Р. ХУДАЙБЕРГАНОВ, асп.
Ташкентский университет

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — сепарабельный случайный процесс с $M\xi(t) = 0$ и с функцией ковариации, представимой в виде

$$B(t, s) = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} f(t, \lambda)\overline{f(s, \mu)}\, F(d\lambda, d\mu),$$

где Λ — некоторое множество параметров λ, $F(A, A')$ — комплекснозначная функция множеств, аддитивная по обоим аргументам, положительно определенная и такая, что

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| < \infty,$$

а функция $f(t, \lambda)$ относительно t может быть доопределена в плоскости комплексного переменного до целой функции такой, что

$$C_f = \sup_{\lambda\in\Lambda}\ \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t, \lambda)| < \infty,$$

$$\sigma = \sup_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left.\frac{\partial^n f(t, \lambda)}{\partial t^n}\right|_{t=0}\right|} < \infty.$$

В дальнейшем, когда будем рассматривать случайное поле $\xi(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2)\in R_2$, будем предполагать, что оно сепарабельно и представимо в виде

$$\xi(t_1, t_2) = \int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} f_1(t_1, \lambda)\, f_2(t_2, \mu)\, Z(d\lambda, d\mu),$$

где $Z(d\lambda, d\mu)$ — случайная функция множеств на $\Lambda\times\Lambda$, такая, что $MZ(d\lambda, d\mu) = 0$ и

$$MZ(A_1, A_2)\overline{Z(B_1, B_2)} = F(A_1, A_2, B_1, B_2),$$

$F(A_1, A_2, B_1, B_2)$—комплексная функция множеств, аддитивная по всем аргументам, положительно определенная и такая, что

$$\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda}\int\limits_{\Lambda} |F(d\lambda_1, d\lambda_2, d\mu_1, d\mu_2)| < \infty.$$

Относительно функций $f_1(t_1, \lambda)$, $f_2(t_2, \mu)$ будем предполагать, что они могут быть доопределены в плоскости комплексного переменного до целых функций соответственно по t_1 и t_2 так, что

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\sup_{-\infty<t_1<\infty}|f_1(t_1, \lambda)|<\infty,\quad \sup_{\mu\in\Lambda}\sup_{-\infty<t_2<\infty}|f_2(t_2, \mu)|<\infty,$$

$$\sigma_1=\sup_{\lambda\in\Lambda}c_1(\lambda)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\partial^n f_1(t_1, \lambda)}{\partial t_1^n}\right|_{t_1=0}}<\infty, \tag{1}$$

$$\sigma_2=\sup_{\mu\in\Lambda}c_2(\mu)=\sup_{\mu\in\Lambda}\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{\partial^n f_2(t_2, \mu)}{\partial t_2^n}\right|_{t_2=0}}<\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathbf{H}_\alpha$ класс функций $H_q(z)$, удовлетворяющих условиям:

1) $H_q(z)$ — целая функция конечной степени $q\leqslant\alpha$;

2) $H_q(0)=1$.

С. Н. Бернштейном в связи с теоремой 3 [1, стр. 452] было замечено [1, стр. 452], что целая функция $f(t)$ конечной степени $\sigma\leqslant\alpha-q$, принимающая в точках $a_k=\frac{k\pi}{\alpha}$ ограниченные значения, допускает представление

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\,(t-a_k)}{\alpha\,(t-a_k)}H_q(t-a_k)f(a_k), \tag{3}$$

где $H_q(t)\in\mathbf{H}_\alpha$.

Очевидно, представление $f(t)$ при помощи функций из $\mathbf{H}_\alpha$ неединственное. Скорость сходимости к нулю разности

$$R_n(t)=f(t)-\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin\alpha\,(t-a_k)}{\alpha\,(t-a_k)}H_q(t-a_k)f(a_k)$$

при $H_q(t)\equiv 1$ равна скорости сходимости $\frac{1}{n}$ (см., например, [3]).

Для доказательств некоторых теорем мы будем опираться на следующую теорему из [1] и на полученную нами оценку остаточного члена в этой теореме.

