А. А. ШАХБАЗОВ, доц.
Институт кибернетики АН АзССР

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭРГОДИЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Во многих задачах теории массового обслуживания (ТМО) интересуются вероятностными характеристиками установившегося режима обслуживающей системы, не зависящего от начального его состояния [1]. Поэтому доказательство существования такого режима является одной из центральных задач ТМО. Эту задачу разрешают так называемые эргодические теоремы теории вероятностей. Существуют общие необходимые и достаточные признаки того, что цепь Маркова является эргодической. Поскольку практическое пользование этим общим признаком сопряжено с рядом трудностей, то большое значение имеет поиск практически приемлемых признаков. В данной работе с использованием одной леммы, являющейся следствием теоремы Мустафы [2, 3], предлагается доказательство эргодичности трех процессов обслуживания, не имеющих классической структуры. Отметим, что условия этой леммы имеют простой вероятностный смысл и легко проверяются.

Лемма. Пусть ξ_n, $n \geqslant 0$ неприводимая и непериодическая цепь Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \dots\}$ и матрицей вероятностей перехода (p_{ij}). Если выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} < \infty, \qquad i \geqslant 0; \qquad \overline{\lim_{i\to\infty}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} - i \right) < 0, \tag{1}$$

то цепь ξ_n, $n \geqslant 0$ является эргодической*).

Доказательство. Положим

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} - i, \qquad i \geqslant 0. \tag{2}$$

---

*)Цепь ξ_n, $n \geqslant 0$ называется эргодической, если предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_n = j \mid \xi_0 = i\} = \pi_j \qquad (i, j \geqslant 0)$$

существует, не зависит от распределения величины ξ_0 и $\pi_j > 0$, $\sum\limits_{0}^{\infty} \pi_j = 1$.

По определению верхнего предела существует $a < 0$ и натуральное число $i_0 = i_0(a)$ такие, что $\rho_i \leqslant a$ для всех $i \geqslant i_0$. Положим $u_j = -\frac{j}{a}$, $j \geqslant 0$. Тогда при $i \geqslant i_0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} = -\frac{1}{a}(i + \rho_i) \leqslant -\frac{1}{a}(i + a) = u_i - 1,$$

а при $i < i_0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} u_j = -\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} < \infty.$$

Таким образом, условия теоремы Мустафы [3] выполняются и поэтому цепь ξ_n, $n \geqslant 0$ — эргодична.

Замечание. Эту лемму для цепи Маркова с почти треугольной вниз матрицей вероятностей перехода доказал Т. В. Крабил. Доказательство Крабила использует теоремы двойственности линейного программирования [4].

Система $G|E_s|1$. Один прибор обслуживает клиентов, моменты поступления которых образуют процесс восстановления, порожденной функцией $A(u)$, $u \geqslant 0$ с $\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} u dA(u) < \infty$. Длительности обслуживания последовательных клиентов — независимые случайные величины с общей функцией распределения

$$B(v) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{(\mu v)^i}{i!} e^{-\mu v}, & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

Пусть ξ_n — число клиентов, находящихся в системе непосредственно перед моментом прибытия n-го клиента. Тогда ξ_n, $n \geqslant 1$ является цепью Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и ее вероятности перехода за один шаг имеют следующий вид:

$$p_{ij} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(\mu u)^{i+s-j}}{(i+s-j)!} e^{-\mu u} dA(u) & (1 \leqslant j \leqslant i+s), \\ \sum_{k=i+s}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mu u)^k}{k!} e^{-\mu u} dA(u) & (j = 0), \\ 0 & (j > i+s). \end{cases}$$

Поскольку при всех $j \geqslant 0$

$$k_j \equiv \int_0^\infty \frac{(\mu u)^j}{j!} e^{-\mu u} dA(u) > 0,$$

то цепь ξ_n, $n \geqslant 1$ — неприводима и непериодична. Найдем условие эргодичности этой цепи. При всех $i \geqslant 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp_{ij} = \sum_{j=1}^{i+s} jk_{i+s-j} = \sum_{r=0}^{i+s-1} (i+s-r)k_r;$$

$$\rho_i = -i \sum_{r=i+s}^{\infty} k_r + \sum_{r=0}^{i+s-1} (s-r)k_r.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{i\to\infty} \rho_i = \sum_{r=0}^{\infty} (s-r)k_r = s - \frac{\mu}{\lambda}.$$

Применив лемму, получаем следующий известный результат: система $G|E_s|1$ эргодична, если $\frac{\lambda s}{\mu} < 1$.

