

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

**Матеріали XVIII Міжнародної
науково-практичної конференції**

«Шевченківська весна – 2020»

квітень 2020 р., м. Київ, Україна

Taras Shevchenko National University of Kyiv

**Proceeding of XVIII International
Scientific – Practical Conference**

«Shevchenkivska Vesna – 2020»

April 2020, Kyiv, Ukraine

Програмний комітет

Анісімов Анатолій Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, декан факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Безущак Оксана Омелянівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан механіко-математичного факультету

Капустян Олена Анатоліївна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, заступник декана з наукової та міжнародної роботи факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Мішура Юлія Степанівна – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики

Ральченко Костянтин Володимирович – доктор фізико-математичних наук, доцент, заступник декана з наукової роботи механіко-математичного факультету

Харитонов Олексій Михайлович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник декана з навчальної роботи механіко-математичного факультету

Організаційний комітет

Білоножко Аліна Вадимівна – голова студентського парламенту факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Боднарчук Ірина Миколаївна – кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник

Зубченко Володимир Петрович – кандидат фізико-математичних наук, голова Ради молодих вчених механіко-математичного факультету

Верстка: Аветісян Д. А., Навара Г. В.

Секція «Математика, статистика та механіка»

Оцінювання параметру дифузії стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом

Д. А. Аветісян, К. В. Ральченко

У роботі розглядається задача оцінювання параметру дифузії випадкового процесу, що є розв'язком стохастичного диференціального рівняння теплопровідності

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta u\right)(t, x) = \sigma \dot{B}_x^H, t \in [0, T], x \in \mathbb{R},$$

де $B^H = \{B_x^H, x \in \mathbb{R}\}$ — це дробовий броунівський рух. Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$u(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(t-s, x-y) dB_y^H ds, t \in [0, T], x \in \mathbb{R},$$

де функція G — це функція Гріна, визначена наступним чином $G(t, x) = (2\pi t)^{-1/2} \exp(-\frac{|x|^2}{2t})$.

Теорема 1.

1. Для фіксованого $t \in [0, T]$ випадковий процес $u(t, \cdot)$ є стаціонарним.
2. Для фіксованого $t \in [0, T]$ випадковий процес $\{u(t, x), x \in \mathbb{R}\}$ є ергодичним.

Виходячи з доведених властивостей, було побудовано оцінку параметра σ за спостереженнями процесу u на сітці $D_n = \{i\delta, i \in \{-n, \dots, n\}\}$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2nv^2} \sum_{i=-n}^n u(t, i\delta)^2,$$

де

$$v^2 = \frac{t^{H+1} 2^{H+1} (2^H - 1)}{\sqrt{\pi} (H+1)} \Gamma\left[H + \frac{1}{2}\right].$$

Теорема 2. $\hat{\sigma}^2$ є строго консистентною оцінкою параметра σ при $n \rightarrow \infty$, тобто $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma, n \rightarrow \infty$ м.н.

Теорема 1 та 2 є узагальненням на дробовий випадок результатів, отриманих у статті [2] для аналогічного рівняння з білим шумом.

Список літератури

- [1] K. Kubilius, Y. Mishura, K. Ralchenko, Parameter Estimation in Fractional Diffusion Models – Springer International Publishing, 2017.
- [2] D. Avetisyan, G. Shevchenko, Estimation of diffusion parameter for stochastic heat equation with white noise – Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, 3, 2018, P. 9–16.

Автори

Діана Арутюнівна Аветісян — аспірант, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: diana.avetisyan2017@gmail.com

Костянтин Володимирович Ральченко — д.ф.-м.н., доцент, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: ralchenko@univ.kiev.ua

Використання методу точкових джерел в задачі на власні числа рівняння Гельмгольца

А. Д. Архипенко

Дана робота з розділу механіки присвячується використанню методу точкових джерел в задачі на власні числа рівняння Гельмгольца. В першому розділі даної роботи проаналізовано літературні джерела [1, 2], в котрих визначено коло задач, де метод точкових джерел є перспективним. Аналіз літературних джерел показав, що питання про власні значення і власні функції для рівняння Гельмгольца в областях непростой конфігурації присвячено мало уваги. Тому мета моєї роботи полягає у демонстрації можливості та переваг застосування даного методу щодо вказаного типу задач.

У другому розділі дається опис класичного методу точкових джерел. Розділ третій присвячується методу регуляризації Тихонова, який застосовується для протидії зростанню числа обумовленості матриці при знаходженні розв'язку граничної задачі.

Надалі розглядаються дві задачі. Перша задача є тестовою, адже вона має відомий аналітичний розв'язок. Мова йде про пошук власних значень і власних функцій для кругової області з умовою Діріхле на контурі області. Як показали розрахунки, збіжність результатів аналітичного і чисельного розв'язків дуже хороша. Друга задача не є тривіальною крайовою задачею і присвячена пошуку власних коливань області у вигляді сегмента круга зі змішаними граничними умовами на контурі області. Результати розрахунку за методом точкових джерел порівнювалися з побудованим аналітичним розв'язком поставленої задачі.

Розглянуті задачі дозволяють зробити висновок, що метод точкових джерел є достатньо ефективним методом для визначення власних функцій граничної задачі для рівняння Гельмгольца в області складної форми та при змішаних граничних умовах. Враховуючи, що при розв'язку цих задач моделювання полів може проводитися за допомогою невеликої кількості точкових джерел, то слід визнати цей метод дуже економічним.

Список літератури

- [1] C.S. Chen, A. Karageorghis, Y.S. Smyrlis. The Method of Fundamental Solutions. – A Meshless Method. – Dynamic Publishers, 2008. – 338 p.
 - [2] Ю.А. Ерёмин, А.Г. Свешников. Математические модели задач нанооптики и биофотоники на основе метода дискретных источников // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47, № 2. – С. 269-287.
-

Автори

Архипенко Анастасія Денисівна — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: nastya.arkhipenko@gmail.com

Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболева

О. М. Атласюк

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbf{R}$ та параметри $\{m, n + 1, r, l\} \subset \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Розглянемо лінійну крайову задачу порядку r :

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t)y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \quad By = c, \quad (1)$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot) \in (W_p^n)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$, вектор $c \in \mathbf{C}^l$, лінійний неперервний оператор $B: (W_p^{n+r})^m \rightarrow \mathbf{C}^l$, а шуканою є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$.

Неоднорідній крайовій задачі (1) відповідає лінійний оператор

$$(L, B): (W_p^{n+r})^m \rightarrow (W_p^n)^m \times \mathbf{C}^l. \quad (2)$$

Для кожного номера $k \in \{1, \dots, r\}$ розглянемо сім'ю матричних задач Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t)Y_k^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y_k^{(j-1)}(a) = \delta_{k,j}I_m,$$

де $Y_k(\cdot)$ — шукана $(m \times m)$ — матриця-функція, O_m — нульова, I_m — одинична матриці, а $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера.

Позначимо через $[BY_k]$ числову матрицю розмірності $(m \times l)$, у якій j -й стовпчик є результатом дії оператора B на j -й стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Блочну прямокутну числову матрицю

$$M(L, B) := ([BY_0], \dots, [BY_{r-1}]) \in \mathbf{C}^{mr \times l}, \quad (3)$$

що складається з r прямокутних блоків-стовпців $[BY_k] \in \mathbf{C}^{m \times l}$, будемо називати *характеристичною* матрицею крайової задачі (1).

Отримано такі результати (див. [1]):

— доведено, що лінійний оператор (2) є обмеженим і фредгольмовим з індексом $mr - l$;

— доведено, що вимірності ядра та коядра оператора (2) дорівнюють вимірності ядра та коядра характеристичної матриці (3), відповідно;

— встановлено достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності крайових задач.

Список літератури

- [1] Атласюк О. М., Михайлець В. А. Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболева // Доп. НАН України — 2019, № 11. — С. 3–7.

Автори

Олена Миколаївна Атласюк — аспірантка 4-го курсу, відділ нелінійного аналізу, Інститут математики НАН України, Київ, Україна;

Методи оцінювання резерву збитків, що відбулися, але не заявлені

А. М. Буковецька

Кожна страхова компанія зобов'язана мати достатні резерви для покриття майбутніх позовів. Їхній розмір на будь-який момент має бути достатнім для виконання страховиком умов договору страхування. При обчисленні розміру резервів доволі складним завданням є розрахунок резерву збитків, що відбулися, але не заявлені. Необхідність створення IBNR обумовлюється ситуаціями, коли між виникненням страхової події і заявленням страховику про факту настання цієї події проходить деякий час.

В роботі розглянуто два основні методи оцінювання резерву збитків, що відбулися, але не заявлені: метод ланцюгових сходів та метод Борнхуеттера-Фергюсона. Методи об'єднані спільною ідеєю – спроектувати досвід подій минулих років на наступні роки подій.

Правильність оцінки IBNR важлива для страховика. Занижена оцінка може призвести до неспроможності виконання зобов'язань згідно умов договору, а завищена - призвести до неоптимального розподілу коштів страхової компанії, що в свою чергу зменшить дохід від інвестиційної діяльності.

Список літератури

- [1] Ian Stewart, In Pursuit of the Unknown – 17 Equations That Changed the World, 2012.
- [2] Томас Мак, Математика ризикового страхування, 2005.

Автор

Буковецька Андріяна Миколаївна — студентка 4-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: 19odri99@gmail.com

Оцінка відстані між дробовим броунівським рухом зі значенням індекса Хюрста $0 < H < 1/2$ і простором гауссових мартингалів на відрізьку

О. Л. Банна, Ф. А. Буряк, Ю. С. Мішура

Нехай $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ - дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$. Задача полягає в тому, щоб знайти найкраще наближення дробового броунівського руху гауссовими мартингалами виду $\int_0^t a(s) dW_s$, де $W = \{W_t, t \geq 0\}$ - вінерівський процес, $\mathcal{K} = \{a(s)\}$ - деякий клас функцій. Тобто, треба знайти

$$\inf_{a(s) \in \mathcal{K}} \max_{t \in [0, 1]} E(B_t^H - \int_0^t a(s) dW_s)^2.$$

В [1] було розглянуто різноманітні класи функцій, але в основному вивчався випадок, коли індекс Хюрста $1/2 < H < 1$. При цьому дробовий броунівський рух має довгу пам'ять, а з математичної точки зору, обчислення є більш простими. Також було розглянуто випадок $0 < H < 1/2$, але тільки для $\mathcal{K} = \{k = const\}$. У даній роботі ми розглядаємо клас функцій $\mathcal{K} = \{a(s) = s^\gamma, \gamma > 0\}$ і, як вже було сказано, $H \in (0, 1/2)$.

Ця робота є актуальною, оскільки дробовий броунівський рух може бути використаний для моделювання технічних та економічних феноменів, в біологічних та фізичних системах, тощо. Тому природно намагатися наблизити дробовий броунівський рух більш простими процесами.

Список літератури

- [1] Banna O., Mishura Yu., Ralchenko K., Shklyar S. Fractional Brownian Motion. Approximations and Projections: monograph. – London: Wiley-ISTE, 2019. – 288 p.
-

Автори

Банна Оксана Леонідівна — кандидат ф-м.н., асистент, економічний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: okskot@ukr.net

Буряк Філіпп Андрійович — студент 3-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: filippburiyak2000@gmail.com

Юлія Степанівна Мішура — д.ф-м.н., професор, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: myus@univ.kiev.ua

Схеми автентифікації на графах

К. Ю. Венедіктова

Означення 1. $h : V_1 \rightarrow V_2$ - множини вершин графа $G_1 = (V_1, \rho_1)$ в множини вершин графа $G_2 = (V_2, \rho_2)$ називається гомоморфізмом графів G_1 та G_2 , якщо для будь-яких двох вершин, суміжних в G_1 , їх образи при відображенні h суміжні в G_2 , тобто $(\forall u, v \in V_1)(u\rho_1v) \Rightarrow h(u)\rho_2h(v)$.

- Бієктивний гомоморфізм h такий, що будь-які дві вершини суміжні в G_1 \Leftrightarrow коли їх образи суміжні в G_2 , тобто $(\forall u, v \in V_1)(u\rho_1v \Rightarrow h(u)\rho_2h(v))$.

Означення 2. Гомоморфізм неорієнтованого графа $G_1 = (V_1, E_1)$ в неорієнтований граф $G_2 = (V_2, E_2)$ - це відображення $h : V_1 \rightarrow V_2 : \forall u, v \in G_1$ є дуга з u до v , з $h(u)$ також є дуга в $h(v)$, тобто $(\forall u, v \in V_1)(u, v) \in E_1 \Rightarrow (h(u), h(v)) \in E_2$

Означення 3. Ізоморфізм - бієкція $h : V_1 \rightarrow V_2$, при якій в орієнтованому графі G_1 з вершини u веде дуга у вершину $v \Leftrightarrow$ коли в орієнтованому графі G_2 з образу $h(u)$ вершини u веде дуга в образ $h(v)$ вершини v , тобто $(\forall u, v \in V_1)(u \rightarrow v \Leftrightarrow h(u) \rightarrow h(v))$.

В своїй роботі я проаналізувала протокол для реалізації задачі ізоморфізму підграфів, який полягає в наступному:
Є два графи G_1 та G_2 . Визначити, чи G_1 ізоморфний G_2 .

- Публічний ключ Аліси складається з двох графів G та G_2 . Приватний ключ Аліси - це підграф G_1 графа G_2 , та ізоморфізм $\phi : G \rightarrow G_1$.
- Для початку аутентифікації, Аліса обирає "проміжний" граф Λ , що є підграфом G_2 , та ізоморфне вкладення $\psi : G \rightarrow \Omega$, $\psi(G) = G_1$. Потім надсилає граф Ω Бобу, але вкладення $\psi : G \rightarrow \Omega$ і $\tau : \Omega \rightarrow G_2$ залишає собі.
- Боб обирає випадковий біт s та надсилає Алісі.
 - Якщо $s = 0$, Аліса надсилає Бобу вкладення ψ , і Боб перевіряє, чи ψ дійсно є вкладенням Γ в Ω .
 - Якщо $s = 1$, Аліса надсилає τ Бобу, і той перевіряє, чи τ дійсно є вкладенням Ω в G_2 .

Також я підбрала та перевірила деякі приклади графів, що задовільняють умовам протоколу.