Теорема [1]. Если $f(t)$ — целая функция конечной степени $\sigma\leqslant\alpha-q$, принимающая в точках $a_k=\frac{k\pi}{\alpha}$ ограниченные значения $|f(a_k)|\leqslant L<\infty$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, то $f(t)$ выражается формулой (3) (в случае абсолютной сходимости). Более того, для любого фиксированного $z=t+is$ при всех достаточно больших n

$$\left|f(z)-\sum_{k=-n}^{n}\frac{\sin\alpha\,(z-a_k)}{\alpha\,(z-a_k)}H_q(t-a_k)f(a_k)\right|<\varphi_1(z)\left[\frac{1}{n}+\frac{2\pi}{\alpha}(\alpha-\sigma-q)\,e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}\right], \tag{4}$$

где $\varphi_1(z) = \dfrac{8\alpha \overline{C}_f C_H e^{q|\mathrm{Im}\, z|}\,|\sin \alpha z|}{\pi^2(\alpha - \sigma - q)}$ — функция, ограниченная в любой ограниченной области изменения z,

$$\overline{C}_f = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)| < \infty, \quad C_H = \sup_{-\infty < t < \infty} |H_q(t)| < \infty.$$

Если $H_q(z) = \dfrac{\psi(z)}{z^k}$ (k — некоторое натуральное число, $C_\psi = \sup\limits_{-\infty < t < \infty} |\psi(t)| < \infty$) и $H_q(z) \in \mathbf{H}_\alpha$, то оценку (4) можно улучшить, а именно, верна оценка:

$$\left| f(z) - \sum_{l=-n}^{n} \frac{\sin \alpha (z - a_l)}{\alpha (z - a_l)} H_q(z - a_l) f(a_l) \right| <$$

$$< \frac{\varphi_2(z)}{n^k}\left[\frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha - \sigma - q)\, e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}\right],$$

где $\varphi_2(z) = \dfrac{8\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{k+1} C_f C_\psi e^{q|\mathrm{Im}\, z|}\,|\sin \alpha z|}{\pi(\alpha - \sigma - q)}$ — функция, ограниченная в любой ограниченной области изменения z.

Из этой формулы ясно, что для любых функций на $\mathbf{H}_\alpha$, $R_n(t)$ сходится к 0 не медленнее, чем $\dfrac{1}{n}$.

Примеры функции $H_q(z)$:

$$\frac{\sin qz}{qz}\left(\frac{\alpha}{q} = N > 1\right), \quad \frac{e^{iqz} - 1}{iqz}, \quad \frac{e^{i\beta z} - e^{i(\beta - q)z}}{i(q - \beta)z}\ (\beta < q), \quad \left(\frac{\sin \frac{\beta}{q} z}{\frac{\beta}{q} z}\right)^q,$$

q — целое число, $0 < \beta < \alpha - \sigma$. (5)

Построим интерполяционную формулу $\xi_n(t)$ для рассматриваемого процесса $\xi(t)$:

$$\xi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin \alpha (t - a_k)}{\alpha (t - a_k)} H_q(t - a_k)\, \xi(a_k). \tag{6}$$

Теорема 1. Если $\sigma = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) < \infty$, то для почти всех выборочных функций справедливо соотношение

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (t - a_k)}{\alpha (t - a_k)} H_q(t - a_k)\, \xi(a_k) \tag{7}$$

при любом фиксированном $\alpha > \sigma + q$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы из [1]

$$f(t, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (t-a_k)}{\alpha (t-a_k)} H_q (t-a_k) f(a_k, \lambda)$$

при всех λ, удовлетворяющих условию $c(\lambda) + q < \alpha$. Используя теорему о спектральном представлении случайных функций [2], имеем

$$\mathbf{M} | \xi(t) - \xi_n(t) |^2 = \mathbf{M} \left| \int_\Lambda \left[f(t, \lambda) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin \alpha (t-a_k)}{\alpha (t-a_k)} H_q (t-a_k) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times f(a_k, \lambda) \right] Z(d\lambda) \right|^2 = \int_\Lambda \int_\Lambda \left[f(t, \lambda) - \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin \alpha (t-a_k)}{\alpha (t-a_k)} H_q (t - \right.$$

$$\left. - a_k) f(a_k, \lambda) \right] \left[\overline{f(t, \mu)} - \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin \alpha (t-a_k)}{\alpha (t-a_k)} \times \right.$$

