Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(100)/2019, с. 123–130

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(100)/2019, pp. 123–130

УДК 519.21

ВЛАСТИВОСТІ ВИСОКОНАДІЙНОЇ ДУБЛЬОВАНОЇ СИСТЕМИ У ВИПАДКУ ПОКАЗНИКОВОГО РОЗПОДІЛУ ПРОМІЖКІВ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ ОДНОГО З АЛЬТЕРНУЮЧИХ ПРОЦЕСІВ

О. О. КУШНІР, В. П. КУШНІР

Анотація. Наведено оцінки характеристик надійності високонадійної дубльованої системи у припущенні, що розподіл робочої фази одного з альтернуючих процесів є показниковим.

Ключові слова і фрази. процес відновлення, альтернуючий процес, дубльована система, теорема Реньї, напівмарковський процес.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60K20; Secondary 90B25.

1. Вступ

У статті [1] наводяться рівномірні оцінки відхилення від функції показникового розподілу виразу
$$\theta L \star \sum_{n=0}^{\infty} (1-\theta)^n K^{\star n}, \tag{1}$$
де L, K — задані функції розподілу невід'ємних випадкових величин, $\theta \in (0,1)$, $\star$ — згортка функцій розподілу, тобто $L \star K(t) = \int_0^t L(t-x)dK(x)$.

Зокрема для функції $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \theta K \star \sum_{n=0}^{\infty} (1-\theta)^n K^{\star n}(t)$, яка є функцією розподілу суми випадкової геометрично розподіленої кількості незалежних однаково розподілених випадкових величин, виконуються нерівності
$$|\Phi(t) - 1 + \exp(-qt)| \le \frac{2\theta\varkappa}{1-\theta}, \quad t > 0, \tag{2}$$
де $\varkappa = \dfrac{\nu_2(K)}{2\nu^2(K)}$, $\nu(K) = \int_0^\infty x dK(X)$, $\nu_2(K) = \int_0^\infty x^2 dK(X)$, $q = \dfrac{\theta}{(1-\theta)\nu(K)}$.

Оскільки у вигляді (1) можна подати функції розподілу часу безвідмовної роботи деяких систем теорії надійності та теорії масового обслуговування, то для їхнього оцінювання природно використовувати нерівність (2). Ці оцінки тим кращі, чим менше θ. Це число θ має простий імовірнісний зміст — імовірність відмови системи на одному циклі регенерації. Отже, такі оцінки варто використовувати для високонадійних систем.

Цим способом у статті [2] було отримано оцінки функції розподілу часу безвідмовної роботи високонадійної системи GI/G/1/0, а в [3] — системи із захистом у випадку найпростішого потоку відновлення.

Метою цієї роботи є отримання таких оцінок для функції розподілу часу безвідмовної роботи дубльованої відновлюючої системи [4, с. 81–87] у випадку, коли розподіл інтервалу робочого стану одного з альтернуючих процесів є показниковим. У статті [5] наведено рівномірну граничну теорему для цієї системи без припущень про показниковий розподіл інтервалів альтернуючих процесів.

Розглядаються 4 послідовності незалежних у сукупності випадкових величин: ξ_n, $\omega_n,\ n \geq 1,$ — інтервали робочого стану та інтервали відновлення 1-го альтернуючого процесу; $\eta_n,\ \zeta_n,\ n \geq 1,$ — такі ж інтервали 2-го альтернуючого процесу. Кожна з випадкових величин ξ_n має показниковий розподіл із параметром u, тобто

$$\mathsf{P}(\xi_n \geq t) = \exp(-ut),\ t \geq 0,\ n \geq 1.$$

Інші випадкові величини ω_n, η_n, ζ_n мають функції розподілу J, G, B відповідно (вони однакові для всіх $n \geq 1$).

Нехай у початковий момент часу почався інтервал відновлення 2-го альтернуючого процесу, а 1-й перебуває в робочому стані.

Позначимо моменти переходу 1-го альтернуючого процесу у стан відновлення $S_n,\ n \geq 1$ а 2-го — $\sigma_n,\ n \geq 0$, тобто

$$S_1 = \xi_1,\ S_{n+1} = S_n + \omega_n + \xi_{n+1};\quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k + \eta_k),\ n \geq 1,\ \sigma_0 = 0.$$

Позначимо τ — момент відмови дубльованої системи, тобто

$$\tau = \min\left\{ \min_{n\geq 1}\left\{ S_n \colon S_n \in \bigcup_{m=0}^{\infty} [\sigma_m,\ \sigma_m + \zeta_m) \right\},\ \min_{m\geq 1}\left\{ \sigma_m \colon \sigma_m \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [S_n,\ S_n + \omega_n) \right\} \right\},$$

коли обидва альтернуючі процеси опиняться у стані відновлення.