Список літератури

- [1] Dima Grigoriev, Vladimir Shpilrain "Authentication schemes from actions on graphs, groups, or rings"

Автори

Ксенія Юрїївна Венедіктова — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: kсениа_венедиктова@yahoo.com

Оцінка частоти дихання під час сну за допомогою нейронних мереж

А. Гаврюшенко, К. Слюсаренко, І. Федорін

Порушення дихання під час сну може заважати та призводити до серйозних розладів, таких як апное (зупинка дихання). Для опису картини дихання зазвичай використовується варіативність частоти дихання. Найточнішими методами вимірювання частоти дихання є назальний тепловий датчик та еластичний грудний пояс. Наше дослідження полягало в побудові алгоритму для оцінки частоти дихання на основі сигналів, отриманих зі смарт-годинників.

Смарт-годинники мали стандартний акселерометр-датчик для реєстрації рухової активності та датчик фотоплетизмограми для реєстрації кров'яного потоку за допомогою зеленого випромінювання і фоторезистора. Розглядаючи сигнали на вікнах 10, 20 та 30 секунд, ми використовували варіацію акселерометру та частоту серцебиття IBI (inter-beat-intervals, час між сусідніми ударами серця), підраховану за допомогою алгоритму [1], як вхідні дані. Сама нейронна мережа складалася зі згорткової частини для виділення важливих рис та з одношарового двонаправленого рекурентного блоку BiLSTM (довга короткочасна пам'ять), який забезпечував синтез та узагальнення на основі однієї ночі. Згідно з дослідженням [2], ми використовували Глибоко роздільну згортку (Depthwise Separable Convolution) замість звичайної згортки як більш ефективне рішення. Наша модель забезпечує середньо-квадратичну похибку 2.2 (0.3) вдихів за хвилину, що є задовільною точністю для наших потреб. У майбутньому цей алгоритм може бути використаний на інших фітнес-девайсах.

Список літератури

- [1] P. Renevey et al., Validation of a wrist monitor for accurate estimation of RR intervals during sleep, Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc., 2013.
 - [2] Y. Guo, Y. Li, L. Wang, T. Rosing, Depthwise convolution is all you need for learning multiple visual domains, The Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence, 2019, pp. 8368–8375.
-

Автори

Анастасія Гаврюшенко — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: havriushenko.nasty@gmail.com

Костянтин Слюсаренко — керівник команди Emerging Tech, Samsung R&D Institute Ukraine, Kyiv, Ukraine; E-mail: k.slyusarenko@samsung.com

Ілля Федорін — член команди Emerging Tech, Samsung R&D Institute Ukraine, Kyiv, Ukraine; E-mail: i.fedorin@samsung.com

Обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку

М. Ф. Городній, В. П. Кравець

Нехай X - m -вимірний комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B - лінійні оператори в X ; I, O - одиничний та нульовий оператори в X .

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = F_n x_n + y_n, n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

у якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - шукана послідовність елементів простору X , $F_n = A, n \geq 1, F_n = B, n \leq 0$.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X .

Покладемо $X^2 = \{(x^{(1)}, x^{(2)})^t \mid x^{(1)}, x^{(2)} \in X\}$.

Тоді X^2 - $2m$ -вимірний банахів простір з покоординатними операціями і нормою $\|\bar{x}\|_* = \|x^{(1)}\| + \|x^{(2)}\|$. Якщо E, F, G, H - лінійні оператори в X , то, як і для випадку числових матриць, $T = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ задає лінійний оператор в X^2 .

Нехай $T_A = \begin{pmatrix} A + 2I & -I \\ I & O \end{pmatrix}$, $\sigma(T_A)$ - спектр оператора T_A , $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Справджуються такі теореми.

Теорема 1. Для того, щоб для різницевого рівняння (1) виконувалася умова 1, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови

(i) $\sigma(T_A) \cap S = \emptyset, \sigma(T_B) \cap S = \emptyset$;

(ii) $X^2 = X_-^2(T_A) \dot{+} X_+^2(T_B)$, тобто $X^2 \in$ прямою сумою $X_-^2(T_A)$ та $X_+^2(T_B)$.

Теорема 2. Нехай виконується умова (i) теореми 1, а також матриці операторів A, B мають жорданову нормальну форму у одному і тому ж базисі e_1, e_2, \dots, e_m (тут також суттєвий однаковий порядок базисних векторів для A і B). Тоді виконується умова (ii) теореми 1.

Ці результати детально викладені у роботі [1]. Про дослідження аналогічного питання для різницевого рівняння першого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта див. [2]. Випадок, коли матриці операторів A, B зводяться до діагонального виду, розглянуто в [3].

Список літератури

- [1] М.Ф. Городній, В.П. Кравець. Про обмежені розв'язки одного різницевого рівняння другого порядку // Нелінійні коливання — 2019. —т.22, №2. —С.196-201.
- [2] М.Ф. Городній, І.В.Гончар. Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом // Нелінійні коливання — 2017. —т.20, №1. —С.458-465.
- [3] М. Ф. Городній, В.П. Кравець. Обмежені розв'язки різницевого рівняння другого порядку зі стрибком операторного коефіцієнта // Допов. Нац. акад. наук Укр. 2019. №2. с.12-16.

Автори

Михайло Федорович Городній — професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: gorodnii@univ.kiev.ua

Вікторія Павлівна Кравець — аспірантка 1-го року навчання, спеціальність «математика», механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: toriavuk@ukr.net

Закони збереження в задачах динамічного руйнування

В. О. Гусак

В роботі досліджуються дві моделі руйнування скінченного лінійно пружного стрижня під дією пружної хвилі: з дисипацією енергії при руйнування та без дисипації енергії. Моделі будуються на відомих експериментальних дослідженнях Гопкінса та Кольського. Існування та поширення тріщини призводить до дифракції хвилі так і в свою чергу призводить до генерування вторинної хвилі. Досліджено збереження інтегралів повної механічної енергії та кількостей руху фрагментів зруйнованого стрижня. Показано, що для обох моделей руйнування рух спільного центру інерції зберігається. Опис явища базується на динамічній теорії руйнування. Модель сформульована у вигляді початково-граничної задачі для хвильового рівняння стрижня, що може роз'єднуватись на два фрагменти при виконанні розв'язком певних умов. Кожен з фрагментів, за тим же критерієм може також бути розділений при збереженні історії поширення хвилі в кожному з таких елементів. Задача розв'язана за методом Даламбера. Показано, що як до руйнування, так і після руйнування швидкість руху спільного центру інерції фрагментів залишається збереженими, незалежно від місця та моменту руйнування. Для моделі руйнування без дисипації енергії, справедливі теореми про збереження руху центру інерції та збереження повної механічної енергії для системи матеріальних точок. При руйнуванні, швидкості руху фрагментів змінюються стрибком. Руйнування відбувається за рахунок повної внутрішньої енергії стрижня.

Список літератури

- [1] J.D. Achenbach, "Extension of a crack by a shear wave *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 21, pp. 887-900, 1970.
- [2] R.M. Davies, *Stress waves in solids*, Cambridge University Press, 97 p., 1960.
- [3] L.D. Freund, "Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid *Journal of Elasticity* 2, pp. 341-9, 1972.
- [4] L.D. Freund, "The mechanics of dynamic shear crack propagation *Journal of Geophysical Research* 84, pp. 2199-209, 1979.
- [5] Н.А. Кильчевский, *Курс теоретической механики*, том II. Москва: Наука, 544 с., 1977.
- [6] В.З. Партон, *Механика разрушения: От теории к практике*, М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 240 с., 1990.
- [7] В.М. Пестриков, Е.М. Морозов, *Механика разрушения твердых тел*, СПб: Профессия, 320 с., 2002.
- [8] Г.П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*, М., 640 с., 1974.
- [9] Л.И. Слепян, *Механика трещин: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Л. И. Слепян, Ленинград: Судостроение, 296 с., 1970.*

Автори

Гусак Віталій Олександрович — студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: gusakw7@gmail.com

Maximum likelihood estimation for the drift parameters of Cox-Ingersoll-Ross process under continuous observations

O. Dehtiar, Y. Mishura, K. Ralchenko

Consider the Cox-Ingersoll-Ross process that is a unique solution of the following stochastic differential equation

$$dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r_t|_{t=0} = r_0 > 0$$

where $W = \{W_t, t \geq 0\}$ is a Wiener process and a, b, σ are positive constants. Throughout this work we shall assume that $2a \geq \sigma^2$.

Theorem 1. For all $T \geq 0$ the maximum likelihood estimator for the couple (a, b) constructed by the continuous observations of r over the interval $[0, T]$, has the following form

$$\hat{a}_T = \frac{\int_0^T r_t dt \int_0^T \frac{dr_t}{r_t} T \cdot (r_T - r_0)}{\int_0^T r_t dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2};$$
$$\hat{b}_T = \frac{(r_0 - r_T) \int_0^T \frac{dt}{r_t} + T \int_0^T \frac{dr_t}{r_t}}{\int_0^T r_t dt \cdot \int_0^T \frac{dt}{r_t} - T^2}.$$

Theorem 2. Estimator (\hat{a}_T, \hat{b}_T) is strongly consistent.

References

- [1] Deelstra, Griselda, and Freddy Delbaen. Long-term returns in stochastic interest rate model. *Insurance: Mathematics and Economics* 17.2 (1995): 163-169.
 - [2] Kamil Kladviko. Maximum likelihood estimation of the Cox–Ingersoll–Ross process: the Matlab implementation. Technical Computing Prague(2007).
 - [3] Yuliia Mishura and Yevheniia Munchak. Functional limit theorems for additive and multiplicative schemes in the Cox–Ingersoll–Ross model. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, Vol.3, Iss.1 pp. 1–17, 2016.
-

Authors

Olena Dehtiar — 4st year Bachelor’s degree student, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Volodymyrska, 60, 01601 Kyiv, Ukraine; E-mail: alenka.dehtyar@gmail.com

Yuliya Mishura — Professor, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Volodymyrska, 60, 01601 Kyiv, Ukraine; E-mail: myus@univ.kiev.ua

Kostiantyn Ralchenko — Associated Professor, Department of Probability, Statistics and Actuarial Mathematics, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Volodymyrska, 60, 01601 Kyiv, Ukraine; E-mail: k.ralchenko@gmail.com

Задача Йосипа Флавія

М. С. Деркач

Задача Йосипа Флавія виникла на основі легенди про події Першої Юдейської війни. Загін з 41 воїна обороняв фортецю. Римляни загнали їх у печеру з одним вузьким виходом. Воїни вирішили не здаватися у полон римлянам і домовилися, що, ставши у коло, будуть вбивати кожного третього, поки не залишиться один. А от цьому останньому потрібно буде скоїти самогубство. Йосип швидко намалював на піску коло й вирахував, де йому та його друзів потрібно стати, щоб залишитися останніми.

В основі даної роботи лежить розділ роботи Дональда Кнута [1]. У роботі розглянуто й систематизовано закономірності для розв’язань задачі Йосипа Флавія при різних значеннях n (загальної кількості воїнів) і k (вбивають кожного k -ого), рекурентне співвідношення [2], що лежить в основі лінійного за ефективністю алгоритму розв’язання задачі. Цей алгоритм програмно втілено мовою C++.

```
...
J = 0           \\ відповідь зменшена на 1
for (n = 2; n < N + 1; n++) J = (J + k) \% n
...
```

Список літератури

- [1] Грэхем, Рональд Л., Кнут, Дональд Э., Паташник, Орен. Конкретная математика. Математические основы информатики, 2 – е изд.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2010. – 784с.
- [2] Кнут Д. Искусство программирования. Том 1. Основные алгоритмы, 3 – е изд. Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2006. – 682 с.

Автори

Михайло Сергійович Деркач — учень 8В класу, гімназія № 283, Київ, Україна; E-mail: mishaderkach7v@ukr.net

Статистичні аспекти дослідження ліній найменшого еволюційного опору

І. І. Дзеверін, Х. Г. Саффури

Як один із основних способів зменшити розмірність даних, втративши найменшу кількість інформації, метод головних компонент (PCA) належить до найважливіших у сучасному аналізі даних. Запропоновано методи тестування гіпотез щодо головних компонент [1], однак вони передбачають нормальний розподіл змінних. Між тим, реальні дані далеко не завжди відповідають цьому припущенню, відтак проблема розробки незалежних від розподілу методів тестування головних компонент зберігає свою актуальність.

Ця проблема є актуальною, зокрема, в еволюційній біології. Еволюційна зміна комплексів полігенно детермінованих кількісних ознак у популяції найлегше відбувається в напрямку генетичної лінії найменшого опору (LLER – Line of Least Evolutionary Resistance), тобто у напрямку першої головної компоненти (PC1) адитивної генетичної коваріаційної матриці [2]. Реальний напрямок зміни популяції відхиляється від LLER унаслідок дії природного добору та інших чинників; масштаб відхилення залежить від генетичної кореляції між ознаками і від інтенсивності дії еволюційних чинників.

Відхилення напрямку зміни популяції від LLER становить

$$\theta = \arccos(g_{max}^T z),$$

де g_{max} – напрямок найбільшої генетичної дисперсії, z – вектор відповіді на добір [2]. Оцінка статистичної значущості такого відхилення зводиться до тестування гіпотез про головні компоненти. Ми припускаємо, що найперспективнішим в оцінці статистичної значущості оцінок відхилення є застосування методів ресемплінгу, зокрема бутстрапу.

Список літератури

- [1] Anderson T. W. Asymptotic theory for principal component analysis // The Annals of Mathematical Statistics. – 1963. – Vol. 34, No. 1. – P. 122-148.
- [2] Schluter D. Adaptive radiation along genetic lines of least resistance // Evolution. – 1996. – Vol. 50, No. 5. – P. 1766-1774.

Автори

Саффури Христина Ганемівна — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: s2Christina@ukr.net

Дзеверін Ігор Ігорович — доктор біологічних наук, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут зоології імені І.І. Шмальгаузена НАН України, Київ, Україна; E-mail: igordzeverin@gmail.com

Про слабку задачу дискретного логарифмування

Г. С. Дмитренко

Розв'язати задачу дискретного логарифмування означає знайти такі невід'ємні цілі (i, j, k, l) , що $M = A^i B^j A^k B^l$.

Зауважимо, що $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, де $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p$, $G = PSL_2(\mathbb{F}_p)$,

$$A^i = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки глибина G відносно двох елементів порядку p дорівнює 2, то M може бути зображена у такому вигляді $M = A^i B^j A^k B^l$ для деяких невід'ємних цілих i, j, k, l . Тоді $A^i B^j A^k B^l = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}$. Для знаходження (i, j, k, l) використовується обчислення базису Гребнера.