$$\left. \times \overline{H_q (t-a_k) f(a_k, \mu)} \right] F(d\lambda, d\mu).$$

Используя неравенство (4), получаем

$$\mathbf{M} | \xi(t) - \xi_n(t) |^2 < \varphi_1^2(t) \left[\frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\alpha} (\alpha - \sigma - q) e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}} \right]^2 \times$$

$$\times \int_\Lambda \int_\Lambda |F(d\lambda, d\mu)|.$$

Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} | \xi(t) - \xi_n(t) |^2 < \infty$, то ряд (7) сходится с вероятностью 1 при любом фиксированном t, причем он сходится равномерно в любом ограниченном интервале изменения t. Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку в рассматриваемом нами случае почти все выборочные функции $\xi(t)$ непрерывны [3].

Ковариационная функция случайного процесса $\xi(t)$ и функции $H_q(t)$ связаны соотношением

$$B(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (t-a_k)}{\alpha (t-a_k)} \cdot \frac{\sin \alpha (s-a_l)}{\alpha (s-a_l)} \times$$

$$\times H_q (t-a_k) \overline{H_q (s-a_l)} B(a_k, a_l).$$

Последовательность (6) может быть использована для аппроксимации в среднем квадратичном с заданной точностью $\varepsilon > 0$, даже если условие теоремы 1 не выполняется.

Теорема 2. Пусть фиксировано сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, пусть $f(t, \lambda)$ относительно t при любом $\lambda \in \lambda$ ограничена на вещественной оси и является целой функцией экспоненциального типа с конечным показателем $\sigma(\varepsilon) = \sup\limits_{\lambda \in \Lambda(\varepsilon)} c(\lambda)$ лишь для $\lambda \in \Lambda(\varepsilon)$, где $\Lambda(\varepsilon) \subset \Lambda$ такое, что

$$\int\limits_{\overline{\Lambda(\varepsilon)}} \int\limits_{\overline{\Lambda(\varepsilon)}} |F(d\lambda, d\mu)| < \frac{\varepsilon}{d} \text{ и } \overline{\Lambda(\varepsilon)} = \Lambda \setminus \Lambda(\varepsilon),$$

$$d = 2C_f^2 \left[1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \alpha (t - a_k)}{\alpha (t - a_k)} H_q(t - a_k) \right| \right].$$

Тогда можно выбрать $n = n(\varepsilon)$ такое, что для любого фиксированного t

$$\mathbf{M}\,|\xi(t) - \xi_n(t)|^2 < \varepsilon.$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 4 [3].

Аналогично теореме 1 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 3. Если функцию $f(t, \lambda)$ относительно t при любом $\lambda \in \Lambda$ можно доопределить в плоскости комплексного переменного до целой функции, которая при некотором натуральном m удовлетворяет условию

$$|f(t, \lambda)| \leqslant C_f(\lambda)(1 + |t|^m)\, e^{c(\lambda)|\mathrm{Im}\, t|},$$

где $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} C_f(\lambda) < \infty$, $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda) = \sigma < \infty$ и $H_q(t) = \frac{\psi(t)}{t^\gamma}$, $1 \leqslant \gamma$ — целое число, то для почти всех выборочных функций $\xi(t)$ справедлива формула (7), каким бы ни было фиксированное $\alpha > \sigma + q$, если только $\gamma \geqslant m$.

В этом случае $\mathbf{M}\,|\xi(t)|^2$ возрастает на вещественной оси при $|t| \to \infty$ как степенная функция степени $2m$.

Если функция $H_q(z)$, как в (5), то получаем теорему 6 [3].

Для случайных полей легко может быть доказана следующая теорема.

Теорема 4. Если выполнены условия (1) и (2), то для почти всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t_1, t_2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha_1 (t_1 - a_k)}{\alpha_1 (t_1 - a_k)} H_{q_1}(t_1 - a_k) \times$$

$$\times \frac{\sin \alpha_2 (t_2 - a_l)}{\alpha_2 (t_2 - a_l)} H_{q_2} (t_2 - a_l) \xi (a_k, a_l), \tag{8}$$

для любых фиксированных $\alpha_1 > \sigma_1 + q_1$ и $\alpha_2 > \sigma_2 + q_2$.

