Побудова процесу Кокса-Інгерсолла-Росса при $H < 1/2$

Ю. С. Мішура, А. Ю. Юрченко-Титаренко

Класичний процес Кокса-Інгерсолла-Росса (КІР) – це випадковий процес $\{X_t,\ t \ge 0\}$, що, за означенням, є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX_t = (k - aX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 > 0, \quad t \ge 0,$$

де a, k, σ – невипадкові параметри, а $W = \{W_t,\ t \ge 0\}$ – вінерівський процес.

KIP-процес широко використовується у фінансових моделях, проте вагомим його недоліком є те, що він не може відтворювати "ефект пам'яті", який спостерігається на ринку в реальності. Одним зі способів врахувати такий ефект у моделях є заміна класичного вінерівського процесу дробовим броунівським рухом із індексом Хюрста H, причому останні дослідження показали, що особливо цікавим є випадок $H < 1/2$.

Розглянуто новий підхід до означення дробового CIR-процесу, згідно з яким процес визначається як квадрат потраєкторної поточкової границі при $\varepsilon \to 0$ процесів Y_ε, що задовольняють стохастичні диференціальні рівняння вигляду

$$Y_\varepsilon(t) = Y_0 + \int_0^t \frac{k}{Y_\varepsilon(s)\mathbb{1}_{\{Y_\varepsilon(s)>0\}} + \varepsilon} ds - a\int_0^t Y_\varepsilon(s)ds + \sigma B^H(t), \quad t \geq 0,$$

де $Y_0, a, k, \sigma > 0$, – фіксовані константи, а $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ – дробовий броунівський рух із індексом Хюрста $H \in (0, 1)$.

Доведено коректність такого означення (перевірено існування та скінченність границі). Отримано варіант леми про порівняння для стохастичних диференціальних рівнянь із адитивним дробовим броунівським шумом. Доведено неперервність та невід'ємність граничного процесу. Одержано рівняння як для процесу $Y(t) := \lim_{\varepsilon\to 0} Y_\varepsilon(t)$, так і для дробового процесу Кокса-Інгерсолла-Росса – останнє до першого моменту потрапляння в нуль має вигляд

$$X(t) = X_0 + \int_0^t (k - aX(s))\, ds + \sigma \int_0^t \sqrt{X(s)} \circ dB^H(s),$$

де інтеграл відносно дробового броунівського руху розуміється як потраєкторний інтеграл Стратоновича.

Також доведено, що при $H > 1/2$ означений процес Кокса-Інгерсолла-Росса строго додатний на всій осі та що при $H < 1/2$ ймовірність того, що процес Кокса-Інгерсолла-Росса не потрапить до нуля на фіксованому скінченному інтервалі, прямує до 1 при $k \to \infty$.

Список літератури

[1] Y. Mishura, A. Yurchenko-Tytarenko, "Fractional Cox-Ingersoll-Ross process with small Hurst indices", *Modern Stochastics: Theory and Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 13-39, 2019.

Автори

Юлія Степанівна Мішура — д.ф-м.н., професор, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *myus@univ.kiev.ua*

Антон Юрійович Юрченко-Титаренко — студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *ayurty@gmail.com*

Гранична поведінка випадкового блукання з еластичним екраном

О. О. Приходько

Розглянемо випадкове блукання $\tilde{S}(n)$, яке поводить себе як симетричне випад-

кове блукання зі стрибками на ± 1, за винятком точки 0. При потраплянні в точку 0, воно затримується на випадкову кількість часу $\eta_i \geq 0$ (н.о.р.), а далі продовжує іти як звичайне. В роботі досліджується гранична поведінка такого блукання, нормованого як у теоремі Донскера, $\frac{\tilde{S}(nt)}{\sqrt{n}}$. Для випадку $\mathbb{E}\eta_i < \infty$ одержано збіжність до звичайного Вінерівського процесу. Для випадку схеми серій $\{\eta_i^n\}$ встановлено наступні режими: Вінерівський процес, Вінерівський процес зупинений в 0, Вінерівський процес із липкою точкою 0.

Автор

Олександр Олександрович Приходько — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *xanderprix@gmail.com*

Рівнобедрені трикутники найменшої площі та периметру, описані навколо криволінійних серпоподібних двокутників

Є. А. О. Рудик

Дана робота присвячена дослідженню властивостей рівнобедрених трикутників, описаних навколо серпоподібних рівнорадіусних двокутників умовно великої товщини з максимальним значенням показника вписання.

У даній роботі досліджено описані рівнобедрені трикутники, бічні сторони яких дотикаються однієї зі сторін серпоподібного двокутника. Досліджено, що для певного положення вершини рівнобедреного трикутника при фіксованому значенні кута, що утворює висота рівнобедреного трикутника з віссю симетрії двокутника, площа та периметр трикутника може набувати найменшого значення. При цьому вершини рівнобедрених трикутників найменшої площі, описаних навколо криволінійних рівнорадіусних серпоподібних двокутників, розміщені на овалі Декарта, який міститься зовні внутрішньої петлі базового равлика Паскаля з вузловою точкою у центрі кола, до якого дотикаються дві бічні сторони рівнобедреного трикутника.

Вершини рівнобедрених трикутників найменшого периметру, описаних навколо криволінійних рівнорадіусних серпоподібних двокутників, розміщені на кривій шостого порядку.

Для доведення тверджень уведено узагальнену полярну систему координат з початком у центрі одного з утворюючих кіл і полярним радіусом, на якому відкладено відстань вершини описаного рівнобедреного трикутника від центра цього кола. Для різних значень параметрів двокутника проведено чисельний експеримент.

Автор

Євгенія Анастасія Олександрівна Рудик — учениця 10 класу, Києво-Печерський ліцей №171 «Лідер», Київська мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: *12evgenia01@gmail.com*

До рівняння Чандрасекара в банахових просторах

М. В. Сердюк

Нелінійне інтегральне рівняння

$$x(s) = y(s) + \lambda x(s) \int_0^1 \frac{s}{s+t}\, x(t)\, dt \tag{1}$$

у просторі $C([0,1])$ виникло в астрофізиці та називається рівнянням Чандрасекара [1].

Це рівняння відноситься до квадратних рівнянь у банаховому просторі вигляду $x = y + B(x,x)$, де $B : E \times E \to E$ — обмежений білінійний оператор, E — банахів простір. Надалі $E = C([0,1])$ або $E = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$.

Розглянемо таке узагальнення рівняння (1):

$$x(s) = y(s) + \lambda x(s) \int_0^1 f(s,t)x(t)\, dt,\ s \in [0,1], \tag{2}$$

відносно $x \in E$, де $y \in E$, $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, $f : [0,1]^2 \to [0,+\infty)$ — борельова функція.