Оскільки випадкові величини ξ_n мають показниковий розподіл, то моменти часу σ_n та $\sigma_n + \zeta_{n+1}$, поки система не відмовить, є моментами регенерації дубльованої відновлюючої системи.

Назвемо t_γ гарантованим часом безвідмовної роботи системи з надійністю γ, якщо $\mathsf{P}(\tau \geq t_\gamma) \geq \gamma$, тобто ймовірність того, що система не відмовить до часу t_γ, є не меншою від γ.

У цій роботі наводиться верхня оцінка для t_γ, а також нижня й верхня оцінки функції розподілу моменту першої відмови τ при різних початкових умовах.

Для використання результатів цієї статті потрібно мати оцінки нестаціонарного коефіцієнта простою $r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(S_n \leq t < S_n + \omega_n)$ першого альтернуючого процесу. Такі оцінки наведено, зокрема, у роботах [6, 7].

У пункті 2 сформульовано результати, а в пункті 3 наведено їх доведення.

2. Основні позначення та результати

Будемо позначати показникову функцію розподілу $E_q(t) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \exp(-qt),\ t \geq 0$. Зокрема, $\mathsf{P}(\xi_n < t) = E_u(t),\ n \geq 1$.

Позначимо математичні сподівання випадкових величин ω_n, η_n, ζ_n відповідно $1/\mu$, m, b, а також $m_2 = \mathsf{E}(\eta_n^2)$, $b_2 = \mathsf{E}(\zeta_n^2),\ n \geq 1$.

Нехай δ — імовірність відмови системи вже на першому інтервалі відновлення 2-го альтернуючого процесу. Її знаходимо за формулою

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\tau < \zeta_1) = \mathsf{P}(\xi_1 < \zeta_1) = \int_0^{+\infty} E_u(x)\,dB(x).$$

Якщо ця подія відбулася, то відповідна умовна функція розподілу часу безвідмовної роботи системи

$$L_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\tau < t/\tau < \zeta_1) = \mathsf{P}(\xi_1 < t/\xi_1 < \zeta_1) = \frac{1}{\delta}\int_0^t (1 - B(x))\,dE_u(x).$$

Якщо ж ця подія не відбулася, то відповідна умовна функція розподілу тривалості інтервалу відновлення 2-го альтернуючого процесу

$$K_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\zeta_1 < t / \xi_1 \geq \zeta_1) = \frac{1}{1-\delta} \int_0^t (1 - E_u(x)) dB(x).$$

Не першому циклі регенерації $(0,\ \sigma_1]$ система може відмовити також у момент часу σ_1, якщо тоді 1-й альтернуючий процес перебуватиме у стані відновлення. Оскільки в момент часу ζ_1 відбулася регенерація системи (якщо вона раніше не відмовила), то умовна ймовірність відмови у проміжку часу $(\zeta_1,\ \sigma_1]$ за умови $\tau \geq \zeta_1$

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\tau \leq \sigma_1 / \tau \geq \zeta_1) = \mathsf{P}(\tau = \zeta_1 + \eta_1 / \tau \geq \zeta_1) = r(\eta_1) = \int_0^\infty r(x) dG(x)$$

не залежить від події $\tau < \zeta_1$.

Отже, імовірність відмови на першому циклі регенерації

$$\theta = \delta + \varepsilon - \delta\varepsilon.$$

Щоби ввести ще дві умовні функції розподілу змінимо початкові умови. Нехай відлік часу починається з переходу 2-го альтернуючого процесу в робочий стан. У цей момент 1-й альтернуючий процес також перебуває у робочому стані. Момент відмови системи за таких початкових умов позначимо τ'. Тоді умовна функція розподілу часу безвідмовної роботи системи за умови, що вона відмовить у момент часу η_1, буде така:

$$L_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\tau' < t / \tau' = \eta_1) = \mathsf{P}(\eta_1 < t / \tau' = \eta_1) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t r(x) dG(x).$$