Отметим, что при специальном выборе функций

$$H_{q_k}(t_k) = \left(\frac{\sin \frac{\beta_k}{q_k} t_k}{\frac{\beta_k}{q_k} t_k} \right)^{q_k} \quad (k = 1, 2),$$

где $q_k \geqslant 0$ — произвольные целые числа, $0 < \beta_k < \alpha_k - \sigma_k$, из теоремы 4 получаем (при $m = 2$) представление (24) [4], а при выборе $H_{q_1}(t_1) \equiv H_{q_2}(t_2) \equiv 1$ из теоремы 4 получаем теорему 1 [5].

Конечно, можно было доказать теоремы типа теорем 2, 3 и для случайных полей.

Теорема 5. Пусть функции $f_1(t_1, \lambda)$, $f_2(t_2, \mu)$ относительно t_1 и t_2 при любых $\lambda \in \Lambda$ и $\mu \in \Lambda$ могут быть доопределены в плоскости комплексных переменных до целых функций экспоненциального типа, которые при некоторых натуральных m_1 и m_2 удовлетворяют следующим условиям:

$$|f_1(t_1, \lambda)| \leqslant C_{f_1}(\lambda)(1 + |t_1|^{m_1}) e^{c_1(\lambda)|\operatorname{Im} t_1|},$$

$$|f_2(t_2, \mu)| \leqslant C_{f_2}(\mu)(1 + |t_2|^{m_2}) e^{c_2(\mu)|\operatorname{Im} t_2|},$$

где $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} C_{f_1}(\lambda) < \infty$, $\sup\limits_{\mu \in \Lambda} C_{f_2}(\mu) < \infty$ и $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda} c_1(\lambda) = \sigma_1 < \infty$, $\sup\limits_{\mu \in \Lambda} c_2(\mu) = \sigma_2 < \infty$.

Пусть $H_{q_1}(t_1) = \frac{\psi_1(t_1)}{t_1^{\gamma_1}}$ и $H_{q_2}(t_2) = \frac{\psi_2(t_2)}{t_2^{\gamma_2}}$.

Тогда для почти всех выборочных функций случайного поля $\xi(t_1, t_2)$ справедлива интерполяционная формула (8), какими бы ни были любые фиксированные числа $\alpha_1 > \sigma_1 + q_1$ и $\alpha_2 > \sigma_2 + q_2$, если только $\gamma_1 \geqslant m_1$ и $\gamma_2 \geqslant m_2$.

В этом случае $\mathbf{M} |\xi(t_1, t_2)|^2$ возрастает при $|t_1|$, $|t_2| \to \infty$ как степенная функция степени $2(m_1 + m_2)$.

II. Пусть узлы интерполяции заданы следующим способом:

$$t_{ks} = \frac{\pi N k}{\alpha} + \tau_s \quad (s = \overline{0, N-1};\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),\ 0 = \tau_0 <$$
$$< \tau_1 < \ldots < \tau_{N-1} < \frac{\pi N}{\alpha},\ \alpha > 0. \tag{9}$$

Значит, узлы разделены на группы по N точек, которые повторяются периодически, внутри группы расположение точек τ_s ($s = \overline{0, N-1}$) произвольно, так что при каждом фиксированном значении s ($s = \overline{0, N-1}$) последовательность узлов $\ldots, t_{-2s}, t_{-1s}, t_{0s}, t_{1s}, t_{2s}, \ldots$ образует периодическую последовательность с периодом $\frac{\pi N}{\alpha}$.

В теореме Котельникова—Шеннона за промежуток $\frac{\pi N}{\alpha}$ берется N узлов через одинаковые промежутки $\frac{\pi}{\alpha}$, а в последовательности узлов (9) за промежуток $\frac{\pi N}{\alpha}$ берется также N узлов, но вообще говоря, через неодинаковые промежутки.