Теорема 1 *Нехай $E = C([0,1])$, функція $f : [0,1]^2 \to [0,+\infty)$ неперервна на $[0,1]^2$ і така, що для довільного $t \in [0,1]$ $f(\cdot,t)$ зростаюча на $[0,1]$. Тоді при $\|y\| < \left(4|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt\right)^{-1}$ рівняння (2) має єдиний розв'язок у замкненій кулі $\bar{U}(0,r)$, де $r = \left(2|\lambda| \int_0^1 f(1,t)dt\right)^{-1}$.*

Теорема 2 *Нехай $E = L_p([0,1])$, $1 < p < +\infty$, $f : [0,1]^2 \to [0,+\infty)$ — борельова функція, така, що для довільного $t \in [0,1]$ $f(\cdot,t)$ зростаюча на $[0,1]$ та для довільного $s \in [0,1]$ $f(s,\cdot) \in L_q([0,1])$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді при $\|y\| < \left(4|\lambda|(g(1))^{1/q}\right)^{-1}$, де $g(s) = \int_0^1 (f(s,t))^q dt$, $s \in [0,1]$, рівняння (2) має єдиний розв'язок у замкненій кулі $\bar{U}(0,r)$, де $r = \left(2|\lambda|(g(1))^{1/q}\right)^{-1}$.*

Доведення цих теорем ґрунтується на результатах статті [2].

Список літератури

[1] S. Chandrasekhar, *Radiative transfer*. New York: Dover Publ, 1960.

[2] I. K. Argyros, "On the improvement of the speed of convergence of some iterations converging to solutions of quadratic equations". *Acta Math. Hung*, 57 (3-4), pp. 245-252, 1991.

Автор

Марія Вікторівна Сердюк — студентка 4 курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *mariemgnta@gmail.com*

Estimation of the accuracy of the criterion of checking the statistical hypothesis

P. P. Toth

Modern theory of random processes is widely used in various fields of science and

technology. Today, it is hard to imagine actuarial mathematics, biology, chemistry, physics without the application of the theory of random processes in them. That is why the study of the characteristics of random processes is a relevant subject of research. This report is dedicated to this topic.

In the monograph [2] and in the paper [3], based on the obtained estimates for the norms of Square-Gaussian random processes in $L_p, p \geq 1$ space (more detailed information on Square-Gaussian random processes can be found in the monograph Kozachenko, Buldygin [1]), a criterion for testing the hypothesis about the form of the covariance function of Gaussian stationary random process was built. Using this criterion, in this report, the hypothesis about the appearance of the covariance function of the Gaussian stationary random process was verified and the number of acceptances of false hypothesis by the criterion was estimated.

This research was supported by SHA Collegium Talentum Program.

References

[1] V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[2] Yu.V. Kozachenko, T. V. Hudyvok, V. B. Troshki, N. V. Troshki, *Estimation of covariance functions of Gaussian stochastic fields and their simulation*. Monograph, Uzhhorod, AUTDOR Shark, 2017.

[3] Yu. Kozachenko, V. Troshki, "A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process". *Modern Stochastics: Theory and Applications*, Vol. 1, pp.139–149, 2014.

Author

Peter Toth — 1st year Master's degree student, Ukrainian-Hungarian Educational Institute, Uzhhorod National University, Uzhhorod; E-mail: *toth.retep.18@gmail.com*

Genus 2 Heegaard Diagrams of Non-Orientable 3-Manifolds

H. Hatamian

According to [1], a Heegaard Diagram (F, u, v) of genus 2 has type I, II or III if it is depicted as in Fig.1 a,b or c, respectively and a simple algorithm can be proposed for enumeration of closed orientable three dimensional manifolds whose genus does not exceed two.

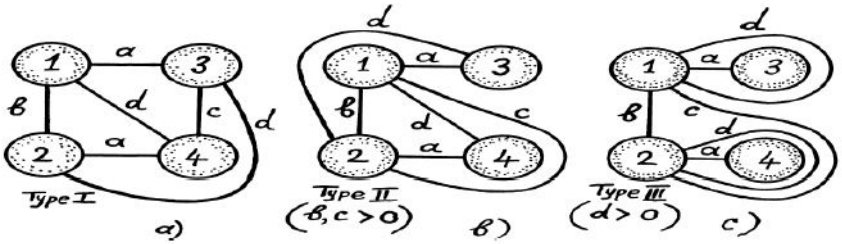

Figure 1

We will define for each type, the pairs of signs $(-1,+1)$, $(+1,-1)$ or $(-1,-1)$ to investigate genus 2 Heegaard diagrams of non-orientable three dimensional manifolds. Then we'll construct a diagram of type II with $a = b = c = d = 1$ and the pair of signs $(-1,-1)$ which determines a manifold distinct from $S_1 \tilde{\times} S_2$.

References

[1] A.T. Fomenko, S.V. Matveev, *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*. Springer Netherlands, 1997.

Author

Hossein Hatamian — 2nd year Master's student, Faculty of mechanics and mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: *myowngait@gmail.com*

Неперервні часткові відображення на блок-схемах

Г. О. Челнокова

У роботі розглядаються блок-схеми, тобто системи k-елементних підмножин (блоків) деякої скінченної множини об'єктів, такі що кожен об'єкт міститься в r блоках, а кожна пара об'єктів – в λ блоках.

Блок-схеми є одним з найбільш вивчених видів комбінаторних схем і широко застосовуються у плануванні статистичних досліджень (в тих галузях, де здійснюється об'єднання дослідів для систематичного порівняння певної кількості випробуваних зразків), в кодуванні для побудови стійких до помилок кодів та в криптографії. Блок-схеми також пов'язані з теорією чисел, теорією груп і напівгруп, скінченними проективними геометріями [1, 2].

У роботі [2] вводиться поняття неперервних часткових відображень на блок-схемі — часткових відображень множини об'єктів в себе, за яких прообраз блоку є або пустою множиною, або блоком, та встановлено ізоморфізм між множиною неперервних часткових відображень на блок-схемах та трансляційною оболонкою відповідної матричної напівгрупи Ріса. Однією з основних властивостей неперервних часткових відображень є лема однорідності: прообраз довільного об'єкта є або порожнім, або має фіксований розмір d. У роботі [2] формулюється дуальна гіпотеза однорідності: кожен блок, який є прообразом якогось іншого блоку, є прообразом фіксованого числа d' блоків з блок-схеми.

У своїй роботі я розглядаю властивості блок-схем та неперервних часткових відображень на блок-схемах. Основним результатом роботи є побудова контрприкладу до дуальної гіпотези однорідності.