Умовна функція розподілу тривалості інтервалу робочого стану 2-го альтернуючого процесу за умови, що в момент його закінчення 1-й альтернуючий процес перебуватиме в робочому стані, має вигляд

$$K_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\eta_1 < t / \tau' > \eta_1) = \frac{1}{1-\varepsilon} \int_0^t (1 - r(x)) dG(x).$$

Умовна функція розподілу тривалості одного циклу регенерації $(0, \zeta_1 + \eta_1]$ за умови, що відмова системи наступить пізніше,

$$K(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}(\zeta_1 + \eta_1 < t / \tau > \zeta_1 + \eta_1) = K_1 \star K_2(t).$$

Максимальне значення нестаціонарного коефіцієнта простою позначимо

$$r \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x>0} r(x).$$

Зауваження 2.1. Якщо $J(t) = E_\mu(t)$, то

$$r(x) = \frac{u}{u+\mu}(1 - \exp(-(u+\mu)x)); \quad r = \frac{u}{u+\mu}.$$

Зауваження 2.2. Якщо $G(t) = E_\lambda(t)$, то моменти часу S_n, $n \geq 1$, також є моментами регенерації системи. У цьому випадку $\varepsilon = \dfrac{u\iota}{\lambda + u\iota}$, де

$$\iota = \mathsf{P}(\eta_1 < \omega_1) = \int_0^\infty (1 - \exp(-\lambda x)) dJ(x) \leq \frac{\lambda}{\mu}.$$

Зауваження 2.3. У загальному випадку для оцінки $r(x)$, r та ε можна скористатися роботами [6, 7].

Теорема 2.1. *Гарантований час безвідмовної роботи дубльованої відновлюючої системи з надійністю* γ

$$t_\gamma \geq \frac{m(1-ub)(1-r)}{\theta} \ln \frac{(1-ub)(1-\varepsilon)}{\gamma+\Delta},$$

де $\Delta = \theta(1-\varepsilon)\left(\dfrac{m_2+b_2+2bm(1-r)}{m^2(1-r)^2}\right)$.

Математичне сподівання випадкової величини з функцією розподілу F позначатимемо $\nu(F)$, а її другий початковий момент — $\nu_2(F)$.

Позначимо функцію розподілу часу безвідмовної роботи системи $\varphi(t) = \mathsf{P}(\tau < t)$, а при змінених початкових умовах, коли відлік часу починається з переходу 2-го альтернуючого процесу в робочий стан, а 1-й альтернуючий процес також у робочому стані, позначатимемо її $\psi(t) = \mathsf{P}(\tau' < t)$.

Теорема 2.2. *Для функцій розподілу часу безвідмовної роботи системи із захистом при різних початкових умовах виконуються нерівності*

$$-\Delta - \frac{a_0}{1-r} \leq \varphi(t) - E_q(t) \leq \theta(1 - E_q(t)) + \Delta;$$
$$-\Delta - \frac{a_1}{(1-\delta)(1-r)} \leq \psi(t) - E_q(t) \leq \theta(1 - E_q(t)) + \Delta,$$

де $q = \dfrac{\theta}{(1-\theta)\nu(K)}, \quad \alpha = \min\left\{\dfrac{ub_2}{2}, \dfrac{\delta}{u}\right\}; \quad a_0 = r + \dfrac{b\varepsilon}{m} + \dfrac{\alpha}{m(1-\delta)};$

$$a_1 = r + \delta(1-r) + \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{m}, \qquad \delta \leq ub.$$

Зауваження 2.4. Середній час безвідмовної роботи дубльованої відновлюючої системи $\mathsf{E}\,\tau = \dfrac{1}{\theta}\left(m(1-\delta) + \dfrac{\delta}{u}\right)$, а при змінених початкових умовах, коли відлік часу починається з переходу 2-го альтернуючого процесу в робочий стан, а 1-й альтернуючий процес також перебуває у робочому стані, $\mathsf{E}\,\tau' = \dfrac{1}{\theta}\left(m + \dfrac{\delta(1-\varepsilon)}{u}\right)$.

