Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(100)/2019, с. 131–141

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(100)/2019, pp. 131–141

УДК 519.21

ОДНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

І. К. МАЦАК

Анотація. Вивчаються умови збіжності максимуму норм сум незалежних однаково розподілених випадкових елементів у банахових просторах. Наводяться приклади застосувань до аналізу статистик типу ω^2.

Ключові слова і фрази. Центральна гранична теорема, банахові простори, максимум норми сум.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60B12.

1. Вступ

Нехай (ξ_n) — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н. о. р. в .в.) в $\mathbb{R}$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$ і $\mathbf{D}\xi_n = 1$. Наведемо рівності, які фактично були відомі давно (див. Башельє [1]), але здається вперше їх строге доведення дали П. Ердеш і М. Кац [2]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big\{\max(0, \xi_1, \xi_1+\xi_2, \dots, \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n) < x\sqrt{n}\big\} =$$
$$= \mathbf{P}\big\{\sup\nolimits_{0\le t\le 1} W(t) < x\big\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \exp\big(-t^2/2\big)dt, \tag{1}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big\{\max(|\xi_1|, |\xi_1+\xi_2|, \dots, |\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n|) < x\sqrt{n}\big\} =$$
$$= \mathbf{P}\big\{\sup\nolimits_{0\le t\le 1} |W(t)| < x\big\} = 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\exp\big(-\pi^2(2k+1)^2/\big(8x^2\big)\big), \tag{2}$$

де $W(t)$ — процес броунівського руху в $\mathbb{R}$.

У багатьох прикладних задачах (теорія масового обслуговування, теорія страхування і т. п.) виникає необхідність знаходження асимптотичного розподілу максимуму сум н. в. в. Тому рівності типу (1), (2) досліджувалися в багатьох роботах. Розглядався звичайно і випадок простору $\mathbb{R}^m$ [3–5] . Відзначимо також статті [6, 7], в яких вивчалась слабка збіжність максимуму сум незалежних випадкових процесів, вибіркові функції яких лежать у просторах L_p та $C[0,1]$.

У даній роботі використовується дещо інший підхід ніж у [6, 7]. Це дозволить нам отримати аналог рівності (2) для довільного банахового простору.

Нехай B — сепарабельний банахів простір, X — випадковий елемент (в. е.) визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Sigma, \mathbf{P})$ зі значеннями в B, $\mathbf{E}X = 0$. Із умови (6), яка далі буде накладатися на в. е. X, випливає, що $\|X\|$ має моменти порядку p при $0 < p < 2$. Тому можна розуміти $\mathbf{E}X$, як інтеграл Бохнера.

Припустимо, що в. е. X задовольняє умову:

$$\forall\, y^*, z^* \in B^* \qquad \mathbf{E}(y^*, X)(z^*, X) = \mathbf{E}(y^*, \Gamma)(z^*, \Gamma) = (\mathbf{R}y^*, z^*), \tag{3}$$

де Γ — деякий нормально розподілений в.е. зі значеннями в B, $\mathbf{E}\Gamma = 0$, $\mathbf{R}\colon B^* \to B$ — коваріаційний оператор в. е. X та Γ, B^* — спряжений простір ([8, гл. 3, § 2]).

Через (X_n) будемо позначати послідовність незалежних копій в. е. X і покладемо $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$. Якщо справджується слабка збіжність

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \Gamma, \quad \text{при } n \to \infty, \tag{4}$$

то кажуть, що в. е. X задовольняє центральну граничну теорему (ЦГТ).

ЦГТ досить інтенсивно вивчалась (див. [9] і літературу там). Відомо, наприклад, що для банахового простору типу 2 умова

$$\mathbf{E}\|X\|^2 < \infty \tag{5}$$

достатня для виконання ЦГТ, а у банахових просторах котипу 2 в. е. X, для якого виконується умова (3), також задовольняє ЦГТ.

Для довільного сепарабельного банахового простору в роботі [9, с. 289, теорема 10.13], установлено такий критерій:
умови

$$\lim_{t\to\infty} t^2 \mathbf{P}\{\|X\| > t\} = 0 \tag{6}$$

та

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} < \epsilon \right\} = \alpha(\epsilon) > 0 \tag{7}$$

є необхідними і достатніми для того, щоб в. е. X задовольняв ЦГТ.