Список літератури

[1] M. Hall, *Combinatorial theory*. Wiley-interscience, 1986.

[2] S. W. Margolis, J. H. Dinitz, *Translational hulls and block designs*. Springer, 1983.

Автори

Ганна Олексіївна Челнокова — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *chelnokovaganna@gmail.com*

Перевірка гіпотез у моделі Кокса із пропорційними ризиками та похибками вимірювання

О. О. Чернова

Розглянемо модель Кокса із пропорційними ризиками, відповідно до якої функція інтенсивності тривалості життя T має вигляд

$$\lambda(t|X;\lambda,\beta) = \lambda(t)\exp(\beta^T X), \quad t \geq 0.$$

Регресор X є випадковим вектором, розподіленим у $\mathbb{R}^k$, базова функція інтенсивності $\lambda(\cdot)$ належить параметричній множині, складеній з невід'ємних функцій, що задовольняють умову Ліпшиця з фіксованою сталою, а параметр регресії β лежить у компактній параметричній множині $\Theta_\beta \subset \mathbb{R}^k$.

Спостерігаються цензуровані значення – випадкові величини $Y := = \min\{T, C\}$ та індикатор відсутності цензурування $\Delta := I_{\{T \leq C\}}$. Цензор C є випадковим і розподіленим на скінченному проміжку $[0, \tau]$. Розподіл цензора невідомий, але відоме τ.

Замість X спостерігається сурогатна змінна $W = X + U$, де випадкова похибка вимірювання U має відому твірну функцію моментів. Пара (T, X), цензор C та похибка U є незалежними. Розглянемо n незалежних копій моделі. За спостереженнями $(Y_i, \Delta_i, W_i),\ i = 1, ..., n$, оцінюємо параметри моделі β та $\lambda(t), t \in [0, \tau]$.

У [1] отримано сумісну консистентну оцінку $(\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n)$ істиних значень (λ, β). На основі цієї оцінки описано процедуру перевірки гіпотези про значення параметра регресії β та інтегрального функціоналу від $\lambda(\cdot)$. Доведено консистентність відповідних тестів.

Список літератури

[1] A. Kukush, O. Chernova, "Consistent estimation in Cox proportional hazards model with measurement errors and unbounded parameter set", *Theor. Probability and Math. Statist.*, 96, pp.101–110, 2018.

[2] О. Чернова, "Перевірка гіпотез у моделі Кокса із пропорційними ризиками та похибками вимірювання", *Теор. Ймов. та Мат. Статист.* (у друці).

Автори

Оксана Олександрівна Чернова — аспірантка 3-го року навчання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *kseniaschool10@ukr.net*

Імплементація нечіткого цифрового підпису

В. О. Чернякова

У роботі буде презентовано схему нечіткого підпису на основі цифрового підпису, яка дозволяє використовувати замір біометрічних данних замість секретного ключа.

Нечіткий цифровий підпис утворюється поєднанням алгоритиів цифрового підпису Шнора реалізованного на групі точок еліптичної кривої та спеціальної конструкції скетч. Зауважимо, що біометричні данні використовуються лише для генерації таємного ключа та ніде не зберігаються.

Означення. Конструкція лінійного скетча складається з 2 алгоритмів:

- Скетч: на вхід бере вимір біометричних данних x та елемент адитивної групи s; на вихід подається скетч c.
- Реконструкція різниці: на вхід бере два різних скетча c і c'; на вихід подає різницю адитивних елементів, на яких створювались скетчі $\Delta s = s' - s$, за умови що заміри біометрики є достатньо близкими відностно деякої метрики.

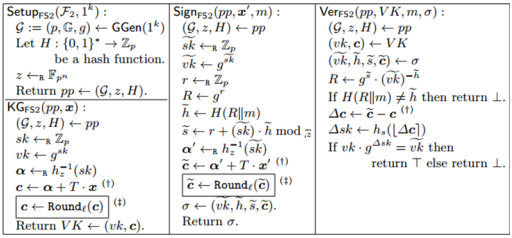

Рис. 1. Алгоритм нечіткого цифрового підпису [1]

Запропонований алгоритм було реалізованно за допомогою Java бібліотек cc.redberry [2] та Bouncy Castle [3]. Реалізованна схема нечіткого підпису показала здатність цього алгоритма працювати на штучно згенерованих вимірах біометрики.

Список літератури

[1] Kenta Takahasi, Takahiro Matsuda et. al., *Signature Schemes with Fuzzy Private Key*, https://eprint.iacr.org/2017/1188.

[2] Java-бібліотека cc.redberry, https://rings.readthedocs.io/en/latest/index.html

[3] Java-бібліотека Bouncy Castle, https://www.bouncycastle.org/

Автор

Валентина Олександрівна Чернякова — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *valushechka1996@ukr.net*

Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом

Г. М. Шевченко, Д. А. Аветісян

У роботі розглядається задача оцінювання параметру дифузії випадкового поля, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) + \sigma \dot{W}(x), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де $\dot{W}$ - це білий шум, при $d = 1, 2, 3$. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(t,x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(t-s, x-y) W(dy) ds, \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d,$$

де функція $G(t,x) = (2\pi t)^{(-d/2)} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$. Поле спостерігається на сітці

$$D_n = \{(i_1\delta, \ldots, i_d\delta), i_1, \ldots, i_d \in \{-n, \ldots, n\}\}.$$

Побудовано оцінку параметру σ:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(2n)^d v^2} \sum_{x_k \in D_n} u(t, x_k)^2,$$

де

$$v^2 = E(u(t,x))^2 = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{(2\pi(s_1+s_2))^{d/2}} ds_1 ds_2 = \begin{cases} -\frac{4(-2+\sqrt{2})t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}, & d=1 \\ \frac{t\ln 2}{\pi}, & d=2 \\ \frac{2(-1+\sqrt{2})\sqrt{t}}{\pi^{3/2}}, & d=3 \end{cases}$$

Теорема 1. $\hat{\sigma}^2$ є конзистентною оцінкою параметра σ при $n \to \infty$, тобто $\hat{\sigma}^2 \to \sigma, n \to \infty$, м.н.

Список літератури

---

[1] A. Ciprian, *Tudor Analysis of Variations for Self-similar processes.* Switzerland: Springer International Publishing, 2013.

Автори

Георгій Михайлович Шевченко — д.ф-м.н., професор, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *zhora@univ.kiev.ua*

Діана Арутюнівна Аветісян — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *diana.avetisian2017@gmail.com*

Секція «Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз»

Модифікація алгоритму Ерлі

В. Н. Врублевський, О. О. Марченко

Алгоритм Ерлі [1] – один з найбільш ефективних загальновідомих алгоритмів розбору послідовностей для вільно-контекстних граматик. В найгіршому випадку його часова складність алгоритму `n^3` (де `n` - це довжина речення для розбору).