С рассмотренной системой $G|E_s|1$ тесно связана система $G^{(s)}|M|1$, в которой требования поступают партиями фиксированного объема s через независимые промежутки времени, имеющие произвольное распределение с конечным математическим ожиданием $\frac{1}{\lambda}$. На обслуживание каждого требования тратится случайное время, имеющее показательное распределение с параметром μ. Связь между этими системами дается формулой

$$\xi(t) = \left[\frac{\eta(t)+s-1}{s}\right], \tag{3}$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ означают число требований, находящихся в момент времени t в системе $G|E_s|1$ и $G^{(s)}|M|1$ соответственно.

Очевидно, что момент n-го поступления t_n в системе $G|E_s|1$ совпадает с моментом n-го поступления в системе $G^{(s)}|M|1$. Формула (3) с $t = t_n - 0$ показывает, что из существования эргодического распределения вложенной цепи $\xi(t_n - 0)$, $n \geqslant 1$ вытекает существования эргодического распределения вложенной цепи $\eta(t_n - 0)$, $n \geqslant 1$. Таким образом, выполнение неравенства $\frac{\lambda s}{\mu} < 1$ является достаточным условием эргодичности системы $G^{(s)}|M|1$.

Система $\mathbf{M}|\mathbf{G}^{(s)}|\mathbf{1}$. На один обслуживающий прибор поступает пуассоновский поток требований с параметром λ. Обслуживание производится партиями, объем которых не превышает фиксированной величины s. Длительности обслуживания последовательных партий — независимые случайные величины, имеют общую функцию распределения $B(v)$, $v \geqslant 0$ с $\frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty x dB(x) < \infty$.

Обозначим через ξ_n число клиентов, находящихся в очереди непосредственно после окончания обслуживания n-й партии. Тогда ξ_n, $n \geqslant 1$ является цепью Маркова с множеством состояний $\{0,1,2...\}$ и ее вероятности перехода за один шаг имеют вид

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \leqslant s,\ j \geqslant 0), \\ k_j & (i > s,\ j \leqslant i - s), \\ k_{j+s-i} & (i > s,\ j > i - s); \end{cases}$$

$$k_j = \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda v)^j}{j!} e^{-\lambda v} dB(v), \quad j \geqslant 0.$$

Так как $k_j > 0$, то цепь ξ_n, $n \geqslant 1$ — неприводима и непериодична. Найдем условие эргодичности этой цепи. При всех $i > s$ имеем

$$\sum_{j=1}^\infty j p_{ij} = \sum_{j=i-s}^\infty j k_{j+s-i} = \sum_{r=0}^\infty (r - s + i) k_r = \frac{\lambda}{\mu} - s + i;$$

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu} - s.$$

Если $i \leqslant s$, то

$$\rho_i = \sum_{j=1}^\infty j k_j - i = \frac{\lambda}{\mu} - i.$$

Следовательно,

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu} - s & (i > s), \\ \frac{\lambda}{\mu} - i & (i \leqslant s). \end{cases}$$

Таким образом, система $M|G^{(s)}|1$ эргодична, если $\frac{\lambda}{\mu s} < 1$.

Система $\mathbf{M}|\mathbf{G}|\mathbf{1}$ с ограничениями. На вход однолинейной системы массового обслуживания поступает пуассоновский поток с параметром λ. Длительность обслуживания каждого требования имеет произвольное распределение $B(v)$, $v \geqslant 0$ с $\frac{1}{\mu} = \int\limits_0^\infty x dB(x) < \infty$.