Отже, розв'язок узагальненої задачі дискретного логарифма у групі $PSL(2, p)$ відносно (A, B) еквівалентне розв'язанню наступної системи рівнянь, де $i, j, k, l \in \mathbb{Z}_p$:

$$\begin{aligned} l - jic + ja - c &= 0, \\ k + id - b &= 0, \\ jid - jb + d - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Щоб розв'язати слабку задачу дискретного логарифмування, потрібно виразити два некомутативних елементи C, D порядку p у групі $G = PSL(2, p)$, виразивши їх наступним чином для деяких додатних цілих $s, t < p$: $C = g^{-1} A^s g$, $D = g^{-1} B^t g$. Тоді ми можемо записати:

$$\begin{aligned} M &= C^i D^j C^k D^l = (g^{-1} A^s g)^i (g^{-1} B^t g)^j (g^{-1} A^s g)^k (g^{-1} B^t g)^l = \\ &= (g^{-1} A^{si} g) (g^{-1} B^{tj} g) (g^{-1} A^{sk} g) (g^{-1} B^{tl} g) = g^{-1} A^{si} B^{tj} A^{sk} B^{tl} g. \end{aligned}$$

Нехай

$$x = si, y = tj, v = k, w = tl.$$

Тоді

$$M = g^{-1} A^x B^y A^v B^w g,$$

а, отже,

$$gMg^{-1} = A^x B^y A^v B^w.$$

Нехай $M_1 = gMg^{-1}$. Очевидно, $M_1 \in G$ та $M_1 = A^x B^y A^v B^w$. Таким чином, ми перетворили узагальнену задачу дискретного логарифмування у $PSL(2, p)$ відносно C, D на узагальнену задачу дискретного логарифмування у $PSL(2, p)$ відносно A, B .

Вважається, що слабка задача дискретного логарифмування є важкою у розв'язанні, але якщо її звести до узагальненої задачі дискретного логарифмування, то ми можемо отримати розв'язок.

Список літератури

- [1] Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher, Joseph H. Silverman *An Introduction to Mathematical Cryptography*, 2008
 - [2] Taher ElGamal. A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Transactions on Information Theory*
 - [3] Merkle, R. C. Secure Communications over Insecure Channels. *Communications of the ACM*, 1978, 21 (4), pp. 294–299.
 - [4] Derek J.S. Robinson *A Course in the Theory of Group*, Springer, 1995
-

Автори

Дмитренко Ганна Сергіївна — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: annadmy@ukr.net

Тестування спряженості в простих скінченно породжених групах проміжного росту

С. О. Дорошенко

В даній роботі пропонується продовжити застосування методів машинного навчання для тестування спряженості в скінченно породжених групах проміжного росту. Раніше було показано, що сіамські конволюційні мережі [1] можуть бути успішно використані для розв'язання цієї проблеми в групі Григорчука [2]. Отримані результати - а саме, точність 85% на тренувальній та 70% - на тестовій вибірках - дозволяють говорити про відповідність даної архітектури поставленій проблемі.

Цікавим прикладом скінченно породженої періодичної простої групи проміжного росту є група F , побудована в статті [3]. Можна побудувати континуальну кількість груп з аналогічними властивостями. Оскільки відбувається отождошення побудованих перетворень відрізка з дією автоморфізмів на нескінченному бінарному кореневому дереві, то можна застосувати наступне кодування елементів.

Нехай g — автоморфізм бінарного кореневого дерева, який належить певній групі скінченного автомата. Будемо казати, що g має довжину n , якщо g розкладається в добуток n твірних цієї групи та обернених до них елементів. Визначимо для цього елемента матрицю ознак як образи під дією g елементів n -го рівня бінарного кореневого дерева, впорядкованих згідно лексикографічному порядку. При цьому, введемо для кожного твірного унікальне позначення його дії на нескінченному залишку слова - $(n + 1)$ -му рівні і далі.

Запропонований метод був застосований до підгрупи F , породженої автоморфізмами a_0, b_0, c_0, d_0 . Алфавіт було перепозначено як $X = \{0, 1\}$, а за унікальні позначки твірних обрано числа 3, 4, 5, 6, відповідно.

Список літератури

- [1] Gregory Koch, Richard Zemel, Ruslan Salahutdinov *Siamese Neural Networks for One-shot Image Recognition* – ICML deep learning workshop, vol. 2(2015)
- [2] Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Суцанский *Автоматы, динамические системы и группы* – Труды мат. института им. Стеклова 1, 2000, р. 134-214.
- [3] Volodymyr Nekrashevych *Palindromic subshifts and simple periodic groups of intermediate growth* – *Annals of Mathematics*, vol.187(2018), p.667-719

Автори

Світлана Олексіївна Дорошенко — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: svetlana_dor@ukr.net

Застосування інтегральних рівнянь із слабкою сингулярністю до проблеми оптимізації ентропійних функціоналів

Г. С. Железняк, Ю. С. Мішура

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$x(t) + \int_0^T K(t, s)x(s)ds = g(t), t \in [0, T], \quad (1)$$

з ядром $K(t, s) = \frac{L(t, s)}{|t-s|^\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де функція $L(t, s)$ – обмежена на $[0, T]$ та неперервна скрізь, за виключенням скінченної кількості точок, в яких функція не має границі. Такий тип рівнянь виникає в теорії ентропійних функціоналів, які описані в статтях [1]–[3]. Відповідний тип ядер будемо називати ядрами зі слабкою сингулярністю.

Побудовано наближений розв’язок такого типу рівнянь, що дозволило розв’язати чисельно проблеми оптимізації ентропії та конструювання оптимальних ймовірнісних мір.

Список літератури

- [1] A. MacKay, A. Melnikov, Y. Mishura, *Optimization of small deviation for mixed fractional Brownian motion with trend*. Stochastics, 90, no. 7, 2018, 1087–1110.
- [2] V. Makogin, Y. Mishura *Small deviations for mixed fractional Brownian motion with trend and with Hurst index $H > 1/2$* . Stochastics, 1–15, 2019, DOI:10.1080/17442508.2019.1652609
- [3] V. I. Makogin, Yu. S. Mishura, H. S. Zhelezniak, *Entropy minimization for a mixture of standard and fractional Brownian motions*. Theor. Probability and Math. Statist., 101, no. 2, 2019, 169–188.

Автори

Юлія Степанівна Мішура — д.ф.-м.н., професор, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: myus@univ.kiev.ua

Ганна Сергіївна Железняк — аспірант 2-го року навчання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: hanna.zhelezniak@gmail.com

Математичне моделювання вимог до платоспроможності страхової компанії

В. П. Зубченко

Математичне моделювання вимог до платоспроможності страхової компанії є практично важливим, адже дозволяє забезпечувати функцію контролю та прогнозування можливих сценарії динаміки ключових показників діяльності страхової компанії та страхового сектору економіки загалом.

Серед основних вимог до забезпечення платоспроможності страхової компанії:

- формування належної величини страхових резервів;
- забезпечення необхідної величини наявного регулятивного капіталу;
- представлення резервів активами, які задовольняють вимогам диверсифікованості та якості (зокрема, ризиковість відповідних фінансових інструментів повинна бути мінімальною).

Окрім виконання поточних вимог щодо резервів, капіталу та активів (відповідно до поточного портфелю договорів страхування, ринкових та макроекономічних факторів), необхідно забезпечити певну величину додаткового капіталу на випадок настання певного набору стресових подій.

Проведено моделювання ключових фінансових показників страхової компанії, тестування адекватності зобов'язань страховика, стрес-тестування діяльності згідно із національними стандартами та Міжнародними стандартами фінансової звітності.

Проаналізовано відповідність підходів, закладених в проєкті Нової редакції Закону України "Про страхування", вимогам Європейської директиви платоспроможності Solvency II.

Список літератури

[1] *European Insurance and Occupation Pensions Authority*, <https://eiopa.europa.eu/>.

Автор

Володимир Петрович Зубченко — канд. фіз.-мат. наук, асистент кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: volodymyr.zubchenko@gmail.com

Математичні моделі перестраховання

Т. Ю. Жук

Перестраховання суттєво впливає на забезпечення фінансової стійкості страховика. У багатьох видах страхування існує ймовірність великих або дуже великих ризиків, які одна страхова компанія не зможе покрити самостійно. У разі розгляду портфелю із дуже великими ризиками, компанія може їх обмежити, або віддати частину у перестраховання.

Вибір шляху цілком залежить від виду страхування та політики компанії. Проте, найважливіше — захистити себе від великих збитків, зменшивши рівень відповідальності. Тобто, прийняти на себе таку частку, яка поставить страхову компанію у безпечне становище.

У роботі досліджено модель перестархування ексцеденту збитку, у якій страховик бере на себе відповідальність d по кожному ризику, а решту передає в перестраховання. Тобто, збитки страховика обмежуються рівнем d . Це означає, що для

збитку X виплата перестраховика визначається як [1]

$$(X - d)_+ = \max(X - d, 0) = \begin{cases} X - d, & \text{якщо } X > d; \\ 0, & \text{якщо } X \leq d. \end{cases}$$

Проведено оцінку витрат страховика і перестраховика. Досліджено задачу розрахунку перестрахової премії та знаходження оптимального рівня власного утримання d для даного страхового портфеля.

Список літератури

- [1] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory. Using R. Second Edition.* – 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
-

Автори

Тетяна Юрїївна Жук — студентка 4-го курсу механіко-математичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: zhuktanya18@ukr.net

Одновимірне випадкове симетричне блукання точки

Є. Д. Козир

Вперше явище випадкового блукання було помічено у 1827 році шотландським біологом Робертом Броуном, на честь якого цей рух названо броунівським. Термін випадкового блукання було введено англійським математиком Карлом Пірсоном у 1905 році. Пізніше, у тому ж самому році, Альберт Ейнштейн видав працю, яка розвинула теорію броунівського руху. Ця робота є однією з перших із статистичної фізики. Наразі існує багато нерозв'язаних задач у цьому напрямі. У роботі розглядається одновимірне випадкове симетричне блукання точки. У даній моделі точка з кожним наступним моментом часу випадково переміщується на 1 або за напрямком числової осі, або проти напрямку числової осі. Для дослідження одновимірного випадкового блукання використовується його представлення на графіку, де вісь ординат показує положення точки на прямій, вздовж якої вона рухається, а вісь абсцис виступає у ролі осі часу. Даний тип представлення випадкового блукання допомагає більш зручно досліджувати переміщення точки з плином часу. Метою даної роботи є ознайомлення та дослідження математичної моделі одновимірного випадкового симетричного блукання точки, як більш легкого варіанту випадкового блукання точки в багатовимірному просторі. У роботі представлені теоретичні основи та особливості випадкового одновимірного симетричного блукання точки, властивості, леми та теореми, які можуть допомогти при застосуванні даної моделі в інших науках. Також наведено приклад задачі, у якій можуть бути застосовані отримані результати. Теореми сформульовані та доведені самостійно, а саме: розглянуто кількість шляхів, які досягали певну межу за заданий час; кількість шляхів до певної точки; отримано формули для обрахування кількостей цих шляхів. Одним з основних завдань роботи було дослідження одновимірного випадкового симетричного блукання в заданих межах. В роботі проведено власне дослідження випадкового блукання точки з часом в заданих межах та наведено приклад застосування отриманих результатів для описання моделі руху світла. Отримано формулу, яка описує кількість шляхів, що закінчуються у певній точці та не перетинають і не дотикаються певних заданих меж. Наведено приклад застосування для опису руху світла. Для цього розглядалась модель руху фотонів, як випадкове симетричне блукання точок. Показано, що у використаній моделі фотони світла будуть рухатись

по прямій.

Автор

Козир Єгор Денисович — учень 10 класу, Природничо-науковий ліцей №145, Київська Мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: egorka.kozyr@gmail.com

Using of hyperbolic discounting model for solving an annuity puzzle

N. Kryvitska

A low demand for the immediate annuities for retirees has been a long-standing puzzle. The main focus should be on the adequate protection against longevity risk and the risk of outliving one's wealth. That is why lifelong annuity is a great option for the participants of the defined contribution pension's scheme. However, empirical data shows that retirees are reluctant to convert their pension's savings into annuities. This disparity leads to the "annuity puzzle". Hyperbolic discounting model can explain this behavior and as a result lead to attractiveness of the deferred annuities. To determine whether an actuarially fair priced annuity is attractive to buy, the relative difference between reservation price and fair price, R , can be used:

$$R = \frac{\text{Reservation price} - \text{Actuarially fair price}}{\text{Actuarially fair price}}$$

reservation price, or maximum acceptable price, that would make a person indifference to buying an annuity. Let's consider an immediate annuity for a x -years-old ($x \leq 65$) retiree, which needs to make a decision about spending a lump sum A for buying an immediate annuity, which pays yearly income k . The overall value of this investment will be: $V(x) = v(-A) + \sum_{i=x}^{120} v(k) * \delta(i-x) * {}_{i-x}p_x$, where $\delta(t) = (1+t)^{-\beta}$ is a hyperbolic discount function with $\beta = 0,19$ for gains and $\beta = 0,11$ for losses and $v(c_t) = \begin{cases} -(-c_t)^\gamma & \text{if } c_t < 0 \\ c_t^\theta & \text{otherwise} \end{cases}$ is a value function with $\theta = 0,84$ and $\gamma = 0,99$. So from the overall value the value of A can be found, that is a reservation price. Accordingly we can find the value of R for different ages and estimate attractiveness of immediate annuity for consumers. I did the same for different types of deferred annuities for retirement and working age individuals. From the results of the analysis it can be noted that, using hyperbolic discounting, deferred annuities are attractive for individuals of all the ages. The attractiveness, that is the value of R , increases with the length of the deferred period. For example, people under the age of 35 are willing to pay more than twice the fair price for working age deferred annuity.

Bibliography

- [1] Chen, A., Haberman and Thomas. The implication of the hyperbolic discount model for annuitisation decisions.
[2] Anran Chen, Steven Haberman and Stephen Thomas. Cumulative prospect theory, deferred annuities and the annuity puzzle.

Author

Natalia Kryvitska — 2nd year Master student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine; E-mail: nataliakryvitska22@gmail.com

Побудова консистентних оцінок параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонавської похибок у регресорі

О. Г. Кукуш, М. С. Яковлев

Досліджується лінійна модель регресії за наявності суміші класичної та берксонавської похибок у регресорі:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon, \quad w = x + \delta, \quad \xi = x + u, \quad (1)$$

де спостерігаються відгук y та сурогатна змінна w , ξ та x – неспостережувані приховані змінні, ε – похибка у відгуку, δ – класична похибка вимірювання, u – похибка Берксона.