В данному дослідженні ми пропонуємо модифікацію даного алгоритму, використовуючи підхід "повернення назад". У випадках, коли потужність граматики дуже велика, фактичний час класичного алгоритму може бути досить великий; ми ж розробили евристику, яка зменшує час розбору коректної послідовності на порядок (базуючись на результатах тестування).

Основна ідея підходу полягає у тому, що, на відміну від алгоритму Ерлі, під час розбору і-тої лексеми ми не пробуємо додавати до розгляду всі можливі продукції на цьому кроці, а робимо це доти, доки не з'явиться продукція з нашою наступною лексемою. В такому випадку ми переходимо до наступного етапу алгоритму. Якщо дана гілка виводу була не продуктивною, ми рекурсивно повертаємося на попередні етапи та продовжуємо послідовний аналіз продукцій.

Алгоритми розбору на основі контекстно-вільних граматик відіграють значну роль у реалізації компіляторів та аналізі природньої мови. У випадках природньої мови, коли кількість продукцій дуже велика, навіть евристика алгоритму на практиці значно покращує фактичний час розбору. Тестуючи дану евристику на граматиці потужністю 2000 правил фактичний час розбору в середньому зменшився у 10 разів.

Список літератури

[1] J. Earley, "An Efficient Context-Free Parsing Algorithm". *Communications of the ACM*, no. 13, pp. 94-102, 1970.

Автори

Віталій Натанович Врублевський — студент 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *vitaliyvrublevskiy@gmail.com*

Олександр Олександрович Марченко — професор, доктор фізико-математичних наук, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *Rozenkrans17@gmail.com*

Розробка та застосування системи паралельних обчислень PARCS Python3 для хмарних обчислень

М. І. Голубаха, А. М. Коробка

ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивні Керуючі Системи) – технологія програмування, що забезпечує процес розробки і реалізації паралельних алгоритмів, заснована на концепції *керуючого простору* – динамічного графу для опису логічної та комунікаційної структури задачі.[1]

Ми розробили систему паралельних обчислень PARCS Python3 – удосконалення системи PARCS Python, що адаптована до новітніх версій мови Python, та підтримує роботу на платформах хмарних обчислень.

Система дозволяє передачу нових задач за допомогою веб-інтерфейсу та підтримує динамічне додавання обчислювальних ресурсів.

В якості платформи хмарних обчислень було використано Google Compute Engine. Авторами було розроблено та опубліковано Docker-образи для запуску системи обчислень на довільних платформах, що підтримують цю технологію. Крім того, було створено детальні інструкції для запуску системи і налаштування для роботи з Google Compute Engine.

Для оцінення системи було розроблено паралельну реалізацію класичного алгоритму кластеризації K-Means. Наведено результати тестування роботи алгоритму з використанням різної кількості обчислювальних ресурсів

Список літератури

[1] О. В. Дерев'янченко, *ПАРКС-JAVA система для паралельних обчислень на комп'ютерних мережах: Навчальний посібник для студентів факультету кібернетики*. Київ, 2011.

[2] О. В. Дерев'янченко, А. Ю. Хавро, "Застосування системи ПАРКС.NET та Amazon EC2 для хмарних обчислень", *Вісник Київського національного університету: Серія фізико-математичні науки*, 4, 2015.

Автори

Микита Ігорович Голубаха — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *hilobakho@gmail.com*

Анастасія Миколаївна Коробка — студентка 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *anastasiiakora205@gmail.com*

Порівняльний аналіз ефективності критеріїв визначення авторства

А. П. Євтушенко

Вступ. Атрибуція – дослідження тексту, на меті якого стоїть встановлення авторства або певних відомостей про автора, умов створення тексту тощо [1]. Атрибуцію розглядають як проблему виділення ознак і інтелектуального аналізу даних.

Формально до ознак, які використовуються в атрибуції, висувають наступні вимоги – масовість, стійкість, роздільна здатність [2]. Ідеальний критерій має однозначно розподіляти тексти на групи за автором, при чому має бути не контрольованим з боку автора на свідомому рівні та зберігати в усіх текстах одного автора деяке постійне відхилення.

Визначення роздільної здатності критеріїв. Найбільш поширеними статистичними ознаками для атрибуції тексту вважаються [3]:

- середня довжина речень;
- середня довжина слів;
- словниковий запас автора;
- частота використання знаків пунктуації;
- частота використання частин мови;
- частота вживання функціональних слів.

Представимо авторів як різні кластери, а тексти – як об'єкти кластеру і поглянемо на проблему з точки зору кластерного аналізу. Значення деякої ознаки для кожного автора характеризується двома параметрами – середнім і відхиленням. В такому випадку середнє можна представити як центр кластеру-автора, середню зовнішню кластерну відстань – як середню відстань від центру кластеру до центрів інших кластерів. Оскільки немає гарантії, що деякий текст автора не відхилятиметься значно від середнього, таке усереднення кластерної відстані застерігає від спотворення результату. Аналогічно, можна представити значення середньої внутрішньої відстані як середньоквадратичне відхилення.

Визначимо коефіцієнт якості класифікації критерію як $\sigma(W) = \dfrac{\Delta M(W)}{\Delta S(W)}$, де $\Delta M(W)$ – середнє значення відстані між авторами по критерію W, $\Delta S(W)$ – середнє значення відхилення по критерію W.

Порівнявши отримані значення, можна стверджувати, що з наведених вище критеріїв, найвищу роздільну здатність мають такі критерії, як довжина речення, словниковий запас, частота вживання коми, двокрапки та крапки з комою, відсоток вживання артиклів та використання функціональних слів та артиклів.

Висновки. Проаналізовано найбільш популярні критерії авторства, визначено їх особливості для атрибуції текстів англійською мовою. Запропоновано універсальний коефіцієнту роздільної здатності, який дозволяє зробити порівняльний аналіз критеріїв, абстрагувавшись від природи характеристики тексту. Запропонований підхід до оцінки роздільної здатності ознак тексту показав на практиці свою ефективність,а отже може застосовуватися в подальших дослідженнях характеристик текстів та авторської атрибуції в цілому.

Список літератури

[1] P. Juola et al, "Authorship attribution". In *Foundations and Trends in Information Retrieval*, vol. 1, no. 3, pp. 233-334, 2008.

[2] Y. Zhao, J. Zobel, "Searching with style: Authorship attribution in classic literature". *Proceedings of the thirtieth Australasian conference on Computer science*, vol. 62, pp. 59-68, 2007.