3. Доведення

Доведення зауваження 2.2. Імовірність того, що 1-й альтернуючий процес у момент часу x перебуватиме у фазі відновлення, якщо в початковий момент часу він був у робочій фазі, задовольняє рівняння відновлення

$$r = E_u \star (1-J) + r \star E_u \star J. \tag{3}$$

У випадку $G(t) = E_\lambda(t)$ виконується рівність $\varepsilon = \lambda\hat{R}(\lambda)$, де $\hat{R}(\lambda)$ — перетворення Лапласа функції $r(x)$.

Перетворивши рівняння (3), отримаємо $\lambda\hat{R}(\lambda) = \dfrac{u}{\lambda+u}\iota + \lambda\hat{R}(\lambda)\dfrac{u}{\lambda+u}(1-\iota)$, звідки знаходимо $\varepsilon = \lambda\hat{R}(\lambda) = \dfrac{u\iota}{\lambda+u\iota}$. □

Доведення зауваження 2.1. У випадку $J = E_\mu$ рівняння (3) розв'язується операційним методом. □

Доведення зауваження 2.4. Для функцій L_i, K_i виконуються рівності

$$\varepsilon L_1(t) + (1-\varepsilon)K_1(t) = G(t); \tag{4}$$

$$\delta L_2(t) + (1-\delta)K_2(t) = (1-B(t))E_u(t) + \int_0^t E_u(x)dB(x) + $$
$$+ \int_0^t \exp(-ux)dB(x) = 1 - B(t) - (1-B(t))\exp(-ut) + B(t).$$

Отже,

$$\delta L_2(t) + (1-\delta)K_2(t) = 1 - (1-B(t))\exp(-ut). \tag{5}$$

Перейшовши у (4), (5) до математичних сподівань, отримаємо

$$\varepsilon\nu(L_1) + (1-\varepsilon)\nu(K_1) = m; \tag{6}$$

$$\delta\nu(L_2) + (1-\delta)\nu(K_2) = \int_0^\infty (1-B(t))\exp(-ut)dt = \int_0^\infty dB(x)\int_0^x \exp(-ut)dt = \frac{\delta}{u}. \tag{7}$$

За формулою повної ймовірності,

$$\varphi(t) = \mathsf{P}(\tau < t) = \mathsf{P}(\tau < \zeta_1)\,\mathsf{P}(\tau < t/\tau < \zeta_1) + \mathsf{P}(\tau \ge \zeta_1)\,\mathsf{P}(\tau < t/\tau \ge \zeta_1) =$$
$$= \mathsf{P}(\tau < \zeta_1)\,\mathsf{P}(\tau < t/\tau < \zeta_1) + \mathsf{P}(\tau \ge \zeta_1)\,\mathsf{P}(\zeta_1 + \tau' < t),$$

отже,

$$\varphi(t) = \delta L_2(t) + (1-\delta)K_2 \star \psi(t), \tag{8}$$

а також

$$\psi(t) = \mathsf{P}(\tau' < t) = \mathsf{P}(\tau' = \eta_1)\,\mathsf{P}(\tau' < t/\tau' = \eta_1) + \mathsf{P}(\tau' > \eta_1)\,\mathsf{P}(\tau' < t/\tau' > \eta_1) =$$
$$= \mathsf{P}(\tau' = \eta_1)\,\mathsf{P}(\tau' < t/\tau' = \eta_1) + \mathsf{P}(\tau' > \eta_1)\,\mathsf{P}(\eta_1 + \tau < t),$$

звідки отримуємо

$$\psi(t) = \varepsilon L_1(t) + (1-\varepsilon)K_1 \star \varphi(t). \tag{9}$$

Перейшовши у (8), (9) до математичних сподівань, дістанемо систему рівнянь для $\mathsf{E}\,\tau,\ \mathsf{E}\,\tau'$

$$\begin{cases} \mathsf{E}\,\tau = \delta\nu(L_2) + (1-\delta)(\nu(K_2) + \mathsf{E}\,\tau'), \\ \mathsf{E}\,\tau' = \varepsilon\nu(L_1) + (1-\varepsilon)(\nu(K_1) + \mathsf{E}\,\tau). \end{cases}$$

Підставивши в неї (6), (7), отримаємо

$$\begin{cases} \mathsf{E}\,\tau = \delta/u + (1-\delta)\,\mathsf{E}\,\tau', \\ \mathsf{E}\,\tau' = m + (1-\varepsilon)\,\mathsf{E}\,\tau, \end{cases}$$

звідки і знаходимо $\mathsf{E}\,\tau,\ \mathsf{E}\,\tau'$. □

Доведення теореми 2.1. Підставивши (9) у (8), отримаємо

$$\varphi(t) = \theta L(t) + (1-\theta)K \star \varphi(t), \tag{10}$$

де $K = K_1 \star K_2,\ \theta = \varepsilon + \delta - \varepsilon\delta,\ \theta L = \delta L_2 + \varepsilon(1-\delta)L_1 \star K_2$.