На модель накладаються наступні обмеження: (i) випадкові величини x , ε , δ та u незалежні; (ii) ε , δ та u мають нульові математичні сподівання та скінченні дисперсії, x також має скінченну дисперсію; (iii) дисперсії δ та u відомі, при цьому інші параметри моделі ($E x$ та дисперсії ε та x) невідомі; (iv) x та u – гауссові.

Розглядаються n незалежних копій моделі (1):

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i, \quad w_i = x_i + \delta_i, \quad \xi_i = x_i + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

та спостерігаються пари (y_i, w_i) , $i = 1, \dots, n$.

За допомогою умовного розподілу $[\xi_i | x_i]$ модель (2) зводиться до моделі з класичною похибкою [1], з якої ми отримаємо консистентні оцінки невідомих параметрів регресії. При цьому виявляється, що оцінки параметрів β_0 та β_1 збігаються з оцінками виправлених найменших квадратів [1], побудованої за відсутності похибки Берксона u .

Список літератури

- [1] Масюк С. В., Кукуш О. Г., Шкляр С. В., Чепурний М. І., Ліхтарьов І. А. Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків – Київ: ДІА, 2015. – 288 с.
-

Автори

Кукуш Олександр Георгійович – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: alexander_kukush@univ.kiev.ua

Яковлев Микита Сергійович – студент 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: mykyta.yakovliev@gmail.com

Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині під дією сталих дотичних швидкостей

Н. А. Кучер

Дана робота з розділу теоретичної механіки про застосування методу суперпозиції для розв'язання задач про рух в'язкої рідини в прямокутній порожнині, до стінок якої прикладені дотичні швидкості. У першому розділі розглядаються

основні підходи, які необхідні для вивчення процесу змішування. Важливим для вивчення такого процесу є поняття відображення Пуанкаре-положень вихідної точки у порожнині після кожного періоду T , та знання періодичних точок, тобто таких початкових умов в рівнянні адвекції, коли точка за певну кількість періодів точно повертається в своє початкове положення.

Під час дослідження було розглянуто задачу про рух двовимірної повільної течії Стокса в прямокутній порожнині. Рух частинок течії настільки повільний, що інерційними силами можна знехтувати і прийти до бігармонічного рівняння. На верхній і нижній стінках прямокутної області задано дотичні швидкості, бічні стінки залишалися нерухомими. Провівши чисельні розрахунки можна побачити, що навколо еліптичної точки першого порядку у хаотичному морі існує великий острів, на границі якого розташувалися еліптичні точки шостого порядку з меншими островами. Видно, що підфарбована рідина, яка спочатку знаходилася всередині цього острова, ніколи не зможе змішатися з навколишньою рідиною та залишити його. Яскраві експериментальні демонстрації цього явища наведені в статті Оттіно [1]. За допомогою відображення Пуанкаре наглядно показана суттєва різниця в деформації квадратного виділеного елемента, який розміщений в околі відповідно еліптичної та гіперболічної періодичних точок першого періоду. Квадрат навколо еліптичної точки цілком належить еліптичному острову і тому ніколи не вийде за межі цього острова.

Запропонований підхід змішування рідин можна застосувати для тривимірної задачі про течію Стокса в циліндричній порожнині та змішування в'язкої рідини в ній [2].

Список літератури

- [1] Ottino J. M. The mixing of fluids // *Scient. Amer.* – 1989. – 260. – P. 56–67.
 - [2] Meleshko V. V., Maluyga V. S., Gomiiko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder // *Proc. R. Soc. London.* – 2000. – A456. – P. 1741–1758.
-

Автори

Наталія Анатоліївна Кучер — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: natali4.kucher55@gmail.com

Прогнозування футбольних результатів при статистичному моделюванні

Р. С. Лахва

Дана робота з розділу теорії ймовірностей про застосування розподілу Пуассона при прогнозуванні результатів футбольних матчів. В першому розділі даємо характеристику розподілу Пуассона, показуємо приклади практичного застосування. Зокрема, класичним прикладом випадкової величини, розподіленої за Пуассоном, є кількість машин, що проїжджають через яку-небудь ділянку дороги за заданий проміжок часу [1].

Основним моментом нашого дослідження є побудова статистичної моделі, яка дозволить дати прогноз результатам футбольних матчів. Модель ґрунтується на кількості забитих/пропущених м'ячів кожної команди. Команди, що мали високі результати в минулому, мають більшу ймовірність забивати голи у майбутньому [1]. Для аналізу та побудови моделі розглянуто дані сезону 2016–2017 Англійської Прем'єр Ліги. В подальшому аналіз відбувся на основі останніх п'яти сезонів трьох різних чемпіонатів країн Європи. Зокрема, помітили, що в середньому домашня команда забиває більше голів. В цьому моменті й з'являється дискретний розподіл

ймовірностей, що описує ймовірність кількості подій протягом певного періоду часу (наприклад, 90 хв.) з відомою середньою частотою виникнення [2]. Ключове припущення полягає в тому, що кількість подій не залежить від часу. У нашому контексті це означає, що голи не стають більш/менш ймовірними для кількості вже забитих голів в матчі. Таким чином, ми можемо розглядати кількість голів, які забила домашня команда і гостьова команда, як два незалежні розподіли Пуассона. Замість того, щоб розглядати кожний матч окремо, створено більш загальну модель регресії Пуассона.

Ця модель доволі проста, тому має певні недоліки та обмеження, але незважаючи на це, модель Пуассона є твердою відправною точкою при спробі передбачити футбольні результати.

Список літератури

- [1] Карташов М.В. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009.
 - [2] How to calculate Poisson distribution for football betting, <https://help.smarkets.com/hc/en-gb/articles/115001457989-How-to-calculate-Poisson-distribution-for-football-betting>
-

Автори

Роксолана Степанівна Лахва — студентка 4-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: roksolanalahva@gmail.com

Сліпий мультитіпідпис

Н. О. Лихошерстова

Сліпий мультитіпідпис передбачає невідстежуваність і анонімність для документа і його учасників та створюється декількома суб'єктами але має довжину простого підпису. Всі члени групи мають свої пари ключів ДСТУ 4145 (d_i, Q_i). Обрахування було здійснено за допомогою загальної еліптичної кривої E , що забезпечило безпеку з меншим розміром ключа і швидшим часом обрахування ніж інші групи.

Було проведено обрахування сліпого мультитіпідпису наступним чином. Нехай $E(F_q)$ - еліптична крива над скінченим полем F_q , $q = 2^m$, m - степінь розширення скінченного поля, P - базова точка еліптичної кривої порядку n ; d - секретний ключ, а $Q = -dP$ - відповідний відкритий ключ, $H(\cdot)$ - функція хешування. Спочатку було згенеровано разовий секретний ключ e і обрахована точка еліптичної кривої $R = eP$. Далі обрахований хеш-код $H(T)$ повідомлення T і перетворено в елемент основного поля h . Після цього було обраховано елемент основного поля $y = h(R)_x$, $(\cdot)_x$ - координата точки еліптичної кривої в дужках. Цей елемент основного поля перетворюється в ціле число r і було обраховано ціле число $s = (e + dr) \bmod n$. Пара чисел (r, s) утворює цифровий підпис ДСТУ 4145-2002. Для перевірки цифрового підпису була обрахована точка еліптичної кривої $\bar{R} = sP + rQ$, потім обраховано елемент основного поля $y = h(\bar{R})_x$. Цей елемент основного поля перетворюється в ціле число \bar{r} . Підпис вірний, якщо $\bar{r} = r$.

Список літератури

- [1] Threshold Signatures, Multisignatures and Blind Signatures Based on the Gap-Diffie-Hellman-Group Signature Scheme Alexandra Boldyreva Dept. of Computer Science and Engineering, University of California at San Diego, 9500 Gilman Drive, La Jolla, CA92093, USA

- [2] A Chapter from the Handbook of Applied Cryptography, by A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone, CRC Press, 1996. For further information, see www.cacr.math.uwaterloo.ca/hac
- [3] Untraceable Blind Multisignature Ankit Kumar Namdeo Department of Computer Science and Engineering National Institute of Technology Rourkela Rourkela-769 008, Odisha, India May 2015
- [4] Слепые мультиподписи на основе стандартов ДСТУ 4145-2002 и Р 34,10-2001 Анатолий Кочубинский, Н.А. Молдовян, Алексей Фаль Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев Санкт-Петербургский институт информатики РАН, Санкт-Петербург
- [5] Слепые мультиподписи на основе стандартов ДСТУ 4145-2002 и ГОСТ Р 34.10-2001 Анатолий Кочубинский, Алексей Фаль Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины

Автори

Наталія Олександрівна Лихошерстова — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: natalia.lno.b@gmail.com

Порівняння деяких методів розв'язання задачі Треша

Д. В. Малашок

Крайова задача для ЗДР 2-го порядку

$$y'' = \alpha \sinh(\alpha y), \quad \alpha > 0,$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

що була поставлена Вейбелом[1] та Трешем[2], спочатку була пов'язана з дослідженням обтиснення плазмового шнура тиском випромінювання. Але через жорсткі обмеження її розв'язок не несе в собі особливого фізичного змісту.

Значний інтерес до цієї задачі виник дедалі пізніше з боку спеціалістів в галузі чисельних методів. Він пов'язаний насамперед з тим, що вона являє собою гарний тестовий приклад для перевірки методів розв'язання нестійких (жорстких) нелінійних крайових задач.

Було зроблено спробу розв'язати задачу Треша деякими наближеними методами, які вибиралися таким чином, щоб мати під собою мало схожу або різну теоретичну основу і при цьому володіти тими чи іншими якісно різними характеристиками. Отримані наближені розв'язки порівнювалися з точним розв'язком[3].

Використавши метод стрільби, отримано надвисоку точність при малих значеннях параметра при малій залежності від кроку розбиття, що є перевагою цього методу. Але при збільшенні параметра до, наприклад, 6 або більше цей метод втрачає стабільність та дає некоректні результати.

Результати, отримані методом різницевого схем для лінеаризованої задачі, вказують, що при фіксованому кроці сітки але при збільшенні параметра α точність досить сильно зменшується, хоча при цьому залишається в межах, що гарантуються методом.

Список літератури

- [1] Weibel E. S. Confinement of a plasma column by radiation pressure. – In: The plasma in a magnetic field (R. K. M. Landshoff, ed.). – Stanford: Stanford Univ. press, 1958.

- [2] Troesch B. A. Intrinsic difficulties in the numerical solutions of a boundary value problem. – Internal Rep. NN-142, TRW Inc., Redondo Beach, California, 1960.
- [3] Bougoffa L., Al-khadhi M. New Explicit Solutions for Troesch's Boundary Value Problem. – Appl. Math. & Inform. Sciences, 2009 – p. 89-96.

Автори

Малашок Дмитро Владиславович – студент 1-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: sudm98@gmail.com

On the parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces

Н. О. Masliuk

We introduce and investigate the most general class of linear boundary-value problems for systems of higher-order ordinary differential equations solutions of which belong to the given complex Hölder spaces.

Consider a compact $[a, b] \subset \mathbf{R}$, integers $m \geq 1$, $r \geq 2$, and $n \geq 0$ and a real number α subject to the condition $0 < \alpha \leq 1$. We use the complex Hölder spaces $(C^{n,\alpha})^m$ and $(C^{n,\alpha})^{m \times m}$. Let a real number $\varepsilon_0 > 0$ be fixed, and let a real parameter ε range over the interval $[0, \varepsilon_0)$. We investigate a parameter-dependent linear boundary-value problem of the form

$$L(\varepsilon)y(t, \varepsilon) \equiv y^{(r)}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t, \varepsilon)y^{(r-j)}(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon), \quad a \leq t \leq b, \quad (1)$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot, \varepsilon) = c(\varepsilon). \quad (2)$$

For every fixed $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, the solution $y(\cdot, \varepsilon)$ to the problem is considered in the class $(C^{n+r,\alpha})^m$. We suppose that $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^{m \times m}$ for each $j \in \{1, \dots, r\}$ and that $f(\cdot, \varepsilon) \in (C^{n,\alpha})^m$. Thus, (1) is a system of m scalar linear r -th order differential equations given on $[a, b]$. Note we do not assume $A_{r-j}(\cdot, \varepsilon)$ to have any regularity in ε . As to the boundary condition (2), we suppose that $B(\varepsilon)$ is an arbitrary continuous linear operator $B(\varepsilon) : (C^{n+r,\alpha})^m \rightarrow \mathbf{C}^{rm}$ and that $c(\varepsilon) \in \mathbf{C}^{rm}$.

For the generic boundary-value problems depending on a small parameter $\varepsilon \geq 0$, we establish a constructive criterion under which their solutions are continuous in the parameter at $\varepsilon = 0$ in the space $(C^{n+r,\alpha})^m$ [2, Main Theorem]. We prove that the error and discrepancy of the solutions are of the same order as $\varepsilon \rightarrow 0+$ in the corresponding Hölder spaces [2, Theorem 2.1]. Mikhailets, Murach and Soldatov [1] proved these theorems in the case $r = 1$.

References

- [1] Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V. Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2016, no. 87, 1–16.
- [2] Masliuk H., Soldatov V. One-dimensional parameter-dependent boundary-value problems in Hölder spaces. Methods of Functional Analysis and Topology, 2018, V. 24, no. 2, 143 – 151.

Author

Hanna Oleksiivna Masliuk — candidate of physical and mathematical sciences, faculty of physics and mathematics, National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine; E-mail: masliuk@matan.kpi.ua

Асимптотична нормальність оцінок коефіцієнтів у суміші регресій

В. О. Мірошниченко

В даній роботі розглядаються оцінки коефіцієнтів регресії, отримані узагальненим методом найменших квадратів. Оцінки отримано за спостереженнями з суміші зі змінними концентраціями.

Ми розглядаємо об’єкти $O_j, j = 1, \dots, n$, які були взяті із суміші, що складена із M різних компонент. Номер компонента κ_i , до якого належить O_j - невідомий, але відомі ймовірності змішування $p_i^k = \mathbb{P}(\kappa_i = k)$.