[3] E. Stamatatos, "A survey of modern authorship attribution methods". *Journal of the Association for Information Science and Technology*, vol. 60, no. 3, pp. 538-556, 2009.

Автор

Анна Павлівна Євтушенко — студентка 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *anna.yevtushenko00@gmail.com*

Багатофазне тактування у розподілених обчислювальних системах

П. П. Коляденко

Багатофазне тактування широко застосовується у розподілених обчислювальних системах для організації ефективних паралельних обчислень. Розглянуто модель синхронного обміну у децентралізованій обчислювальній системі з об. вузлами у вузлах регулярної гратки, що з'єднані напівдуплексними каналами зв'язку. Модель також може бути застосована у сфері комунікацій.

Було отримано результати для щільних пакувань до 3 вимірів. Окремо знайдені маштабовні алгоритми тактування для кубічних сіток скінчених розмірностей.

Знайдені оцінки для необхідної кількості тактів.

Оцінка максимальної кількості тактів:

$$|V|, \tag{1}$$

де V – множина вузлів.

Оцінка мінімальної кількості тактів:

$$\max_{i \in V} E_i + 1, \tag{2}$$

де E_j – степінь вершини j графа зв'язку.

Тактування для кубічної гратки у n-вимірному просторі:

$$Beat(\vec{x}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i * i) \ \% \ (2n + 1). \tag{3}$$

Список літератури

[1] J. Cowley, *Communications and Networking*. Springer-Verlag London, 2013.

[2] Б. Г. Айрапетян, *Різновиди розподілених обчислювальних систем. Архітектурні особливості. Переваги та недоліки*. Системи обробки інформації, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, 2013

Автор

Павло Павлович Коляденко — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *pavlo.koliadenko@knu.ua*

Узагальнення алгоритму триангуляції Делоне на випадок простого полігону

К. О. Коровай

Триангуляція є однією із базових структур обчислювальної геометрії, широко застосовується в комп'ютерній графіці та геоінформаційних системах для моделювання поверхонь та розв'язання просторових задач [1].

Постановка задачі: за заданим набором точок площини, що є вершинами деякого простого многокутника, необхідно побудувати планарний граф, який розбивав би площину на трикутники і зовнішню нескінчену фігуру [1].

В загальному розумінні триангуляція Делоне є опуклою. У роботі запропоновано узагальнення методу побудови тріангуляції Делоне для простого многокутника.

Ідея полягає у накладенні додаткових обмежень: триангуляція будується таким чином, щоб усі ребра полігону проходили по ребрам триангуляції. Для цього вводяться так званні структурні лінії – ребра заданого многокутника, що не належать його опуклій оболонці. Ці ребра вважаються фіксованими. Після побудови триангуляції Делоне будь-яким з існуючих методів [2], необхідно виконати вставку структурних ліній, при необхідності розбиваючи існуючі ребра і трикутники в точках перетину структурних ліній з ребрами триангуляції та перебудовуючи трикутники, для яких порушується умова Делоне (за винятком фіксованих). Останнім етапом є класифікація всіх трикутників триангуляції і видалення тих, що лежать поза заданим многокутником.

Особливістю запропонованого підходу є можливість триангуляції Делоне будь-якої поверхні. Враховується, що многокутник може бути неопуклий і, більше того, містити «діри» (їхні ребра також вважатимуться структурними лініями).

Також цей метод може бути узагальнений на довільну розмірність використанням (n-1)-вимірних гіперплощин в якості структурних ліній.

Список літератури

[1] А. В. Скворцов, Н. С. Мирза, *Алгоритмы построения и анализа триангуляции.* Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006.

[2] Н. Н. Голованов, *Геометрическое моделирование.* М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002.

Автор

Карина Олегівна Коровай — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *karina.korovai@gmail.com*

Застосування штучних нейронних мереж для експоненціальної декомпозиції складних релаксаційних спектрів зі значним шумовим фоном

І. В. Ліщук, В.В. Ільченко, В.Я. Опилат, С.В. Тищенко

Процеси релаксації – досить поширені природні явища у фізичних системах. Нас цікавлять лише ті з них, які відбуваються за експоненціальним законом. У кращому випадку релаксаційний сигнал є незашумленою моноекспонентою, у гіршому – суперпозицією сигналів від кількох джерел зі значною шумовою складовою. Ми намагаємось розробити комплекс взаємодоповнюючих методів, серед яких зокрема цифрова Wavelet-фільтрація сигналу, експоненціальна апроксимація багатокомпонентних релаксаційних кривих на основі статистичних властивостей експериментальних даних. Дана робота – це спроба доповнити приведений перелік методом штучних нейронних мереж (ШНМ), а саме – вибрати оптимальну топологію мережі, алгоритми її навчання для адаптації до сформульованих задач.

Для виконання досліджень були створені 2 оригінальні програмні продукти. Перший з них реалізує алгоритм навчання ШНМ за методикою "з учителем". За базову було взято архітектуру багатошарового повнозв'язного перцептрону з пошаровою топологією 1000-200-40-8-2 і функціями активації tanh-tanh-tanh-softmax. Вхідний сигнал моделювався як сума експонент $S = C_1 * e^{-t/\tau_1} + C_2 * e^{-t/\tau_2} + ...$ з додаванням або білого гаусівського шуму, або шуму з випадковим рівномірним розподілом амплітуди. Розміри тренувального набору – 40000 варіантів вхідних сигналів – і валідаційного – 10000 – забезпечили компроміс між затратами часу на обчислення та якістю навчання.

Інший програмний продукт був розроблений для проведення різнопланових тестувань ШНМ. Результати тестувань для випадку незашумлених вхідних сигналів засвідчили, що теперішня її пятишарова архітектура дозволяє визначати кількість експоненційних складових у сигналі (при $\tau_1/\tau_2 > 2$) і величини – C і τ – одноекспонентних сигналів з відносною похибкою $\approx 0.02\%$. За присутності в сигналі 100% шумової компоненти (амплітуда $= C_1 + C_2$) результати дещо скромніші – (при $\tau_1/\tau_2 > 3$) і величини – C і τ – одноекспонентних сигналів з відносною похибкою $\approx 0.05\%$. Як бачимо, мережа демонструє високу стійкість до амплітуди шумової компоненти.

Автори

Ігор Володимирович Ліщук — аспірант 3-го року навчання, Інститут високих технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *lishchuk.ihor@gmail.com*

Володимир Васильович Ільченко — доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут високих технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *ilch2007@ukr.net*

Віталій Якович Опилат — кандидат фізико-математичних наук, доцент, Інститут високих технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *opylat@gmail.com*

Сергій Володимирович Тищенко — аспірант 3-го року навчання, Інститут високих технологій, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *sergtyshch@gmail.com*

Розробка формальної мови квазіарних функцій та предикатів

Т. А. Мамедов

Сучасні системи верифікації програмного коду тим чи іншим чином засновані на логіці першого порядку, синтактико-семантична схема якої зумовлює невідповідність між номінативною природою формул і вибором як базових тотальних n-арних предикатів. Для подолання даної невідповідності запропонована композиційно-номінативна логіка [1].