Із рівняння (10) випливає, що $\varphi(t)$ має вигляд (1).

Врахувавши (2), отримаємо

$$\varphi(t) = L \star (\theta + (1-\theta)\Phi)(t) \le \theta L(t) + (1-\theta)\Phi(t) \le \theta + (1-\theta)E_q(t) + 2\theta\varkappa. \tag{11}$$

Очевидно, що

$$\nu(K_1) \le \nu(K); \tag{12}$$

$$\nu(K_1) \ge \frac{(1-r)m}{1-\varepsilon}; \tag{13}$$

$$\nu_2(K_1) \le \frac{m_2}{1-\varepsilon}. \tag{14}$$

Згідно з [3, лема 3.1], функція $K_2(t) \geq B(t)$, тому

$$\nu_2(K_2) \leq b_2; \quad \nu(K_2) \leq b. \tag{15}$$

Із (14), (15), (12), дістаємо

$$\nu_2(K) = \nu_2(K_1) + 2\nu(K_1)\nu(K_2) + \nu_2(K_2) \leq \frac{m_2}{1-\varepsilon} + 2\nu(K)b + b_2,$$

а тому

$$\frac{\nu_2(K)}{\nu(K)} \leq \frac{m_2 + b_2}{(1-\varepsilon)\nu(K)} + 2b. \tag{16}$$

Поділивши (16) на $2\nu(K)$ і врахувавши (12), (13), отримаємо

$$\varkappa = \frac{\nu_2(K)}{2\nu^2(K)} \leq (1-\varepsilon)\left(\frac{m_2 + b_2}{2m^2(1-r)^2} + \frac{b}{m(1-r)}\right),$$

отже,

$$2\theta\varkappa \leq \Delta. \tag{17}$$

Оскільки $1-\exp(-ux) \leq ux$, то

$$\delta = \int_0^{+\infty} (1-\exp(-ux))dB(x) \leq ub. \tag{18}$$

Прирівнявши праву частину (11) до $1-\gamma$, знайдемо

$$t_\gamma \geq \frac{1}{q} \ln \frac{1-\theta}{\gamma + 2\theta\varkappa}. \tag{19}$$

Очевидно, що

$$1 - \theta = (1-\delta)(1-\varepsilon). \tag{20}$$

Із (12), (13), (20) отримуємо

$$q = \frac{\theta}{(1-\theta)\nu(K)} \leq \frac{\theta}{(1-\delta)m(1-r)}; \tag{21}$$

Підставивши (21), (17), (20) та (18) у (19) , одержимо твердження теореми 2.1. □

Доведення теореми 2.2. Верхню оцінку функції $\varphi(t)$ дістанемо з (11), (17). Оцінимо $\varphi(t)$ знизу, використавши (2).

$$\varphi(t) = L \star (\theta + (1-\theta)\Phi)(t) \geq L \star (\theta + (1-\theta)E_q)(t) - 2\theta\varkappa L(t) \geq L \star E_q(t) - 2\theta\varkappa. \tag{22}$$

Врахувавши [3, лема 3.2], із (22) отримуємо

$$\varphi(t) \geq E_q(t) - q\nu(L) - 2\theta\varkappa. \tag{23}$$

Перетворимо

$$\begin{aligned} q\nu(L) &= \frac{\theta}{(1-\theta)\nu(K)}\left(\frac{\delta}{\theta}\nu(L_2) + \frac{\varepsilon(1-\delta)}{\theta}(\nu(K_2) + \nu(L_1))\right) = \\ &= \frac{1}{\nu(K)}\left(\frac{\delta}{1-\theta}\nu(L_2) + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\nu(K_2) + \nu(L_1))\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Оскільки функція $1 - B(x)$ спадна, то з [3, лема 3.1] маємо $L_2(t) \geq 1-\exp(-ut)$, звідки $\nu(L_2) \leq 1/u$. Використавши нерівність $\exp(-ux) \leq 1$, дістаємо $\nu(L_2) \leq \dfrac{ub_2}{2\delta}$. Отже,

$$\delta\nu(L_2) \leq \alpha. \tag{25}$$

Оцінимо

$$\varepsilon\nu(L_1) = \int_0^\infty xr(x)dG(x) \leq rm. \tag{26}$$

Із (23)–(26), (17), (15), (12), (13), (20) дістаємо нижню оцінку $\varphi(t)$.