У кожного об’єкта спостерігається дві змінні $(X_j, Y_j)_{j=1}^n$, для яких виконується модель нелінійної регресії $Y_j = g(X_j, b^{(\kappa_j)}) + \varepsilon_j^{(\kappa_j)}$. Тут g - відома регресійна функція, $b^{(k)}$ - вектор невідомих коефіцієнтів регресії k -го компонента, $\varepsilon_j^{(k)}$ - похибка вимірювання $\mathbb{E} \varepsilon_j^{(k)} = 0, \mathbb{D} \varepsilon_j^{(k)} < \infty$.

Оцінка $\hat{b}_n^{(k)}$ коефіцієнтів регресії - це розв’язок оцінюючого рівняння за параметром γ :

$$J_n^k(\gamma) = \sum_{j=1}^n a_{j:n}^k (Y_j - g(X_j, \gamma)) \nabla g(X_j, \gamma) = \bar{0}$$

тут $a_{j:n}^k$ - мінімаксні ваги з [1].

При виконанні певних умов,

$$\sqrt{n} V_n^{-\frac{1}{2}} (\hat{b}_n^{(k)} - b^{(k)}) \rightarrow^w N_d(0, I_d),$$

тут $V_n = M_n^{-1}(b^{(k)}) \text{Var}(J_n^k(b^{(k)})) M_n^{-1}(b^{(k)})^T$, та $M_n(b^{(k)}) = -E \nabla J_n^k(b^{(k)})$

Список літератури

- [1] Maiboroda, R., Sugakova, O. (2012) Statistics of mixtures with varying concentrations with application to DNA microarray data analysis. Journal of nonparametric statistics. 24 , No 1 201–205 (2012)
- [2] Miroshnychenko V. Generalized least squares estimates for mixture of nonlinear regressions, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv; Series: Physics Mathematics, 2019, 5

Автор

Віталій Олегович Мірошниченко — аспірант 2-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: vitaliy.miroshnychenko@gmail.com

Визначення факторів впливу на інфляцію в Україні та побудова регресійної моделі

О. Ф. Москанова

Як відомо, рівень інфляції в країні впливає на монетарну політику та на відсоткові ставки банківського сектору, тож прогнозування індексу споживчих цін (далі – ІСЦ) на кілька місяців уперед є важливою складовою діяльності фінансових установ. У роботі було поставлено за мету дослідити, які макроекономічні показники мають найбільший вплив на ІСЦ та його динаміку, побудувати регресійні моделі та визначити, які з них дають найбільшу точність прогнозу.

У результаті дослідження з'ясувалося, що краще ілюструють взаємозалежність між макроекономічними показниками значення у чисельному вираженні, а не в динаміці. Найбільш взаємопов'язаними з ІСЦ виявились наступні фактори: курс долара, споживання домогосподарств, державні витрати, інвестиції, облікова ставка НБУ, обсяг валютних резервів та кількість працевлаштованих громадян.

Для прогнозування ІСЦ були використані моделі лінійної та гребеневої регресії, Facebook Prophet та часові ряди: ARMAX - autoregressive moving average with exogenous variables, VARMA - vector autoregressive moving average. Серед них найбільша точність виявлена у ARMAX(p, q), що в загальному вигляді описується рівнянням:

$$\phi(L)(y_t - X_t\beta) = \theta(L)\epsilon_t, \quad (1)$$

де ϕ, θ – поліноми оператора зсуву в часі L степенів p і q відповідно [4].

Список літератури

- [1] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel. Time series analysis : forecasting and control, 3rd ed. – Prentice-Hall, Inc., 1994
 - [2] M. H. Kutner, C. J. Nachtsheim, J. Neter, W. Li. Applied Linear Statistical Models – McGraw-Hill/Irwin, 2005
 - [3] S. Nikolaychuk, Y. Sholomytskyi. Using macroeconomic models for monetary policy in Ukraine – Visnyk of the National Bank of Ukraine, 2015, No. 233
 - [4] Seabold, Skipper, and Josef Perktold. “statsmodels: Econometric and statistical modeling with python.” – proceedings of the 9th Python in Science Conference, 2010. www.statsmodels.org/stable/generated/statsmodels.tsa.arima_model.ARIMA.html
-

Автор

Ольга Федорівна Москанова — студентка 3-го курсу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: olyushkam@gmail.com

Калібрування оцінок у вибіркових обстеженнях

В. О. Павельєва

Вибіркові обстеження відіграють важливу роль у статистиці (див. [1]). Основним завданням вибіркових обстежень є аналіз генеральної сукупності на основі певної вибірки. Під час проведення обстеження можуть виникати «погані» вибірки. У таких випадках для покращення оцінок можна використати калібрацію.

Калібрація — коригування системи вагів для одиниць спостереження, які взяли участь у вибірковому обстеженні, шляхом мінімізації функції відстані між калібраційними вагами та вагами, що коригуються, за умови, що калібраційні ваги дають точні оцінки зовнішніх змінних, відомих для генеральної сукупності або її частин.

Основне завдання моєї роботи – дослідження ефективності оцінок у вибіркових обстеженнях. У процесі роботи було розглянуто оцінку Горвіца-Томпсона, калібровані оцінки та калібровані оцінки з використанням Хекіт моделі. Більша частина роботи присвячена саме Хекіт моделі, що розроблена для аналізу даних з великою кількістю нулів [2].

У процесі роботи була здійснена симуляція даних, на яких було досліджено ефективність використання Хекіт моделі. У ході роботи мною були отримані такі результати:

	<i>HT</i>	$C \sim x_1$	$C \sim x_2$	$C \sim x_1, x_2$	$C \sim Heckit$
\hat{t}	541	542	570	567	562
$D(\hat{t})$	717	1279	472	439	407

Отже, найбільш точну оцінку отримали при застосуванні Хекіт моделі, про що свідчить найменша дисперсія. Справжнє значення сумарного $t = 557$ для даної симульованої генеральної сукупності.

Список літератури

- [1] О. І. Василик, Т. О. Яковенко. Лекції з теорії і методів вибіркових обстежень – ВПЦ "Київський університет 2010. – 208 с.
- [2] J. J. Heckman, The Common Structure of Statistical Models of Truncation, Sample Selection and Limited Dependent Variables and a Simple Estimator for Such Models, Chapter in NBER book Annals of Economic and Social Measurement, Volume 5, number 4 (1976), Sanford V. Berg, editor (p. 475 - 492)

Автори

Павельєва Валерія Олегівна — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: lerapaveljeva1996@gmail.com

Граничні теореми для розв'язків лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь

О. Б. Пелехата

Розглянемо на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbf{R}$ для кожного цілого невід'ємного n систему m лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t, n) + A_{r-1}(t, n)y^{(r-1)}(t, n) + \dots + A_0(t, n)y(t, n) = f(t, n) \quad (1)$$

із неоднорідними крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot, n) = c_j(n), \quad j \in \{1, 2, \dots, r\} =: [r], \quad (2)$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j(n) : C^{(r-1)}([a, b]; \mathbf{C}^m) \rightarrow \mathbf{C}^m, \quad j \in [r].$$

Припускається, що матриці-функції $A_{j-1}(\cdot, n)$, вектор-функція $f(\cdot, n)$ сумовні на $[a, b]$, а вектори $c_j(n)$ - задані з простору \mathbf{C}^m .

Надалі вважатимемо, що гранична крайова задача (1) – (2) для $n = 0$ має єдиний розв'язок. Тоді цікавими є наступні питання:

- За яких умов на ліві частини задач (1) – (2) їх розв’язки $y(\cdot, n)$ існують і єдині при $n \gg 1$;
- Які додаткові умови на ліві і праві частини задач (1) – (2) гарантують, що

$$\left\| y^{(j-1)}(\cdot, 0) - y^{(j-1)}(\cdot, n) \right\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad j \in [r], \quad (3)$$

де $\|\cdot\|_{\infty}$ – sup-норма на відрізьку $[a, b]$.

Отримана теорема дає відповіді на ці питання (див. [1],[2], [3]) .

Список літератури

- [1] Пелехата О. Б., Рева Н. В. Граничні теореми для розв’язків лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь. // Укр. мат. журн. — 2019. — 71, №7 — С. 930-937.
- [2] Михайлець В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В. О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач // Доповіді НАН України. — 2017. — №12. — С. 8 -13.
- [3] Михайлець В. А., Пелехата О. Б., Рева Н. В. Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. — 2018. — 70, № 2 — С. 216-223.

Автори

Ольга Богданівна Пелехата — к.ф.-м.н., ас. кафедри МА та ТІЙ ФМФ НТУУ "КПІ ім. І.Сікорського Київ, Україна; E-mail: pelehataob2015@gmail.com

Виявлення точок, погіршуючих лінійну апроксимацію

Б. О. Пилипченко

Часто для дослідження деякого технологічного процесу потрібно побудувати його модель на основі експериментальних даних. Оскільки хід будь-якого експерименту не контролюється абсолютно точно, то існує велика імовірність появи недостовірних зразків у наборі даних для апроксимації. Виникає проблема: виявити точки, які погіршують результат апроксимації. Часто на практиці для отримання моделі задовільної якості достатньо побудувати лінійну апроксимацію. Метою даного дослідження є розв’язання задачі щодо виявлення точок, погіршуючих результату лінійної апроксимації. Зауважимо, що застосування стандартних статистичних методів виявлення аномалій [1] для даної задачі є неефективним, оскільки кількість вхідних даних є недостатньою.

Для розв’язання цієї задачі був створений евристичний алгоритм, який полягає в обході графу (рис.1) всіх можливих варіантів виключення точок із початкової множини. В кожному вузлі розв’язуються дві підзадачі, для вирішення кожної з яких була створена окрема нейронна мережа. Розв’язки вищезгаданих підзадач дозволяють порівняти поточний варіант виключення точок із найкращим знайденим до цього.

Для перевірки роботи запропонованого алгоритму була створена тестова програма. На реальних і близьких до реальних (які задавалися експертом) прикладах була досягнена точність 100%. Приклад наведений на рис.2.

Список літератури

- [1] Поиск аномалий (Anomaly detection). <https://dyakonov.org/2017/04/19/%D0%BF%D0%BE%D0%B8%D1%81%D0>

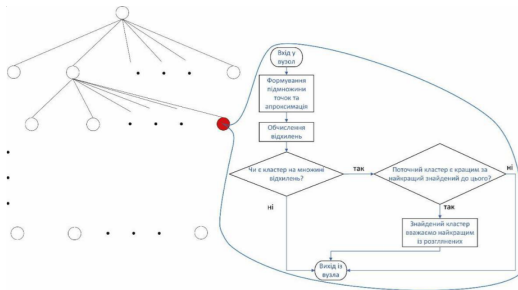


Рис. 1. Алгоритм пошуку точок, які погіршують апроксимацію

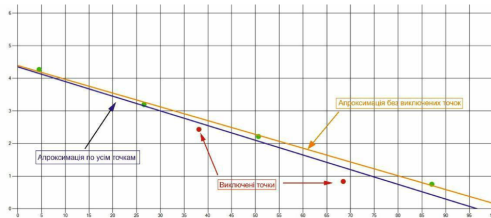


Рис. 2

[%BA-%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B9-anomaly-detection/](#)

Автори

Богдан Олегович Пилипченко — учень 11 класу Школи І-ІІІ ступенів №206 ім. Леся Курбаса, Київська Мала Академія Наук, Київ, Україна; E-mail: bogdan314yurpchenko@gmail.com

Спіральне перетворення рівнокутних напівправильних багатокутників

А. О. Рудик

Дослідженням багатокутників займалися Піфагор і Архімеду, Кеплер і Пуансо, Коші й Гаусс, Делоне й Александров. В останні роки в роботах учнів [1–5] у рамках МАН було досліджено властивості деяких видів багатокутників з прямолінійними сторонами.

У даній роботі використано такі поняття:

- напівправильний багатокутник — опуклий багатокутник з парною кількістю вершин, всі кути якого рівні, а сторони рівні через одну;
- на чверть правильний багатокутник — багатокутник з парною кількістю вершин, кути якого рівні через один та сторони рівні через одну;
- спіральне перетворенням багатокутника — таке перетворення, при якому образ вершини A_j багатокутника центральносиметричний попередній вер-

шбус A_{j-1} відносно вершини A_j (вершини нумерують у порядку обходу по периметру);

Доведено такі теореми:

- при спіральному перетворенні напівправильного багатокутника його образом є на чверть правильний багатокутник
- при спіральному перетворенні прямокутника його образом є паралелограм з площею у п'ять разів більшою за площу прямокутника.

Список літератури

- [1] Маруженко Г.І. Про зв'язок напівправильних і правильних багатокутників // Конкурс учнівських робіт в рамках МАН. — Київ, 2001. — 21 с.
- [2] Кононюк Є. Серединні багатокутники до напівправильних багатокутників // Конкурс учнівських робіт в рамках МАН. — Київ, 2006. — 17 с.
- [3] Басюк Д.К. 1/2-правильні багатокутники // Матеріали XVII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна — 2019», квітень 2019 року, Київ, Україна. — С.7.
- [4] Корольова Л.В. Спіральне перетворення правильних багатокутників // Конкурс науково-технічних проєктів учнів Intel-ТЕХНО Україна 2015–2016. Тези робіт. Категорія «Математика». — К: НТУУ «КПІ», 2015. — С. 202-203.
- [5] Худер К.Н. Інверсія вписаних рівнокутних напівправильних багатокутників // Конкурс науково-технічних проєктів учнів Intel-ТЕХНО Україна 2013. Тези робіт. Частина 1. Категорія «Математичні науки». — К: НТУУ «КПІ», 2013. — С. 7–9.

Автор

Андрій Олександрович Рудик — учень 8Б класу, гімназія № 283, Київ, Україна; E-mail: rudykob@gmail.com

Деформації кручення правильних призм та скручених антипризм

Є. А. О. Рудик

У роботі досліджено деформації кручення правильних n -кутних призм і скручених антипризм у припущенні про злам кожної бічної грані за однією з діагоналей. Використано 2 моделі: зі сталою довжиною висоти h призми [1] або з зі сталою довжиною бічного ребра b . Розглянуто деформації як результат повороту однієї з основ на кут φ навколо її центру у площині основи. У роботі використано скручені антипризми — не лише неопуклі призматойди з рівними трикутними гранями і рівними правильними багатокутниками у основах [2], а й відповідні опуклі призматойди. Отримано умови, за яких деформована правильна призма стає антипризмою Архімеда. Досліджено виродження призматойдів для деяких кутів повороту φ . Доведено, що котангенс двограних кутів α при основі таких призматойдів, отриманих у результаті деформації призми на основі моделі з жорсткою висотою, задовольняють рівняння равлика Паскаля, та при деформації призми на основі моделі з жорсткими ребрами — деформованого равлика Паскаля. За допомогою чисельного експерименту досліджено зміну кута при основі призматойда залежно від вхідних параметрів.