В даній роботі пропонується формальна мова, яка дозволить провести верифікацію програмного коду. Особливістю мови, на відміну від Boogie [2], є можливість підримки часткових функцій та предикатів, і задавати такі композиції, як суперпозиція.

Для задання синтаксису, використовується розширена форма Бекуса-Наура [3]. Запропоновано синтаксичні правила для конструкцій мови. Наприклад, суперпозиція задається наступним чином:

```
sfunc ::= 'func' char {char} ':' fn '*' '[' fn {',' fn} ']' ':' fnv
```

Парсер та лексичний аналізатор написаний мовою Python, за допомогою бібліотеки PLY [4].

У найближчий час плануються експерименти з верифікації програм, які використовують квазіарні відображення.

Список літератури

[1] M. Nikitchenko, V. Tymofieiev, "Satisfiability in composition-nominative logics", *Open Computer Science*, 2(3), pp. 194-213, 2012

[2] Boogie-docs.readthedocs.io. *The Boogie intermediate verification language – Boogie IVL 2.0 documentation.* [online] Available at: https://boogie-docs.readthedocs.io/en/latest/ [Accessed 30 Mar. 2019].

[3] R. E. Pattis, *EBNF: A Notation to Describe Syntax. 2nd ed.*. California, pp. 1-19.

[4] D. M. Beazley,*PLY (Python Lex-Yacc)*. [online] Dabeaz.com. Available at: http://www.dabeaz.com/ply/ply.html [Accessed 30 Mar. 2019].

Автори

Тогрул Алірзайович Мамедов — аспірант 3-го року навчання, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *tohrul@ukr.net*

Формування наборів великих тестових данних

О. Г. Марголін

Для вирішення завдань розпізнавання текстів є величезна кількість різноманітних методів і підходів [1]. У більшості методів закладено механізм навчання [2], а в подальшому і тестування по навальній вибірці. Тут виникає проблема пошуку таких наборів даних (англ. dataset [3]) для поставленої задачі. Основні проблеми:

а) Пошук набору даних для певної «специфічної» тематики, що виникає під час постановки задачі.
б) Пошук набору даних українською мовою.
в) Пошук набору даних в тому форматі виводу і структурі, що є задовільною для використаних методів.

Ставиться задача розробки програмного модуля, що зможе будувати великі набори текстових даних з відкритих ресурсів (або тих до яких мається доступ) і зберігати дані в будь яких запрограмованих формах та структурах. На вході програми маємо базове посилання (або список посилань) на ресурс, а також набір правил за якими буде проходити збір даних. Посилання може буде на будь який web-ресурс. Це може буде великий тематичний портал, форум, web-версія соціальної мережі, або «мессенжера». Можливо задати «авторизаційні» права для доступу до сторінки. На виході маємо структурований набір текстових масивів в єдиному форматі (json), помічений міткою теми та готовий для обробки. Система складатися з таких модулів:

а) Модуль отримання інформації.
б) Модуль виділення інформації по заданих шаблонах.
в) Модуль ланцюгового збору інформації.
г) Модуль збереження даних.
д) Модуль розпаралелення даних та прихування від ddos.

Система дозволяє формувати власні набори текстових даних за тими тематиками, які неможливо знайти в відкритому доступі.

Список літератури

[1] С. І. Репік, О. С. Штогріна, "Методи розпізнавання тексту", *Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції «Перспективи телекомунікацій»*, 2016.

[2] В.И. Шабанов А.М. Андреев, "Метод классификации текстовых документов, основанный на полнотекстовом поиске", *Труды первого российского семинара по оценке методов информационного поиска*, 2003.

[3] *Mashine Learning Repository*. https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets.html.

Автор

Олександр Геннадійович Марголін — аспірант 2-го курсу, факультет ком'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *ag.margolin@gmail.com*

Локалізація точки методом бінарного розбиття простору

А. І. Перепелиця

Проблема локалізації точки є однією з фундаментальних для обчислювальної геометрії [1].

Зокрема, просторова постановка задачі звучить так:

> *Нехай задано підрозбиття $\mathcal{S}$ простору E^3 з N регіонами, H гранями та n вершинами. Необхідно для заданої точки знайти такий регіон з $\mathcal{S}$, якому вона належить.*

Наразі існує багато алгоритмів для пласкої локалізації, проте з розвитком 3D-технологій все більше уваги приділяється її тривимірному варіанту, а у штучному інтелекті існує потреба в алгоритмах для більших розмірностей.

У роботі представлено алгоритм локалізації точки в опуклому підрозбитті.

Ідея полягає в побудові структури під назвою *Дерево бінарного розбиття простору* (англ. *BSP-tree*) шляхом послідовного поділу простору на дві частини. Внутрішніми вузлами дерева будуть частини простору, а листовими – одиничні регіони.

Ключовим моментом є той факт, що будь-які два опуклі регіони можна розділити гіперплощиною так, щоб вони були по різні сторони від неї. Таким чином, на кожному кроці кількість регіонів в отриманих вузлах буде зменшуватися.

Основними перевагами є:

а) відносна простота, чого бракує існуючим рішенням;

б) застосовність до простору будь-якої розмірності.

Список літератури

[1] *Problem 13: Point Location in 3D Subdivision.* https://cs.smith.edu/ jorourke/TOPP/P13.html [Дата звернення 9 квітня 2019 р.]

[2] B. Chazelle,d M. Sharir, "An Algorithm for Generalized Point Location and Its Applications", *J. Symbolic Computation*, 10, pp. 281-309, 1990.

[3] C. D. Toth. "Binary Space Partitions: Recent Developments", *Combinational and Computational Geometry. MSRI Publications*, 52, pp. 529-556, 2005.

Автор

Антон Ігорович Перепелиця — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *mailanton2@gmail.com*

Construction of the evaluation function and the task of classification

B. O. Pylypchenko

Purpose: to determine the role of the estimation function. Explore the methods of constructing an estimation function. Solve the problem of classification. Introduce an algorithm for solving the problem of finding a half-plane with the largest number of points.

Actuality of work: In connection with the accelerated development of computer technologies, industries, connected to artificial intelligence, are becoming more and more relevant. One of the methods for creating artificial intelligence is heuristic programming. This method is based on the use of an estimation function.