Если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа с конечным показателем $\sigma \leqslant \alpha$, ограниченная на вещественной оси, то при $\alpha > \sigma$ верна интерполяционная формула [6, стр. 162]

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{f(t_{ks}) \prod\limits_{p=0}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(z - t_{kp})}{\frac{\alpha}{N}(z - t_{ks}) \prod\limits_{\substack{p=0 \\ p \neq s}}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(\tau_s - \tau_p)},$$

причем ряд сходится равномерно в каждой ограниченной области изменения z. Более того, справедлива оценка

$$\left| f(z) - \sum_{k=-n}^{n} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{f(t_{ks}) \prod\limits_{p=0}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(z - t_{kp})}{\frac{\alpha}{N}(z - t_{ks}) \prod\limits_{\substack{p=0 \\ p \neq s}}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(\tau_s - \tau_p)} \right| <$$

$$< \varphi_3(z) \left[\frac{1}{(\alpha - \sigma) n} + 2^N e^{-(\alpha-\sigma)n} \right], \tag{10}$$

где функция

$$\varphi_3(z) = \frac{2^{N+2}}{\pi} \bar{C}_f \prod_{p=0}^{N-1} \left| \sin \frac{\alpha}{N}(z - \tau_p) \right|$$

ограничена для любой ограниченной области изменения z.

Теорема 6. Если $\sigma < \infty$, то при любом фиксированном $\alpha > \sigma$ для почти всех выборочных функций $\xi(t)$ справедливо соотношение

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\xi(t_{ks}) \prod\limits_{p=0}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(t - t_{kp})}{\frac{\alpha}{N}(t - t_{ks}) \prod\limits_{\substack{p=0 \\ p \neq s}}^{N-1} \sin \frac{\alpha}{N}(\tau_s - \tau_p)},$$

где t_{ks} $(s=\overline{0, N-1};\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ заданы соотношением (9).

Для доказательства этой теоремы используются спектральное представление случайных функций [2], оценка (10) и сепарабельность $\xi(t)$.

При выполнении условий теоремы 6 почти все выборочные функции будут функциями экспоненциального типа с конечным показателем $\leqslant \sigma$ [3, теорема 3].

Верна следующая теорема, доказательство которой опирается на оценку (4).

Теорема 7. Если выполнены условия (1) и (2), то при любых фиксированных $\alpha_1 > \sigma_1$ и $\alpha_2 > \sigma_2$ для почти всех выборочных функций справедливо соотношение

$$\xi(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \xi(t_{1nl}, t_{2km}) \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{p=0}^{N-1} \sin\frac{\alpha_1}{N}(t_1 - t_{1np}) \prod\limits_{i=0}^{N-1} \sin\frac{\alpha_2}{N}(t_2 - t_{2ki})}{\frac{\alpha_1\alpha_2}{N^2}(t_1 - t_{1nl})(t_2 - t_{2km}) \prod\limits_{\substack{p=0\\ p\neq l}}^{N-1} \sin\frac{\alpha_1}{N}(\tau_l - \tau_p) \cdot \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{N-1} \sin\frac{\alpha_2}{N}(\tau'_m - \tau'_i)},$$

где узлы t_{1nl}, t_{2km} $(l, m=\overline{0, N-1};\ n, k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ заданы следующим образом:

$$t_{1nl} = \frac{\pi N n}{\alpha_1} + \tau_l, \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{N-1} < \frac{\pi N}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 > 0,$$

$$t_{2km} = \frac{\pi N k}{\alpha_2} + \tau'_m, \quad 0 = \tau'_0 < \tau'_1 < \ldots < \tau'_{N-1} < \frac{\pi N}{\alpha_1} \quad \alpha_2 > 0,$$

$$l, m = \overline{0, N-1};\ n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

III. **Теорема 8.** Если $\sigma < \infty$, то при любом вещественном α

$$\sup_{-\infty<t<\infty} M\,|\sin\alpha\,\xi'(t) - \sigma\cos\alpha\,\xi(t)|^2 \leqslant \sigma^2 \sup_{-\infty<t<\infty} \mathbf{M}\,|\xi(t)|^2.$$

Доказательство. Функцию $f(t, \lambda)$ можно продолжить до целой функции экспоненциального типа с конечным показателем $\leqslant \sigma$, поэтому равномерно относительно $\lambda \in \Lambda$ верна интерполяционная формула [7, стр. 157]:

$$\sin\alpha\, f'(t, \lambda) - \sigma\cos\alpha\, f(t, \lambda) =$$

$$= \sigma \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin^2\alpha}{(\alpha - k\pi)^2} f\left(\frac{k\pi - \alpha}{\sigma} + t, \lambda\right).$$