Твердження 1. *Якщо у моделі зі сталою висотою відкласти у полярній системі координат по полярній осі величину $\text{ctg } \alpha = -\frac{R}{h} \cos \left| \varphi - \frac{\pi}{n} \right| + \frac{R}{h} \cos \frac{\pi}{n}$,*

отримаємо раглик Паскаля з віссю симетрії, повернутою на кут π/n . Для моделі з жорсткими ребрами за рахунок залежності $h(b) = \sqrt{b^2 - 4R^2 \sin^2(\varphi/2)}$, отримаємо деформований раглик Паскаля, що зазнає розриву при $b = 2R$.

Твердження 2. Екваторіальний переріз скручених у результаті деформації призм є рівнокутним напівправильним многокутником, у якого кути з вершиною, що лежать на деформованих діагоналях вихідної призми, залежать лише від кута повороту верхньої основи і не залежать ні від кількості сторін многокутника в основі призматоїда, ні від радіуса описаного навколо многокутника в основі кола, ні від висоти призматоїда.

Список літератури

- [1] Козак А. В. Математичне моделювання деформації кручення правильних призм / Козак А.В. // Конкурси науково-технічних проєктів учнів Intel — ТЕХНО Україна 2016–2017. Тези робіт. — К: НТУУ «КПІ», 2015. — С.12–13.
- [2] Rembau J. Combinatorial and computational geometry. Cambridge: Cambridge University Press. — 2005. — P 505–516.

Автор

Євгенія Анастасія Олександрівна Рудик — учениця 11-го класу, Києво-Печерський ліцей № 171 "Лідер Київ, Україна; E-mail: 12evgenia01@gmail.com

Вплив пульсації рідини на динаміку трубопроводу, що здійснює обертальний рух

М. М. Сапон

Виконано аналіз розвинення динамічного процесу в системі, яка складається з трубопроводу з рідиною, що здійснює обертальний рух та рухомої основи. Проаналізовано вплив пульсації течії рідини на характер коливань трубопроводу. Розглядалась поведінка вільного кінця трубопроводу, що найкраще ілюструє характер динамічного процесу, оскільки саме для нього найбільш суттєвим є прояв нестійкості. Складність задачі обумовлена мішаним ейлерово-лагранжевим описом руху компонент системи, який треба брати до уваги при розгляді системи в рамках нелінійної моделі. Також, в моделі враховано вплив сили Кориоліса на динамічний процес. Перехід до спрощеної моделі в амплітудних параметрах коливань $c_i(t)$ виконано на основі методу Канторовича, застосованого до континуальної функції Лагранжа. Нелінійна дискретна модель набуває вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{\frac{7}{2}\rho V^2 - PF}{(\rho + \mu)N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu)N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) \\ & + \Omega^2 c_r - \frac{2\rho \dot{V}}{(\rho + \mu)N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \frac{1}{N_r} \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k (d_{jkir}^2 - d_{krij}^2) \\ & - \frac{EJ}{(\rho + \mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk r}^6 - \frac{2EF}{(\rho + \mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk r}^3 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu)N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk r}^4. \end{aligned}$$

Сили пружності і внутрішнього тиску рідини виступають як поновлююча силу, що сприяє відновленню прямолінійної форми трубопроводу. Сприяють подальшому викривленню трубопроводу відцентрові сили руху рідини на криволінійних

участках та обертання трубопроводу. Сила Кориоліса для різних фаз може або допомагати або уповільнювати дія поволюючих сил, так саме як і нелінійні члени. Швидкість руху рідини задається наступною формулою $V = 10 + a \sin(\omega t)$. Частота обертання трубопроводу постійна і дорівнює 12π . Розглянуто окремо вплив параметрів a та величини ω на характер коливань. Отримано наступні результати. При збільшенні частоти пульсації аналогічно до збільшення швидкості течії відбувається зростання амплітуди та періоду коливань з подальшим переходом до коливань навколо прямолінійного стану з великими амплітудами. Частота коливань в системі зменшується і система наближається до втрати стійкості.

Автори

Микола Миколайович Сапон — аспірант 4-го року навчання, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: kolya.sapon@gmail.com

Перевірка рівності двох компонентів в моделі суміші зі змінними концентраціями за цензуrowаними даними

В. Г. Симонова

Ми розглядаємо суміш, яка складається з M компонентів.

$$P\{\xi_j \in A\} = w_j^1 H_1(A) + w_j^2 H_2(A) + \dots + w_j^M H_M(A),$$

де H_i - розподіл компонента суміші, w_i - ймовірності змішування (mixing probabilities, концентрації компонент), M — кількість компонентів суміші. В нашій моделі для кожного (j -го, $j = 1, \dots, n$) спостереження існує змінна, яка досліджується Z_j , та момент цензурування Y_j , тому наші спостереження виглядають як $\xi_j = (X_j, \delta_j)$, де $X_j = \min(Z_j, Y_j)$ та $\delta_j = I\{Z_j < Y_j\}$ (індикатори відсутності цензурування). Метою роботи є перевірка рівності розподілів двох компонентів, про розподіли інших компонентів припущень немає.

Перевірка гіпотези H_0 : розподіли Z для l -го і k -го компонентів однакові, організована наступним чином.

1) Рахуємо вагові коефіцієнти за формулою:

$$a_j^k = \frac{1}{\det G_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+k} \gamma_{km} w_j^m,$$

де $G_n = (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j^m w_j^l)_{l,m=1}^M$, γ_{km} - це km -мінор G_N

2) Впорядковуємо спостереження у порядку зростання X_j разом δ_j і a_j^k та обчислюємо оцінку Каплана-Мейера за формулою для кожної компоненти:

$$\hat{F}^{KM}(x) = 1 - \prod_{X_{[i]} \leq x} \left(1 - \frac{a_j^k \tilde{\delta}_j}{n - \sum_{X_{[j]} \leq X_{[i]}} a_i^k}\right)$$

3) Виправляємо зважені емпіричні функції $\hat{F}_N^+(x, a) = \min(1, \sup_{y < x} F_N(y, a))$

4) Для перевірки гіпотези використовуємо модифіковану статистику Колмогорова-Смирнова: $T_n = \sup_x |\hat{F}_k^{KM}(x) - \hat{F}_l^{KM}(x)|$.

5) Тест відхиляє H_0 , якщо T_n більше порога. Поріг тесту визначається за допомогою бутстреп-техніки.

Автори

Симонова Вероніка Геннадіївна — студентка 2-го курсу магістратури, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: Simonovanika095@gmail.com

Про розв'язність одновимірних крайових задач у просторах Соболева-Слободецького

Т. Б. Скоробогач

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbf{R}$ та числові параметри $\{m, l\} \subset \mathbf{N}$, $s \in (1, \infty) \setminus \mathbf{N}$, $1 \leq p < \infty$. Розглянемо лінійну крайову задачу:

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \quad By = c, \quad (1)$$

де матриця-функції $A(\cdot) \in (W_p^s)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^s)^m$, вектор $c \in \mathbf{C}^l$, лінійний неперервний оператор $B: (W_p^{s+1})^m \rightarrow \mathbf{C}^l$, а шуканою є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{s+1})^m$.

Неоднорідній крайовій задачі (1) відповідає лінійний оператор

$$(L, B): (W_p^{s+1})^m \rightarrow (W_p^s)^m \times \mathbf{C}^l. \quad (2)$$

Позначимо через $[BY]$ числову матрицю розмірності $(m \times l)$, у якій i -й стовпчик є результатом дії оператора B на i -й стовпчик матриці-функції $Y(\cdot)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Прямокутну числову матрицю

$$M(L, B) := [BY] \in \mathbf{C}^{m \times l}, \quad (3)$$

будемо називати *характеристичною* матрицею крайової задачі (1).

Отримано такі результати (див. [1]):

— доведено, що лінійний оператор (2) є обмеженим і фредгольмовим з індексом $m - l$;

— доведено, що вимірності ядра та коядра оператора (2) дорівнюють відповідно вимірності ядра та коядра характеристичної матриці (3);

— встановлено достатні умови збіжності характеристичних матриць послідовності крайових задач.

Список літератури

- [1] Михайлець В. А., Скоробогач Т.Б. Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболева-Слободецького // Доп. НАН України — 2020, № 5.

Автори

Тетяна Богданівна Скоробогач — аспірантка 3-го курсу, кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, КПІ ім. І.Сікорського, Київ, Україна; E-mail: tetianaskorobohach@gmail.com

Володимир Андрійович Михайлець — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач лабораторії диференціальних рівнянь з частинними похідними, Інститут математики НАН України, Київ, Україна; E-mail: mikhailets@imath.kiev.ua

The Effect of Immediate Factors of Production on Per Capita GDP in Rich and Poor countries

I. N. Yaroshko

GDP per capita is an important indicator of country's economic performance and of change in a nation's living standards over time, since it measures a person's welfare. To our knowledge, several studies provide empirical estimates of the effect of education expenditure on Per capita GDP in developing countries. [1] study the effect of education expenditure, total labor force, gross primary enrollment, gross secondary enrollment, exports on Per capita GDP in developing countries. [2] provide estimates for Turkey and confirm results of existing a statistically significant bi-directional relationship between GDP per capita and the school enrollment rate at the primary level. Research shown a direct relationship between the health expenditures per capita and GDP per capita. Our study covers 112 countries as of 2014. We use a data from the World bank as well as Human Development Report data. Our dependent variable is the log of per capita GDP (in 2010 US\$). Our variables of interest are total government expenditure on education, % of GDP (because of its role in enhancing human capital). We hypothesize that an increase in education expenditure is expected to enhance enrollment and therefore positively influence on labor productivity and hence on GDP per capita. Thus we may expect positive sign for labor. As a result of higher labor productivity, output is expected to increase. Also, we assume that increase in health expenditure may potentially have a positive effect on GDP per capita (since it improves human capital). Higher level of human capital improves productivity and productivity increases output, all else equal. As a result, exports of goods and services increases. Based on these assumptions, we specify the logarithm of per capita GDP equation as:

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \quad (1)$$

Y - logarithm of per capita GDP (in constant 2010 U.S. dollars); x_1 - education expenditure (% of GDP); x_2 - labor force (is the proportion of the population ages 15 and older that is economically active); x_3 - gross enrolment ratio, primary (% of primary school-age population); x_4 - gross enrolment ratio, secondary (% of secondary school-age population); x_5 - exports of goods and services (% of GDP); x_6 - gross capital formation (% of GDP); x_7 - current health expenditure (% of GDP). To test the equations, we used Q test for normality, Breusch-Pagan test for heteroscedasticity, t-test (in particular robust) for testing statistical significance of the coefficients, F-test for testing the overall goodness of fit of the model, VIF to measure multicollinearity. Our findings show that in rich countries an investment in education have a positive effect on per capita GDP.

References

- [1] Appiah, The Effect of Education Expenditure on Per Capita GDP in Developing Countries.
- [2] Gumus S., Kayhan S., The Relationship between Economic Growth and School Enrollment Rates
- [3] Agenor, Health and infrastructure in a model of endogenous growth.

Authors

Yaroshko Iryna Nykolaevna — 2nd year Master's degree student, Mechanics

and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Kiev, Ukraine;
E-mail: iyaroshko@kse.org.ua

Секція «Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз»

Comparison of Machine Learning Models for Self-driving Cars

A. Andriiko

This article compares two different models for car behavior cloning for self-driving cars. Behavior cloning is the problem of coping human driving behavior by self-driving vehicle. This article considers following models: road lines detection based model without machine learning and deep learning model using Convolutional neural network (CNN).

Road lines detection based model

Road lines detection based model is simple model, because it uses only classical computer vision techniques and doesn't use machine learning or deep learning. This model works with the single image from car camera and based on it makes a decision about steering angle in the given moment of time. Consider main stages of the model:

- Grayscale
- Gauss blur
- Edge detection (Canny edge detector)
- Picking region of interest with the road
- Road line detection (Hough transform)
- Averaging left handed and right handed lines
- Steering angle calculation

Advantages: Simple, don't require dataset, work good on straight parts of the road. Disadvantages: Requires good image quality to detect the lines, performs bad on hard road parts and sharp turns.

CNN based model

Second model used CNN which consumes image from car camera and return steering angle and acceleration as a result. Advantages: Works good on whole route, handles turn of any complexity, manages speed and steering wheel. Disadvantages: Requires big dataset, time and resources to train the model, relies on the data quality

References

- [1] Deep Learning A Practitioner's Approach, Josh Patterson, Adam Gibson, 2017, O'Reilly Media, ISBN: 9781491914236

Author

Andrii Andriiko — 2nd year Master student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: aandriyko97@gmail.com

Система визначення осанки людини за допомогою Microsoft Kinect V2

В. П. Дмитренко

У зв'язку із сидячим образом життя та збільшенням проблем спини виникає потреба контролю осанки людини [1]. Зазвичай для цього використовують

електромагнітні- або фотомітки розміщені на спині. Далі, за допомогою системи електромагнітних джерел або системи камер відповідно, визначаються координати міток у просторі [2]. Обидва методи дуже точні, проте вимагають значних витрат (ціни починаються від тисяч доларів). Виникає потреба у дешевшому способі визначення осанки, один з них і розглянемо.

Microsoft Kinect був створений для відтворення рухів гравця у іграх Xbox. Для цього використовується інфрачервона камера з можливістю визначення відстані до об'єкту, а також розпізнавання 25 опорних точок на тілі людини в реальному часі, що і робить його придатним для нашої задачі [2][3].

Було створену систему, яка у режимі реального часу показує положення спини. Людина аналізує його (за кутами викривлення у зоні шиї, грудному та поперековому відділах) та корегує свою осанку. Для цього Microsoft Kinect розташовують паралельно площині спини на відстанні 1.5 - 2 м. За допомогою відстаней до точок спини, а також положенням плечей, шиї та хребта створюється проєкція спини. Потім відбувається фільтрація методом к найближчих сусідів для уточнення результату. На основі даних про точність сенсора [3] було пораховано, що точність кожної з точок проєкції спини ± 3 см.