Каждое требование, заставшее в системе j требований, присоединяется к очереди с вероятностью b_j.

Пусть ξ_n — число требований, находящихся в очереди в момент окончания обслуживания n-го требования. Тогда ξ_n, $n \geqslant 1$ есть цепь Маркова с множеством состояний $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и матрицей вероятностей перехода

$$\left\| \begin{matrix} k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots \\ 0 & k_{20} & k_{21} & k_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & k_{30} & k_{31} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots \end{matrix} \right\|, \qquad k_{ij} = \int_0^\infty p_j(i, v)\, dB(v). \tag{4}$$

В этом равенстве $p_j(i, v)$ означает вероятность того, что за время v к очереди будут присоединены j требований, если в начале этого промежутка времени в системе находилось i требований и за время v ни одно требование не было обслужено. Из структуры матрицы вероятностей перехода ясно, что цепь ξ_n, $n \geqslant 1$ неприводима и непериодична. Найдем условия эргодичности этой цепи. Используя соотношения

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant j < i - 1, \quad i \geqslant 2), \\ k_{i, j+1-i} & (j \geqslant i - 1, \quad i \geqslant 1), \\ k_{1j} & (j \geqslant 0, \quad i = 0), \end{cases}$$

находим

$$\sum_{j=1}^{\infty} j p_{ij} = \sum_{j=i-1}^{\infty} j k_{i, j+1-i} = \sum_{r=1}^{\infty} r k_{ir} + i - 1. \tag{5}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \sum_{r=1}^{\infty} r k_{ir} = \frac{\lambda}{\mu} \overline{\lim_{i \to \infty}}\, b_i. \tag{6}$$

Легко проверить, что функция $p_j(i, v)$ удовлетворяет уравнению

$$p_j'(i, v) = -\lambda b_i p_j(i, v) + \lambda b_i p_{j-1}(i + 1, v), \ j \geqslant 1.$$

Полагая

$$\varphi_i(v) = \sum_{r=1}^{\infty} r p_r(i, v), \tag{7}$$

получим

$$\lambda b_i - \varphi_i'(v) = \lambda b_i [\varphi_i(v) - \varphi_{i+1}(v)].$$

Интегрируя это равенство по аргументу v, находим

$$\lambda b_i v - \varphi_i(v) = \lambda b_i \int_0^v [\varphi_i(v) - \varphi_{i+1}(v)]\, dv.$$

Отсюда с учетом (4) и (7) получаем

$$\frac{\lambda}{\mu} b_i - \sum_{r=1}^{\infty} r k_{ir} = \lambda b_i \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{v} [\varphi_i(v) - \varphi_{i+1}(v)]\, dv \right\} dB(v).$$

Полагая в этом равенстве $i \to \infty$, получим (6). Из (5) и (6) находим

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, \rho_i = \overline{\lim_{i\to\infty}} \sum_{r=1}^{\infty} r k_{ir} - 1 = \frac{\lambda}{\mu} \overline{\lim_{i\to\infty}}\, b_i - 1.$$

Таким образом, система $M\,|\,G\,|\,1$ с ограничениями эргодична, если $\frac{\lambda}{\mu} \overline{\lim_{i\to\infty}}\, b_i < 1$ (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., «Наука», 1966.
2. Климов Г. П. Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.
3. Moustafa M. D.— Proc. Koninkijke Nederlande Akad., Wetenschappen, 1957, 60, 112—118.
4. Crabill T. B.— Opns. Rés., 1968, 18, 4, 858—867.

A. A. Shahbazov

PROOF OF ERGODICITY FOR CERTAIN QUEUEING SYSTEMS

Summary

The ergodicity of certain special queueing systems is proved, sufficient conditions of ergodicity for aperiodic and irreducible Markov chains being used. This proof folows from Moustafa's theorem and is a generalization of Grabill's result.

Поступила в редколлегию 28.VI 1971.