Используя спектральное представление случайных функций [2] и сепарабельность $\xi(t)$, получаем, что для почти всех выборочных функций $\xi(t)$ справедливо соотношение

$$\sin\alpha\,\xi'(t) - \sigma\cos\alpha\,\xi(t) = \sigma\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha-k\pi)^2}\,\xi\left(\frac{k\pi-\alpha}{\sigma}+t\right).$$

Используя эту интерполяционную формулу, имеем

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\mathbf{M}\,[\sin\alpha\,\xi'(t)-\sigma\cos\alpha\,\xi(t)]\,[\sin\alpha\,\overline{\xi'(t)}-\sigma\cos\alpha\,\overline{\xi(t)}] \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^2\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha}{(\alpha-k\pi)^2}\right]^2\sup_{-\infty<t<\infty}\mathbf{M}\,|\xi(t)|^2 = \sigma^2\sup_{-\infty<t<\infty}\mathbf{M}\,|\xi(t)|^2.$$

Следствие. Методом доказательства теоремы 8 для любого натурального n может быть доказано соотношение

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\mathbf{M}\,|\sin\alpha\,\xi^{(n)}(t)-\sigma\cos\alpha\,\xi^{(n-1)}(t)|^2 \leqslant \sigma^{2n}\sup_{-\infty<t<\infty}\mathbf{M}\,|\xi(t)|^2.$$

Теорема 9. Пусть для достаточно большого $r = |t+is|$ и для любого $\lambda\in\Lambda$ функция $f(t,\lambda)$ удовлетворяет неравенству $|f(t\pm is,\lambda)| < e^{\sigma(s+\varepsilon r)}$ при любом данном $\varepsilon > 0$. Тогда можно построить последовательность случайных полиномов $P_n\{\xi; t\}$ степени n, такую что, каково бы ни было $c > 0$, при достаточно большом N_c для всех $n > N_c$ выполняется неравенство

$$\mathbf{M}\,|\xi(t)-P_n\{\xi;t\}|^2 < e^{-nc^{\frac{3}{2}}}\iint_{\Lambda\Lambda}|F(d\lambda,d\mu)|$$

при $-\frac{n}{\sigma}(1-c)\leqslant t\leqslant\frac{n}{\sigma}(1-c)$.

Доказательство. Используя спектральное представление случайных функций [2], имеем

$$\mathbf{M}\,|\xi(t)-P_n\{\xi;t\}|^2 = \iint_{\Lambda\Lambda}[f(t,\lambda)-P_n\{f:t\}]\,[\overline{f(t,\mu)} -$$

$$-\overline{P_n\{f:t\}}]\,F(d\lambda,d\mu).$$

Учитывая теорему 3. 8. I [8], получаем

$$\mathbf{M}\,|\xi(t)-P_n\{\xi:t\}|^2 < e^{-nc^{3/2}}\iint_{\Lambda\Lambda}|F(d\lambda,d\mu)|,$$

когда $-\frac{n}{\sigma}(1-c)\leqslant t\leqslant\frac{n}{\sigma}(1-c)$.

Из $\sum_{n=1} \mathbf{M} \,|\, \xi(t) - P_n\{\xi : t\} \,|^2 < \infty$ и сепарабельности процесса следует, что для почти всех выборочных функций

$$\lim_{n\to\infty} P_n\{\xi : t\} = \xi(t)$$

с вероятностью 1.

IV. Изучим оценки скорости сходимости. 1. Сперва оценим скорость сходимости $\xi_n(t)$ к $\xi(t)$. Очевидно,

$$\mathbf{P}\{|\xi(t) - \xi_n(t)| > f(n) \text{ хотя бы для одного } n \geqslant n_0\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{\mathbf{M}\,|\,\xi(t) - \xi_n(t)\,|^2}{f^2(n)} \leqslant \varphi_1(t) \iint_{\Lambda\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| \times$$

$$\times \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{f^2(n)} \left[\frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha - \sigma - q)\, e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}\right]^2.$$

Итак, для того чтобы с вероятностью 1 существовало такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi(t) - \xi_n(t)| < f(n)$ для всех $n > n_0(\omega)$, достаточно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f^2(n)} \left[\frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha - \sigma - q)\, e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}\right]^2 < \infty.$$