Considered theoretical knowledge:

1) some information from graph theory;
2) trees of the game;
3) some information from analytic geometry;
4) evaluation function.

Considered practical knowledge:

1) search for a linear estimation function;
2) bringing the nonlinear estimation function to a linear estimation function;
3) the task of classification;
4) an algorithm for solving the problem of finding a half-plane with the largest number of points;
5) application of estimation functions.

It was found that the criterion "Number of dots in the prevailing half-space" itself in many cases can not be successfully used in practice. The solution that can be successfully used in practice finds the criterion "Number of dots in the prevailing half-space and the projection of the center of masses in the current straight line".

References

[1] J. Tou, R. Gonzalez, *Principles of pattern recognition*. Boston: Addison-Wesley Pub. Co., 1978.

[2] А. Д. Александров, Н. Ю. Нецветаев, *Геометрия*. БХВ-Петербург, 2010.

[3] P.Jackson, *Introduction to expert systems*. Boston: Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1998.

Author

Bohdan Olegovich Pylypchenko — student of the 10th form of School of I-III degree No. 206 named after L. Kurbas, Kyiv, Ukraine; E-mail: *anotherusuallaccaunt@gmail.com*

Формування датасету юридичних документів, використовуючи багаторівневий парсер на основі стеку

О. М. Покотило, О. О. Марченко

Дані, на яких відбувається машинне навчання, є одним з найбільш важливих елементів для створення успішної моделі. Коректність та повнота данних відіграють вирішальну роль при тренуванні моделі. Перед нами постала задача створення якісного датасету структурованих даних на базі юридичних документів Law Insider [1].

При його формуванні виникли проблеми у зв'язку з наявністю в юридиичних документах великої кількості різнорівневих однотипних елементів, таких як: різноманітні типи нумерованих, маркованих списків та інших структур.

Ідея нашого розв'язку базується на основі ідеї класичного стеку [2] з певним удосконаленням. Ми розробили багаторівневий стек та правила, які сигналізують про початок, кінець та зв'язок елементів структури, наприклад нумерованого списку. Ці сигнали ми використовуємо для того, щоб розуміти чи нам потрібно "піднятися"на вищий рівень чи "опуститися"вниз по ієрархії.

Ми протестували даний алгоритм на близько 5-ти тисячах документів та змогли успішно розібрати близько 92% даних. Проблема виділення структурованих даних з неструктурованих є дуже актуальною в наш час, оскільки все більше текстових даних оцифровується та можуть бути використані для різноманітного аналізу.

Список літератури

[1] *Law Insider Free contract database.* https://www.lawinsider.com/.

[2] D. Knuth, *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, 1997.

Автори

Ольга Максимівна Покотило — студентка 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка; E-mail: *olha.pokotylo@gmail.com*

Олександр Олександрович Марченко — професор, доктор фізико-математичних наук, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *Rozenkrans17@gmail.com*

Система автоматичного визначення артиклів в текстах англійською мовою

О. В. Радчикова

Вступ. Проблема правильного визначення артикля в англійській мові є однією з найбільш розповсюджених у правописі. Найчастіше вона виникає при перекладі з мов, які не містять артиклів (таких, як українська чи японська), проте може виявлятись і у повсякденному житті англомовних людей.

Використання статистичних підходів та методів машинного навчання дає змогу автоматично визначати артикль за умови коректного аналізу та детального дослідження особливостей їх використання. Для коректного визначення артикля в більшості випадків достатньо аналізувати лише найближчий контекст.

Дослідження артиклів. З дослідження правил використання артиклів в англійській мові можна виділити деякі узагальнення:

- по-перше, кожен іменник має один з трьох видів артиклів: означений, неозначений, нульовий;
- по-друге, артикль може знаходитись безпосередньо перед відповідним іменником, а також іменник з артиклем можуть бути відокремлені між собою іншими словами. Артикль, іменник та розташовані між ними проміжні слова утворюють іменникове словосполучення;
- по-третє, до багатьох іменників може бути застосовано різні артиклі в залежності від смислового контексту. Проте, також, серед правил можна виділити такі, що для певних слів або груп слів можуть однозначно встановити певний артикль.

Зазвичай людина (експерт) обирає артикль, керуючись повним текстом, а тому може використовувати повний контекст. У випадку створення програмної системи такий підхід є непродуктивним та неможливим. Тому для аналізу вживання артиклів потрібно користуватися меншим контекстом.

В статті "Automated Postediting of Documents", Kevin Knight та Ishwar Chander [1] проводять експеримент, в якому знаходять точність визначення артиклів людьми (експертами) залежно від наявності різного контексту. В даному експерименті означений та неозначений артиклі в тексті замінюють на пропуск, в який учасник повинен поставити артикль за власним розсудом. Таким чином нульовий артикль не розглядають. В експерименті використовують три види контексту: іменникове словосполучення, іменникове словосполучення, з додаванням двох слів перед та після нього та повний контекст.

За наявності повного контексту людина відтворює від 94 до 96 відсотків артиклів. У випадку аналізу лише іменникового словосполучення людина відтворює від 79 до 80 відсотків артиклів. У випадку аналізу іменникового словосполучення, з додаванням двох слів перед та після нього, – від 83 до 88 відсотків. Такий результат свідчить про відсутність значного смислового навантаження у використанні артиклів. Це, в свою чергу, вказує на те, що задачу створення системи автоматичного визначення артиклів можна розв'язати з високою точністю.

Розробка автоматичної системи визначення артиклів. В експериментальній розробці системи автоматичного визначення артиклів було використано три алгоритми машинного навчання: логістичну регресію, дерева прийняття рішень, нейронні мережі.

Логістичну регресію було обрано, оскільки даний алгоритм є класичним методом розв'язку задачі кластеризації [2]. Наступний алгоритм, дерева прийняття рішень, обрано для порівняння результатів роботи даної розроблюваної системи з результатами інших робіт. Останній алгоритм, нейронні мережі, обрано через те, що він має велику кількість параметрів, які, у свою чергу, надають можливість краще пристосувати модель до особливостей даних.

За допомогою даних алгоритмів утворено п'ять моделей:

- логістична регресія з коефіцієнтом регуляризації 0.03;
- дерева прийняття рішень з максимальною глибиною тисячу вузлів;
- нейронні мережі з прихованим шаром зі ста нейронів з коефіцієнтом регуляризації 0.1;
- нейронні мережі з прихованим шаром з тисячі нейронів з коефіцієнтом регуляризації 0.1;
- нейронні мережі з двома прихованим шарами, кожен з яких складався зі ста нейронів, з коефіцієнтом регуляризації 0.1.