Тепер оцінимо функцію $\psi(t)$. Із (8), (9) випливає, що вона також має вигляд (1), але замість θL буде $\theta L' = \varepsilon L_1 + \delta(1-\varepsilon)L_2 \star K_1$.

У цьому випадку замість (24) маємо

$$q\nu(L') = \frac{1}{\nu(K)}\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\nu(L_1) + \frac{\delta}{1-\delta}\big(\nu(K_1)+\nu(L_2)\big)\right). \tag{27}$$

Підставивши у (27) нерівність (12), отримаємо

$$q\nu(L') \le \frac{1}{\nu(K_1)}\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\nu(L_1) + \frac{\delta}{1-\delta}\nu(L_2)\right) + \frac{\delta}{1-\delta}. \tag{28}$$

Із (28), (25), (26), (13) знаходимо для функції $\psi(t)$

$$q\nu(L') \le \frac{a_1}{(1-\delta)(1-r)}.$$

Решта оцінок для $\psi(t)$ такі самі, як і для $\varphi(t)$.

Теорему 2.2 доведено. □

Подяка

Автори висловлюють щиру вдячність анонімному рецензентові за увагу до роботи та суттєві зауваження, що дозволили покращити цю статтю.

Список літератури

1. N. V. Kartashov, *Inequalities in the Renyi theorem*, Teor. Veroyatnost. Mat. Stat. **45** (1991), 27–33; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **45** (1991), 23–28.
2. O. O. Kushnir, *Estimation of the time to failure distribution function convergence rate in a highly reliable system GI/G/1/0*, Teor. Imorvirn. Mat. Stat., **52** (1995), 99–101. (Ukrainian)
3. O. O. Kushnir, V. P. Kushnir *Properties of highly reliable systems with protection in the case of Poisson renewal process*, Theory Probab. Math. Statist., **96** (2018), 127–132.
4. V. S. Korolyuk and V. V. Korolyuk *Stochastic Models of Systems*, Springer-Science+Business Media B.V., Mathematics and Its Applications, 1999.
5. O. O. Kushnir, *The first failure of a highly reliable system of two elevators*, Teor. Imorvirn. Mat. Stat., **59** (1998), 110–116; English transl. in Theory Probab. Math. Statist. **59** (1999), 113–120.
6. I. N. Kovalenko, A. Birolini, *Uniform exponential bounds for the pointwise availability of a repairable system*, Exploring stochastic laws: Festschrift in honour of the 70th birthday of academician Vladimir Semenovich Korolyuk (A.V. Skorokhod, Yu.V. Borovskikh ed.), VSP, Zeist, 1995, 233–242.
7. J. Ben Atkinson, *The transient M/G/1/0 queue: some bounds and approximations for light traffic with application to reliability*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis **8** (1995), no. 4, 347–359.

Кафедра вищої математики, Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028

Адреса електронної пошти: kuchniroo@gmail.com

Кафедра вищої математики, Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, Національний університет водного господарства та природокористування, вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028

Адреса електронної пошти: a_vp_kushnir@meta.ua

Стаття надійшла до редколегії 31.01.2019

PROPERTIES OF HIGHLY RELIABLE DOUBLE SYSTEM IN THE EVENT OF THE WORK PHASE DISTRIBUTION OF ONE OF ALTERNATING PROCESSES IS EXPONENTIAL

O. O. KUSHNIR, V. P. KUSHNIR

Abstract. Some upper bounds for characteristics of reliability of highly reliable double system assuming that the work phase distribution of one of alternating processes is exponential.

СВОЙСТВА ВЫСОКОНАДЕЖНОЙ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОМЕЖУТКОВ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ОДНОГО ИЗ АЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ПРОЦЕССОВ

А. О. КУШНИР, В. П. КУШНИР

Аннотация. Приводятся оценки характеристик надежности высоконадежной дублированной системы в предположении, что распределение рабочей фазы одного из альтернирующих процессов — экспоненциальное.