Отсюда получаем, что, например, для всех $n \geqslant n_0(\omega)$,

$$|\xi(t) - \xi_n(t)| < \frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{\sqrt{n}} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha - \sigma - q)\sqrt{n}\, \ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n\, e^{-(\alpha-\sigma-p)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}.$$

В частном случае, когда $H_q(z) = \dfrac{\psi(z)}{z^k}$ (k — натуральное число),

$$\mathbf{P}\{|\xi(t) - \xi_n(t)| > f(n) \text{ хотя бы для одного } n \geqslant n_0\} \leqslant$$

$$\leqslant \varphi_2^2(t) \iint_{\Lambda\Lambda} |F(d\lambda, d\mu)| \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^{2k} f^2(n)} \left[\frac{1}{n} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha -\right.$$

$$\left. - \sigma - q)\, e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}\right]^2.$$

Итак, очевидно, что, например, с вероятностью 1 для всех $n \geqslant n_0(\omega)$

$$|\xi(t) - \xi_n(t)| < \frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{n^{k+\frac{1}{2}}} + \frac{2\pi}{\alpha}(\alpha - \sigma - q)\frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{n^{k-\frac{1}{2}}} e^{-(\alpha-\sigma-q)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2. Очевидно,

$$\mathbf{P}\{|\xi(t,s)-\xi_n(t,s)|>f(n) \text{ хотя бы для одного } n\geqslant n_0\}\leqslant$$

$$\leqslant \iiiint\limits_{\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda} |F(d\lambda_1, d\lambda_2, d\mu_1, d\mu_2)| \sum_{n\geqslant n_0} \frac{D_n^2(t,s)}{f^2(n)},$$

где

$$D_n(t,s)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)\prod_{i=1}^{2}\left[\frac{1}{n}+\frac{2\pi}{\alpha_i}(\alpha_i-\sigma_i-q_i)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-(\alpha_i-\sigma_i-q_i)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha_i}}\right]+\varphi_1(t)\left[\frac{1}{n}+\frac{2\pi}{\alpha_1}(\alpha_1-\sigma_1-q_1)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-(\alpha_1-\sigma_1-q_1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha_1}}\right]\left\{L_{t_2}+\varphi_2(s)\left[\frac{1}{n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\pi}{\alpha_2}(\alpha_2-\sigma_2-q_2)e^{-(\alpha_2-\sigma_2-q_2)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha_2}}\right]\right\}+$$

$$+\varphi_2(s)\left[\frac{1}{n}+\frac{2\pi}{\alpha_2}(\alpha_2-\sigma_2-q_2)e^{-(\alpha_2-\sigma_2-q_2)\left(\frac{\pi}{\alpha_2}\right)}\right]\left\{L_{t_1}+\right.$$

$$\left.+\varphi_1(t)\left[\frac{1}{n}+\frac{2\pi}{\alpha_1}(\alpha_1-\sigma_1-q_1)e^{-(\alpha_1-\sigma_1-q_1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha_1}}\right]\right\}=\frac{c}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит, в этом случае для того чтобы существовало такое $n_0 = n_0(\omega)$, что $|\xi(t,s)-\xi_n(t,s)|<f(n)$ для всех $n>n_0(\omega)$, достаточно, чтобы $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 f_*^2(n)}<\infty$. Это возможно, например, при $f(n) = \frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{\sqrt{n}}$. Значит, с вероятностью 1 для всех $n\geqslant n_0(\omega)$

$$|\xi(t,s)-\xi_n(t,s)|<\frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{\sqrt{n}}.$$

3. Теперь оценим скорость сходимости в теореме 6.

$$\mathbf{P}\{|\xi(t)-\xi_n(t)|>f(n) \text{ хотя бы для одного } n\geqslant n_0\}\leqslant$$

$$\leqslant \varphi_3(t)\iint\limits_{\Lambda\ \Lambda}|F(d\lambda, d\mu)|\sum_{n\geqslant n_0}\frac{1}{f^2(n)}\left[\frac{1}{(\alpha-\sigma)n}+2^N e^{-(\alpha-\sigma)n}\right]^2.$$

Значит, с вероятностью 1 для всех $n \geqslant n_0(\omega)$, например, в случае

$$f(n) = \frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{(\alpha-\sigma)\sqrt{n}} + 2^N e^{-(\alpha-\sigma)n}\sqrt{n}\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n,$$

$$|\xi(t) - \xi_n(t)| < \frac{\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n}{(\alpha-\sigma)\sqrt{n}} + 2^N e^{-(\alpha-\sigma)n}\sqrt{n}\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n.$$

Подсчеты показывают, что скорость сходимости в теореме 7 такая же, как и в 2.