У процесі розробки системи автоматичного визначення артиклів було розглянуто декілька наборів характеристик. Загальний список використаних характеристик складається з: наступного за артиклем слова, головного іменника, довжини іменникового словосполучення, чи починається головний іменник з великої літери, частини мови наступного за артиклем слова, чи має наступне за артиклем слово форму найвищого ступеня порівняння, двох слів перед іменниковим словосполученням (утворюють дві характеристики), частин мови двох слів перед іменниковим словосполученням (утворюють дві характеристики).

Спершу було випробувано набір характеристик, який складався лише з перших двох описаних: слова наступного за артиклем та головного іменника (Dataset_Base). Далі, додано характеристики іменникового словосполучення: довжина іменникового словосполучення, чи починається головний іменник з великої літери, частина мови наступного за артиклем слова, чи має наступне за артиклем слово форму найвищого ступеня порівняння (Dataset_NP). В третьому випадку використано характеристики з першого набору, а також два слова перед іменниковим словосполученням та їх частини мови (Dataset_Near_NP). В останньому випадку було використано усі характеристики (Dataset_Full).

Для аналізу результатів було застосовано чотири оцінки якості моделей: accuracy, precision, recall, f1. Після оцінки якості моделей за обраними метриками отримуємо, що значення метрик майже не змінюються при переході з одного набору даних до іншого. Дещо більшу різницю у якості значення метрики показують переходи між моделями. Найгірший результат отримує логістична модель. Наступною за якістю іде модель дерев прийняття рішень. Найкращі результати демонструє модель нейронних мереж. До того ж можна побачити, що результати роботи системи майже не відрізняються при застосуванні різних внутрішніх шарів нейронної мережі.

Кінцеве значення метрик отриманих на найбільшому наборі даних Dataset_Full, отриманих за допомогою алгоритму нейронної мережі з двома прихованим шарами, кожен з яких складався зі ста нейронів складає: accuracy – 92 відсотки, precision – 77 відсотків, recall – 79 відсотків, f1 – 78 відсотків.

Висновки. Система автоматичного визначення артиклів отримала результати кращі ніж группа людей за метрикою accuracy, 92 і 79-80 відповідно. Це свідчить про те що в даному випадку людина може спиратись на суб'єктивні дані на відміну від автоматичної системи. Таким чином автоматична система може з високими показниками якості визначати артиклі в тексті при належному тренуванні.

Список літератури

[1] K. Knight, I. Chander, *Automated Postediting of Documents.* https://pdfs.semanticscholar.org/d739/9e6914bd7b341f565275816022b1e97f1564.pdf

[2] D. Jurafsky, J. H. Martin, *Speech and Language Processing.* https://web.stanford.edu/ jurafsky/slp3/ed3book.pdf

Автор

Олена Валеріївна Радчикова — студентка 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна;; E-mail: *olena.radchykova@gmail.com*

Застосування технології MPI для прискорення дії алгоритмів пошуку патерна в тексті на прикладі реалізації алгоритму FSBNDM

Р. В. Савченко

У комп'ютерних науках пошук підрядка в тексті являє собою перевірку заданої послідовності символів на наявність елементів патерна. Збіг повинен бути точним. Результатом пошуку підрядка повинна бути позиція розташування шуканого шаблона у вхідній послідовності символів. Задача є актуальною в усіх випадках, коли є потреба швидкого дослідження певної структури даних на наявність в ній потрібного патерна.

MPI - інтерфейс передачі повідомлень між процесами, що застосовується для розробки паралельних програм, які ефективно використовують ресурси процесора, на якому виконуються.

Було реалізовано модифікацію алгоритму FSBNDM (Forward Simple Backward Nondeterministic Dawg Matching algorithm), який є оптимальним для використання при розмірі алфавіту більше 16 символів та довжині патерна від 32 до 256 символів.

У результаті дослідження було отриимано результати, наведені в наступній таблиці. Тестування виконувалось на комп'ютері з 2-ядерним 4-потоковим процесором.

Таблиця 1 - Порівняння швидкодії реалізованих алгоритмів

Розмір в символах		Час виконання (мс)	
Текст	Патерн	FSBNDM	FSBNDM з MPI
2,803,200	3	2,451	939
700,800	3	472	200
700,800	14	391	41

Бачимо, що застосування MPI дає суттєвий приріст швидкості роботи програми. Також технологія може бути застосована і з іншими алгоритмами.

Список літератури

[1] M. J. Quinn, *Parallel Programming in C with MPI and OpenMP*. Tata McGraw Hill Publications, 2003

[2] S. Faro, T. Lecroq, "The Exact Online String Matching Problem: a Review of the Most Recent Results". *ACM Computing Surveys*, vol. 45, iss. 2, article no. 13, 2013.

Автор

Роман Вікторович Савченко — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: *rv.sav.ua@gmail.com*

Переправи. Графи ворожнечі

В. О. Шмонько

Дана робота присвячена дослідженню і узагальненню задачі, яка виникла більше, ніж 1000 років тому. Тоді Алкуїн Флакк Альбін запропонував класичну головоломку про вовка, козу і мішок капусти, яких треба переправити на інший берег річки, використовуючи човен з одним вільним місцем. В цій роботі присутній опис всіх можливих конфігурацій конфліктів персонажів для малої кількості місць у човні.

У цій роботі розлядаються класичні задачі на переправу, вводиться поняття степені конфліктності графа та класифікація графів виходячи з цього означення.

Метою даної роботи є опис конфігурацій персонажів та їх конфліктів, які можна перевезти в човні зі скінченною кількістю місць.

У першому розділі роботи навдений приклад класичної задачі на перевезення (задачі Алкуїна), введені означення графа ворожнечі та степені конфліктності графа ворожнечі і наведено означення вершинного покриття і мінімального вершинного покриття графа. Також поділено графи на два типи та наведено приклади цих типів графів для будь-якої степені конфліктності. Окрім того сформульвані та виведені лема про степінь конфліктності графа і лема про ізольовані вершини.

У другому розділі роботи описані всі можливі графи ворожнечі, які можна перереправити у човні з одним чи двома вільними місцями, і показано як саме переправляти ці графи. Також доведено, що всі інші графи ворожнечі не можна переправити в цих човнах.

Автор

Владислава Олегівна Шмонько — учениця 11 класу, ліцей №208, Київське територіальне відділення МАНУ, Київ, Україна; E-mail: *vlada.shmonko2002@gmail.com*

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Матеріали XVII Міжнародної
науково-практичної конференції

«Шевченківська весна – 2019»

квітень 2019 р., м. Київ, Україна

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Proceeding of XVII International
Scientific – Practical Conference

«Shevchenkivska Vesna – 2019»

April 2019, Kyiv, Ukraine