Також було розроблено додаткову систему, яка на основі даних з акселерометра і гіроскопа визначає стабільність осанки - "кількість" [4] руху за останню хвилину. При перевищенні певного порогу осанка вважається нестабільною і людині рекомендується її змінити.

Список літератури

- [1] S. Vatan "Low Back Pain and Posture", *Clinical Rheumatology*, no. 13, pp. 308-312, 1999
 - [2] A.P.G. Castro "Evaluation of spinal posture using Microsoft Kinect", *Porto Biomedical Journal*, volume 1, issue 2, pp. 18-22, 2017
 - [3] Lin Yang "Evaluating and Improving the Depth Accuracy of Kinect for Windows v2", *IEEE Sensors Journal*, volume 15, issue 8, pp. 4275-4285, 2015
 - [4] Wai Yin Wong "Detecting spinal posture change", *Gait & Posture*, no. 27, pp. 168-171, 2008
-

Автори

Дмитренко Віталій Павлович — студент 4-го курсу, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: dmitrenko.c@gmail.com

Атаки типу Блейхенбахера на узагальнені схеми Ель-Гамалія

В. М. Зінькова

Дослідницьку роботу присвячено побудові атак типу Блейхенбахера на узагальнені схеми цифрового підпису Ель-Гамалія.

Переважна більшість відомих атак не розглядають узагальнені варіанти даної схеми. Метою даної роботи було дослідження питання побудови атак типу Блейхенбахера на узагальнені схеми цифрового підпису Ель-Гамалія.

Схема цифрового підпису Ель-Гамалія для заданого повідомлення m за допомогою секретного ключа x та одноразового ключа k обчислює підпис з двох чисел (r, s) . Узагальнена схема Ель-Гамалія для обчислення підпису використовує співвідношення $Ak \equiv B + Cx \pmod{q}$, а для його перевірки – співвідношення $r^A \equiv g^B y^C \pmod{p}$, де p, q, g – відкриті фіксовані параметри схеми, y – відкритий ключ, A, B, C – функції

від значень m, r, s , через які обчислюється цифровий підпис. Метою атаки Блейхенбахера є підробка для деякого повідомлення m' правильного цифрового підпису (r', s') без знання секретного ключа.

У роботі розглядалось чотири класи узагальнених схем Ель-Гамалія. Для першого класу, в якому значення A, B, C обираються серед значень $\pm m, \pm r, \pm s$ (загалом 48 схем) показано, що вони не стійкі до оригінальної атаки Блейхенбахера. У трьох інших класах, які розглядалися, значення A, B, C обираються серед значень $\pm mr, \pm s, D, \pm ms, \pm r, D \pm rs, \pm m, D$, де D – деяка зафіксована константа; кожен клас містить 24 схеми. Для усіх схем були побудовані атаки типу Блейхенбахера, використовуючи три різні методи модифікації частини r цифрового підпису. Виявилось, що для деяких схем відомі методи захисту від атаки Блейхенбахера не працюють.

У результаті дослідження було побудовано атаки типу Блейхенбахера на кожну зі 120 реалізацій узагальненої схеми цифрового підпису Ель-Гамалія. Показано, що для усіх реалізацій треба передбачати та розробляти механізми захисту від даної атаки.

Результати роботи можуть бути використані для аналізу існуючих схем цифрового підпису, включно з діючими стандартами, та створення нових надійних криптосистем.

Автори

Валентина Миколаївна Зінькова – 10 клас, Технічний ліцей НТУУ “КПІ”, Київська Мала академія наук, Київ, Україна; E-mail: valentinazinkova5@gmail.com

Розробка моделі автоматизації конкурентної розвідки стартапів

В. А. Іваненко

Надзвичайно важливою і складною задачею сучасних стартапів є збір інформації та дослідження потенційних конкурентів. На основі цих даних, приймаються життєво важливі для стартапа рішення, такі як: вибір бізнес моделі, зниження витрат на впровадження іновачій, зменшення часу на підбір потенційних інвесторів, передбачення змін попиту, вибір цільової аудиторії та інші. Для вирішення цих задач застосовуються методи конкурентної розвідки (Competitive intelligence). Існує декілька визначень конкурентної розвідки, тому під даним означенням я буду розуміти - постійний процес збору та аналізу інформації про діяльність ваших конкурентів та загальних тенденцій бізнесу для покращення цілей вашої власної компанії[1].

Більшість компаній покладаються лише на первинні джерела інформації, які є повністю достовірними та не потребують складної попередньої обробки, але більшість первинних джерел інформації конкурентної розвідки не знаходяться в публічному доступі, тому основним доступним джерелом є вторинні джерела інформації, такі як: публікації, статті, книги та відгуки в соціальних мережах.

При створенні моделі автоматизації конкурентної розвідки я виділив наступні етапи обробки вторинних даних[2]:

- Пошук джерел за допомогою посилань на стартапи, які мають аналогічну індустрію, та посилань на всіх інвесторів, які мають хоча б одну інвестицію в дану індустрію.
- Попередня обробка даних, яка складається з:
 - Level Класифікації всіх отриманих джерел інформації на достовірні та недостовірні дані
 - Сентимент-аналіз текстів, та видалення аномально позитивних та негативних джерел, так як на ці джерела можуть впливати зовнішні факти і данні з них не придатні для подальшої обробки
 - Пошук та ідентифікація корпусу даних

- Розпізнавання іменованих сутностей та кількісний аналіз тексту
- Усунення неоднозначності в отриманих даних та перевірка людиною, так як потрібна висока якість результатів моделі
- Аналіз потенційних конкурентів

Представлена модель дозволяє автоматично, за допомогою методів інтелектуального аналізу текстів, згенерувати частину закритої інформації первинних джерел про потенційних конкурентів та визначити зміни попиту цільової аудиторії.

Список літератури

- [1] Kahaner L. *Competitive Intelligence: How To Gather Analyze And Use Information To Move Your Business To The Top*, (1997) – 16p.
- [2] Shah, P.K., Perez-Iratxeta, C., Bork, P. *et al.* Information extraction from full-text scientific articles: Where are the keywords? *BMCBioinformatics* 4, 20(2003) – 2p.

Автори

В'ячеслав Анатолійович Іваненко — студент 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: iuanenkova@gmail.com

Грошові перекази мігрантів, як чинник розвитку української економіки

А. В. Калашникова

Актуальність теми дослідження для України пояснюється тим, що глобалізація світової економіки, відкриття кордонів і розширення діяльності транснаціональних корпорацій активізували міжнародні процеси трудової міграції. В країнах працевлаштування мігранти забезпечують їх економічне зростання, а на своїй батьківщині покращують матеріальне забезпечення рідних домогосподарств і суспільства в цілому. Важливим джерелом розвитку мігрантів, їх домогосподарств та країн, що розвиваються загалом стають грошові перекази.

За даними Міжнародної організації з міграції, кількість мігрантів у світі за останні 40 років зростає у 2,5 рази й офіційно вже перевищила 200 млн. осіб. Міграційно-трудова процес стали важливим чинником розвитку світового господарства. Головним мотивом для мігрантів є одержання за кордоном доходів та фінансова підтримка своїх домогосподарств на батьківщині. В окремих країнах грошові трансферти міжнародних мігрантів сягають 20 – 30% доходів місцевого населення, 30 – 40% ВВП, 70 – 100% державного бюджету [1, с. 37].

Грошові перекази є важливою складовою фінансової системи держави, а також істотним джерелом фінансових ресурсів населення у багатьох країнах. У сучасному світі, що характеризується зростанням рівня відкритості економік різних країн, вільним рухом робочої сили, капіталів і товарів, грошові перекази є невід'ємною складовою як зовнішніх фінансових потоків, так і внутрішніх. Відповідно, перекази є також важливою складовою фінансів населення країни, невід'ємною частиною його фінансового потенціалу [2, с. 131].

Українські міграційні потоки є набагато більш складними, ніж прийнято вважати. Цей висновок збігається з міграційними профілями в раніше обстежених країнах. Міграційні потоки в Україні, у меншій мірі, складаються із міжнародних потоків короткострокових або довгострокових трудових мігрантів, і переважно складаються із внутрішніх мігрантів, які змінюють місце проживання з метою працевлаштування.

В результаті опитування, було підраховано загальну кількість українських громадян, які залучені до міжнародної трудової міграції (особи, які виїхали за кордон

з метою працевлаштування) у 2017 - 2018 роках, що становить приблизно 688 000 осіб. З них близько 423 800 є довгостроковими трудовими мігрантами, в той час як 264 400 громадян України є короткостроковими трудовими мігрантами. На додаток до цих трудових мігрантів, приблизно 25 400 українців отримують освіту за кордоном і 18 200 осіб виїхали за кордон з метою воз'єднання сім'ї [3, с. 79].

Грошові перекази мають позитивний вплив на макроекономічну стабільність в Україні. Вони допомагають фінансувати дефіцит торгового балансу країни, сприяють фіскальній консолідації та підтримують вартість валюти. Такі трансферти між фізичними особами є економічно значущими для багатьох приймаючих країн, зокрема і для України.

В абсолютному об'ємі, міжнародні економічні інститути відводять Україні дев'яте місце серед країн з середнім рівнем доходу, які отримують грошові перекази, у світі, та перше місце у Східній Європі та колишньому Радянському Союзі. За офіційними оцінками, щорічні грошові перекази, у тому числі відправлені через офіційні та неофіційні канали, збільшуються одночасно із зростанням кількості трудових мігрантів [4, с. 187].

Перекази мігрантів не є якимось кардинально новим фактором глобальних фінансових потоків, новим є їх масштаб і значення для економіки країн, що розвиваються, та країн з перехідною економікою. У численних випадках грошові перекази не відображаються в системі національних рахунків, що унеможливає їх коректну оцінку, виявлення тенденцій розвитку даного явища та аналізу його впливу на фінансову систему країни. Це пов'язано з тим, що у багатьох випадках мігранти, які здійснюють перекази, можуть бути працевлаштовані у неформальному секторі економіки, а самі перекази відбуваються поза межами фінансової системи [5, с. 232].

Досвід інших країн показує, що українська влада на національному та субнаціональному рівні (обласному та місцевому) повинні взяти на себе більший контроль над своєю координаційною роллю в галузі управління міграцією та суміжними питаннями міграції та розвитку, а також взяти на себе відповідальність за розбудову технічного потенціалу, щоб бути в змозі підтримувати таке управління й пов'язані з ним заходи.

Українські трудові мігранти та члени діаспори, безсумнівно, мають достатній потенціал, щоб підтримати свою країну, й потрібно вивчити можливість проведення додаткових заходів. Наприклад, діаспора може відігравати більшу роль у покращенні національного іміджу України за кордоном за допомогою культурної, інтелектуальної, ділової та спортивної діяльності. Українські трудові мігранти та діаспора можуть зробити значний внесок у науковий і технологічний розвиток, а також у сектор туризму України. Окрім того, можна докласти більше зусиль для використання потенційних переваг від повернення кваліфікованих громадян (постійного, тимчасового).

Однак є кілька передумов для встановлення успішної співпраці між Україною та українськими трудовими мігрантами. Найважливішою з них є клімат взаємної довіри. Проаналізовані дані вказують на те, що серед трудових мігрантів є значна кількість осіб, що регулярно відкладають заощадження, і підприємців, які могли б зробити великі й малі інвестиції в українські підприємства, однак багато хто не довіряє діловому середовищу в Україні, а також державним установам. Як і будь-який інший інвестор, трудові мігранти вимагають стабільної макроекономічної ситуації та нормативно-правової бази, а також низки зрозумілих і привабливих інвестиційних можливостей.

Список літератури

- [1] Гайдучський А. П. Теоретичні й методологічні підходи до ідентифікації грошових переказів мігрантів як різновиду капіталу / А. П. Гайдучський // Банківська справа. – 2008. – № 6. – С. 34-58 (1,2 друк. арк.).
- [2] Куценко В. О. Тенденції розвитку світової системи грошових переказів / В. О. Куценко // Збірник наукових праць Національного університету державної

податкової служби України (Електронне наукове фахове видання). – 2010. – 2. – С. 131–138.

- [3] Міжнародна організація з міграції. Міграція як чинник розвитку в Україні. – 2016. – 116 с.
- [4] Міжнародна організація з міграції (МОМ) Довідник 2011 р. «Розробка дорожньої карти для залучення діаспор до розвитку: Посібник для політиків та приймаючих країн», МОМ, Женева. – 399 с.
- [5] Пітюлич М. І. Проблеми трансформації грошових переказів трудових мігрантів у інвестиційні ресурси / М. І. Пітюлич, Т. Ю. Ковач // Науковий вісник НЛТУ України. – 2011. – Вип. 21.10. – С. 232–239.

Автори

Анжеліка Володимирівна Калашникова — студентка 2-го курсу магістратури, ОП «Міжнародна економіка», Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: lovelyangela@ukr.net

Оптимізація параметрів підводного арбалету

Н. С. Коваленко

Жоден з виробників зброї для підводного полювання не наводить таких важливих величин як початкова швидкість гарпуна та максимальна дистанція враження, а також не вказує можливих шляхів модернізації даної зброї. Завдяки цьому, мисливці марно витрачають кошти, намагаючись покращити свої результати шляхом заміни штатних гарпунів на виготовлені з екзотичних матеріалів. У даній роботі здійснено математичне моделювання процесу пострілу з підводного арбалету. Метою досліджень є встановлення оптимальної густини матеріалу гарпуна, що забезпечить максимальну дальність враження, якнайменший час руху гарпуна до об'єкту полювання та найрівнішу траєкторію руху гарпуна в залежності від умов полювання. На основі другого закону Ньютона виведено формули швидкості гарпуна як при розгоні, так і при його русі після виходу з арбалету. В програмному забезпеченні Microsoft Excel створено математичну модель, за допомогою якої обраховано залежність швидкості руху гарпуна від його координати, залежність часу руху від координати та траєкторію руху. Створена математична модель дозволила всебічно дослідити процес, який досить складно вивчається експериментальними методами фізики. Нами встановлено, що найкращі характеристики на коротких дистанціях матиме арбалет з титановим гарпуном. Вольфрамовий гарпун можна рекомендувати для найбільших дистанцій та крупних об'єктів полювання, а арбалет зі сталевим гарпуном є універсальним.

Автор

Коваленко Надія Сергіївна — учениця 10 класу, гімназія № 59 імені О.М. Бойченка, Київська МАН, Київ, Україна; E-mail: kovalenko200450@gmail.com

Використання цифрових підписів для забезпечення анонімності у криптовалютах

Д. М. Лаба

В роботі розглядається розв'язання проблеми забезпечення анонімності у транзакціях в криптовалютах. Ця задача має важливе прикладне значення та цінність у сфері криптовалют.