Легко подсчитать, что с вероятностью 1 для всех $n \geqslant n_0(\omega)$

$$|\xi(t) - P_n\{\xi; t\}| < e^{-\frac{nc^{\frac{3}{2}}}{2}}\sqrt{n}\ln^{\frac{1+\varepsilon}{2}} n.$$

V. Теперь предположим, что $\xi(t)$ — случайный процесс на $[0,1]$ с $M\xi(t) = 0$, $M|\xi(t)|^2 < \infty$ и с корреляционной функцией $R(t, s)$, непрерывной в диагональных точках $(t, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Пусть

$$B_n\{\xi; t\} = \sum_{k=0}^{n} \xi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

Вводим модули непрерывности корреляционной функции следующим образом:

$$\omega_1(\delta) = \sup_{|u-v|\leqslant\delta} M|\xi(u) - \xi(v)|^2,$$

$$\omega_2(\delta) = \sup_{A} |R(t_1, s_1) - R(t_2, s_2)|,$$

где

$$A = \{(t_1, s_1), (t_2 s_2) \in [0, 1] \times [0, 1] : (t_2 - t_1)^2 + (s_2 - s_1)^2 \leqslant \delta^2\}.$$

Тогда верны следующие оценки:

$$\mathbf{M}|\xi(t) - B_n\{\xi; t\}|^2 \leqslant C^2\omega_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\mathbf{M}|\xi(t) - B_n\{\xi; t\}|^2 \leqslant 2C\omega_2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $G = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1{,}0898873\ldots$ [9].

Можно построить пример случайного процесса $\xi(t)$, для которого эти постоянные достижимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. II. Изд-во АН СССР, М., 1954, 452.

2. Р о з а н о в Ю. А. Спектральный анализ абстрактных функций.— Теория вероят. и ее примен., 1959, 4, 4, 291—310.

3. П и р а н а ш в и л и З. А. К вопросу об интерполяции случайных процессов. Теория вероят. и ее прим. 1967, 12, № 4, 708—717.

4. Н а г о р н ы й В. Н. Об интерполяции случайных процессов и полей. Кандидатская диссертация, К., 1970.

5. Н а г о р н и й В. Н. Про інтерполяцію випадкових полів.— Доповіді АН УРСР, сер. А, 1971, № 4, 319—323.

6. Х у р г и н Я. И., Я к о в л е в В. П. Финитные функции в физике и технике. М., «Наука», 1971.

7. А х и е з е р Н. И. Лекции по теории аппроксимации. ГИТТЛ, М., 1947.

8. И б р а г и м о в И. И. Экстремальные свойства целых функций конечной степени. Баку, Изд-во АН Аз.ССР, 1962.

9. S i k k e m a P. C. Der Wert einiger Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein polynomen. — Numerische Mathematika, 1961, 3, 107—116.

R. Khudayberganov

ON THE INTERPOLATION OF THE RANDOM FIELDS

Summary

For the random processes of some class the interpolation formula

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (t - a_k)}{\alpha (t - a_k)} H_q (t - a_k) \xi (a_k)$$

is proved where $a_k = \frac{k\pi}{\alpha}$ and $H_q(t)$ — any entire function of finite degree $\leqslant q$ satisfying condition $H_q(0) = 1$.

It is shown that the theorem of Kotelnikov—Shannon is true for inequallong knots distributed in some regular manner.

It is proved that for any real α

$$\sup_{-\infty<t<\infty} M |\sin \alpha \xi'(t) - \sigma \cos \alpha \xi(t)|^2 \leqslant \delta^2 \sup_{-\infty<t<\infty} M |\xi(t)|^2.$$

Поступила в редколлегию 19. VI 1972.