У роботі розглядаються підходи до розв'язку даної задачі для декількох популярних анонімних криптовалют: Monero та ZCash.

На основі описаних підходів реалізовано декілька інструментів розробника для автоматичної та ручної маніпуляції графом залежностей.

У першій частині реалізований детальний аналіз та порівняння криптовалют ZCash та Monero[1]. В цій частині показано переваги та недоліки кожного з підходів, та теоретичне підґрунтя на якому вони базуються.

У другій частині запропоновано нову криптовалюту на базі Monero із використанням невідворотніх підписів[2]. Надається протокол, реалізація та сценарії для застосування.

Список літератури

- [1] CryptoNote v 2.0 October 17, 2013
 [2] Chaum D., van Antwerpen H. (1990) Undeniable Signatures. In: Brassard G. (eds) Advances in Cryptology — CRYPTO' 89 Proceedings. CRYPTO 1989. Lecture Notes in Computer Science, vol 435. Springer, New York, NY

Автори

Лаба Дмитро Мирославович — студент 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: dimal97psn@gmail.com

Single Shot Detection for Computer Vision

K. Landvytovych

This article is dedicated to SSD (Single Shot Detector) model. The main purpose of using this model in computer vision of its speed and accuracy. Instead of classification every position within the image, SSD takes only one single shot for detection objects on the picture it. The loss function consists of two terms: L_{conf} and L_{loc} where N is the matched default boxes.

$$L(x, c, l, g) = \frac{1}{N}(L_{conf}(x, c) + \alpha L_{loc}(x, l, g)) \quad (1)$$

The loss function consists of two terms: L_{conf} and L_{loc} where N is the matched default boxes.[1] Formulas for default boxes

$$L_{loc}(x, l, g) = \sum_{i \in Pos_{m \in \{x, cy, w, h\}}}^N x_{ij}^k smooth_{L1}(l_i^m - \hat{g}_j^m), \quad (2)$$

$$\hat{g}_j^m = (g_j^{cx} - d_i^{cx})/d_i^w, (\hat{g}_j^m = (g_j^{cy} - d_i^{cy})/d_i^w,$$

$$\hat{g}_j^w = \log\left(\frac{g_j^w}{d_i^w}\right) \hat{g}_j^h = \log\left(\frac{g_j^h}{d_i^h}\right)$$

L_{loc} is the localization loss which is the smooth L_1 loss between the predicted box (1) and the ground-truth box (g) parameters. These parameters include the offsets for the center point (cx, cy), width (w) and height (h) of the bounding box.

$$L_{conf}(x, c) = - \sum_{i \in Pos}^N x_{ij}^p \log(\hat{c}_i^p) - \sum_{i \in Pos}^N \log(\hat{c}_i^0), \text{ where } \hat{c}_i^p = \frac{exp(\hat{c}_i^p)}{\sum_p exp(\hat{c}_i^p)} \quad (3)$$

L_{conf} is the confidence loss which is the softmax loss over multiple classes confidences (c). (α is set to 1 by cross validation.) $x_{ij}^p = 1,0$, is an indicator for matching i-th default box to the j-th ground truth box of category p.

Making the following additional thoughts on SSD model project:

- more default boxes equals more accurate detection, although there is an impact on speed
- SSD produces worse performance on smaller objects, as they may not appear across all feature maps. Increasing the input image resolution resolve this problem but partially.

References

- [1] SSD: Single Shot MultiBox Detector Wei Liu, Dragomir Anguelov, Dumitru Erhan, Christian Szegedy, Scott Reed, Cheng-Yang Fu, Alexander C. Berg, 2016 <https://arxiv.org/abs/1512.02325>
-

Author

Khrystyna Landvytovych — 2nd year Master student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: crofty.land@gmail.com

Асистент для напівавтоматичного доведення фрагментів програмного коду

Т. А. Мамедов

За останні роки не перестає зростати інтерес до верифікації програм. Зокрема, активно підтримуються групами дослідників і програмістів такі системи, як: Dafny[1], Viper[2], Mizar[3], Isabelle, бібліотека SMT-LIB[4] та інші. Більша кількість таких систем має свої мови опису програмного коду та додаткових елементів семантики та синтаксису, які дозволяють перевіряти правильність програм на базі логік першого порядку або їх модифікаціях.

У зв'язку з цим існує проблема математично цілісного та адекватного подання програмного коду тією чи іншою системою верифікації. Тому, для вирішення даної проблеми пропонується система напівавтоматичного доведення програмного коду, що заснована на композиційно-номінативних логіках[5]. Дана система дозволяє на основі квазіарних функцій та предикатів проводити верифікацію фрагментів програмного коду в узагальнених логіках Флойда-Хоара[6].

Даний підхід дає можливість описати програми та їх властивості більш природно. При цьому, для подання передумови, післяумови та фрагменту коду використовується спеціальна формальна мова QuaLa (Quasiary Language).

Таким чином, розроблена система на базі композиційно-номінативних логік дозволяє більш адекватно доводити властивості програм, семантика яких подається квазіарними функціями та предикатами.

Список літератури

- [1] Leino K., Rustan M. "Developing verified programs with Dafny." In 2013 35th ICSE, pp. 1488-1490. IEEE, 2013.
- [2] Pretschner A. "Viper: A Verification Infrastructure for Permission-Based Reasoning." Dependable Software Systems Engineering 50 (2017): 104.
- [3] Wenzel Markus, and Freek Wiedijk. "A comparison of Mizar and Isar." Journal of Automated Reasoning 29, no. 3-4 (2002): 389-411.

- [4] Barrett C., Aaron S., and Cesare T. "The smt-lib standard: Version 2.0." In Proceedings of the 8th SMT Workshop, vol. 13, p. 14. 2010.
- [5] Nikitchenko Mykola, Stepan Shkilniak, and Valentyn Tymofeiev. "Satisfiability Problems in Quasiary Program Logics."
- [6] Nikitchenko Mykola, Ievgen Ivanov, Artur Kornilowicz, and Andrii Kryvolap. "Extended Floyd-Hoare logic over relational nominative data." In ICTERI, pp. 41-64. Springer, Cham, 2017.

Автори

Мамедов Тогрул Алірзайович — аспірант 4-го року навчання, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: tohrul@ukr.net

Дослідження (2, 3)-представлення чисел

І. А. Овчаренко

В роботі досліджується (2, 3)-представлення чисел та високошвидкісні завадостійки коди на їх основі [1]. Ця задача має актуальне прикладне значення, адже у зв'язку зі збільшенням ширини каналів зв'язку постають нові потреби у високошвидкісному завадостійкому кодуванні.

Префіксне кодування на основі (2, 3)-представлення чисел належить до класу самосинхронізуючих префіксних кодів змінної довжини що завдяки введеним в [2] швидкісним алгоритмам дозволяють виправляти одну чи з ймовірністю більше 90% дві помилки.

У першій частині роботи досліджується швидкодія (2, 3)-кодів, доцільність їх використання та можливі покращення алгоритму. Також проводиться порівняльний аналіз із іншими завадостійкими кодами та розглядається ефективність їх взаємодії.

У другій частині досліджується можливість використання (3, 2)-представлення чисел запропоноване в [1] по аналогії з (2, 3)-кодами та порівняння їх ефективності.

Всі реалізації виконані мовою програмування C++.

Список літератури

- [1] Анисимов А.В. Представление чисел в смешанном базисе (2,3) // «Кибернетика и системный анализ». – 2009 . – № 4. – С. 3-18 2
- [2] Анисимов А.В., Завадский И.А., Помехоустойчивое префиксное кодирование с помощью нижнего (2,3) - представления чисел
- [3] Anisimov A.V. "Prefix Encoding by Means of the (2,3)-Representation of Numbers" // IEEE Transactions on Information Theory. – 2013. – vol. 59. – №4. – pp. 2359-2374

Автори

Овчаренко Ірина Анатоліївна — студентка 2-го курсу ОС "Магістр", факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: iraovchrnk@gmail.com

Valuation of high-growth start-up companies

A. Proutorov

Unicorns have by now become not just a subject of fairy tales but of a serious business and academic discussion. The recent study by Strebulaev and Gornall (later

referred to as S&G) (2017) of 135 US unicorns established that ‘the conventional post-money valuation gives a valuation on average 50% above fair value, with 15 being more than 100% above.’ They attributed this overvaluation to the complex cash flow rights structure which, according to Kaplan and Stromberg (2003) is the ‘distinguishing feature of VC financing’. Gompers et al (2020) showed that the CFOs of large companies generally use discounted cash flow (DCF) as the major valuation tool. I will use the Damodaran’s (2009) adaptation of the DCF2S because of its simplicity, accuracy and credibility. The following 5 companies have been used as a sample: Uber, WeWork, Spotify, Lyft and Snap. The availability of information about their funding and valuation renders it easier to conduct the DCF analysis and compare it with up-round financiers’ faux-value. This paper aimed to test and expand on the key result of the S&G research regarding the up-round overvaluation of the unicorns. For this purpose, I appealed to the DCF model which is the industry’s best practice (Copeland et al.). Also, bearing in mind the problems inherent to the macro approach adopted by the S&G, I applied the model to the set of 5 rapidly-growing companies in order to study the dynamics of overvaluation. The key result from this coursework confirmed that unicorns indeed tend to be overvalued, particularly

on the DCF basis. However, my work has shown that the gap between the ‘fair’ value and the post-money value widens substantially throughout the unicorns’ lifespans. Also, in contrast to the S&G

focus on the cash flow rights structure, I stressed the ‘sliver extrapolation’ and media attention as main reasons for the overvaluation, especially before the IPO. That said, I believe that both this paper and the S&G pursue the same goal: making investors’ community more cautious when valuing the fast-growing companies. After all, unicorns are now studied by intelligent investors, not fantasists. Or are they?

References

- [1] Clark, P. and Mills, R. (2013). Masterminding the deal. Kogan Page Limited, pp. 191-217.
- [2] Copeland, T., Koller, T. and Murrin, J. (2000, 1994). Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies. New York, Wiley.
- [3] Strebulaev, I. and Gornall, W. (2017). Squaring Venture Capital Valuations with Reality. Journal of Financial Economics (JFE).

Authors

Anton Proutorov — 1st year Master’s degree student, Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko national university of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: antonproutorov1998@gmail.com

Мовно незалежні паралельні асинхронні рекурсивно керовані системи

Р. Д. Сакевич

У роботі розглядається розв’язання проблеми побудови мовно незалежної реалізації системи ПАРКС. Ця задача має важливе прикладне значення в алгоритмах розроблених для роботи на розподілених системах.

Розглядаються підходи та проблеми до розв’язку даної задачі для декількох популярних мов програмування: Java, Python. А також складнощі побудови мовно незалежної системи.

Для практичного використання відходів описаних в роботі приводиться реалізація бібліотек для мов програмування Java та Python, а також кілька імплементація кількох розподілених алгоритмів на основі цих бібліотек.

В основу роботи покладено підхід опису розподіленого алгоритму схожий на Communicating Sequential Processes [1]. Аналогію також можна провести з системою ПАРКС [2].

У першій частині роботи сформульовано задачу що розв'язують розподілені алгоритми, та подолали відомих підходів. Також показано паралель між паралельними алгоритмами та розподіленими алгоритмами.

Друга частина розповідає про узагальнення поняття корутини (coroutine) для реалізації кооперативних алгоритмів. Ця абстракція дозволяє компонувати паралельні обчислення і виконувати їх на різних частинах обчислювального кластера. В кінці пропонується опис мовно незалежної системи що дозволяє виконувати кооперативні алгоритми написані різними мовами програмування на спільному кластері.

Список літератури

- [1] С. А. Р. Ноаре. 1978. Communicating sequential processes. Commun. ACM 21, 8 (August 1978), 666–677.
 - [2] Anisimov, A.V., Derevyanchenko, A.V. The System PARCS-JAVA for Parallel Computations on Computer Networks. Cybern Syst Anal 41, 17–26 (2005).
-

Автори

Сакевич Руслан Дмитрович — студент 2-го курсу магістратури, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна; E-mail: xlionell@gmail.com

Effective data sampling for interactive data preparation

O.S. Chuchuk

SAP Data Hub is one of the tools for data operations and orchestration that enables agile management of data in a diverse landscape across the organisation. In order to make operations on data more comfortable for users, these products need data sampling functionality for providing a synopsis of massive data.

Data sampling is a statistical analysis technique and quantitative research methodology used to select, manipulate and analyse a representative subset of data points to identify patterns and trends in the larger data set being examined.

Population is the collection of the elements which has some or the other characteristic in common. Number of elements in the population is the size of the population. Sample is the subset of the population. The process of selecting a sample is known as sampling. Number of elements in the sample is the sample size.

Among all sampling algorithms and techniques, we can make a distinction between probability and non-probability sampling. The difference lies between the above two is whether the sample selection is based on randomisation or not.

Some examples of probability sampling algorithms: Random Sampling, Bernoulli and Poisson Sampling, Stratified Sampling, Cluster and Systematic Sampling.

Examples of non-probability sampling algorithms are: Quota Sampling, Purposive Sampling, Referral Sampling, Adaptive Sampling.

The following results were obtained:

- Comprehensive research of state-of-the-art data sampling algorithms and techniques was performed. Four of them were chosen for deeper research P Random Sampling, Poisson Sampling, Stratified Sampling, Adaptive Sampling.

- An estimator for comparing data samples obtained via different algorithms was developed.

- A local testing system for data sampling that has five modes (Random Sampling implemented in two different ways: Advanced Random Sampling as well as Reservoir Sampling) was developed.

- The measures of progressive errors (representativeness) and time were taken and stored which can serve as a base for further analysis and comparison of data sampling algorithms.

Authors

Olha Serhiivna Chuchuk — 2nd year Master student, Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: olya2103chuchuk@gmail.com

Tereshchenko Vasyl Mykolaiovych — Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Head of Mathematical Informatics Department, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine; E-mail: vtreshch@gmail.com

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

**Матеріали XVIII Міжнародної
науково-практичної конференції**

«Шевченківська весна – 2020»

квітень 2020 р., м. Київ, Україна

Taras Shevchenko National University of Kyiv

**Proceeding of XVIII International
Scientific – Practical Conference**

«Shevchenkivska Vesna – 2020»

April 2020, Kyiv, Ukraine