Зрозуміло, що при виконанні ЦГТ маємо

$$\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \|\Gamma\|, \quad n \to \infty.$$

Виявляється це співвідношення можна посилити таким чином

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leq k\leq n} \|S_k\| \xrightarrow{D} \sup_{0\leq t\leq 1} \|W(t)\|, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

де $W(t), t \geq 0,$ — процес броунівського руху (або вінерівський процес) зі значеннями в B.

Нагадаємо деякі означення, які використовуються в роботі.

Означення 1. Процес броунівського руху $W(t), t \geq 0$ — це нормально розподілений, неперервний, однорідний процес із незалежними приростами зі значеннями в B, $W(0) = 0, \mathbf{E}W(t) = 0$. Характеристичний функціонал процесу $W(t)$ задається формулою

$$\varphi(t, z^*) = \exp\left(-\frac{t}{2} (\mathbf{R}z^*, z^*) \right), \tag{9}$$

де $z^* \in B^*$, $\mathbf{R}\colon B^* \to B$ — коваріаційний оператор в. е. Γ.

Це означення для випадку $B = \mathbb{R}^m$ збігається із класичним означенням [3, с. 65].

Означення 2. Послідовність (e_n) елементів банахового простору B називається базисом (Шаудера), якщо будь-який елемент $x \in B$ однозначно розкладається в ряд $x = \sum a_n e_n$, який збігається за нормою до x, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = 0.$$

Основний результат роботи складає така теорема.

Теорема 1. *Нехай B — сепарабельний банахів простір із базисом (e_n), X — в. е. зі значеннями в B, $\mathbf{E}X = 0$, R — коваріаційний оператор в. е. X. І нехай виконуються умови (6), (7). Тоді правильне асимптотичне співвідношення (8), у якому $W(t), t \geq 0$, — процес броунівського руху в B з характеристичним функціоналом (9) .*

У кінці роботи ми наведемо деякі приклади застосувань теореми 1 у статистиці.

2. Допоміжні твердження

Важлива роль у доведенні теореми 1 належить лемі, яка встановлена в роботі [3, с. 78, наслідок 1].

Лема 1. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — н. о. р. в. в. із значеннями в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}(\xi_n, z)^2 = (\mathbf{R}z, z)$, де $\mathbf{R}$ — невід'ємний симетричний лінійний оператор в $\mathbb{R}^m$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, S_0 = 0$, а $W(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))$ — процес броунівського руху в $\mathbb{R}^m$, для якого $\mathbf{E}W(t) = 0$, $\mathbf{E}(W(t), z)^2 = t(\mathbf{R}z, z)$. І нехай $\varphi(x)$ — функція, визначена на $\mathbb{R}^m$, неперервна й однорідна степеня α, тобто $\varphi(\lambda x) = \lambda^\alpha \varphi(x)$ при $\lambda > 0$.*

Тоді при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^{\alpha/2}} \max_{0 \leq k \leq n} \varphi(S_k) \xrightarrow{D} \sup_{0 \leq t \leq 1} \varphi(W(t)).$$

Лема 2. *Нехай $X = (X(t), t \in T)$, — сепарабельний, нормально розподілений випадковий процес, заданий на параметричній множині T, (X_k) — послідовність сепарабельних незалежних копій X і*

$$\|X\| = \sup_{t \in T} |X(t)| < \infty \quad \text{м. н.}$$

Тоді $\exists \beta > 0$, $C_\beta > 0$ такі, що $\forall x > \sqrt{2/\beta}$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{k \geq 2} \frac{\|X_k\|}{\sqrt{\ln k}} \geq x\right\} \leq C_\beta 2^{-\beta x^2}. \tag{10}$$

Доведення леми 2. Відомо із [10], що в умовах леми 2 $\exists \beta > 0$ таке, що

$$\mathbf{E} \exp(\beta \|X_k\|^2) = K_\beta < \infty. \tag{11}$$

Позначимо через $\zeta_k = \|X_k\| / \sqrt{\ln k}$, $k \geq 2$. Якщо $x > 0$, то із (11) маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{k \geq 2} \zeta_k \geq x\right) &\leq \sum_{k \geq 2} \mathbf{P}(\zeta_k \geq x) = \sum_{k \geq 2} \mathbf{P}\left(\|X\| \geq x\sqrt{\ln k}\right) \leq \\ &\leq \sum_{k \geq 2} \mathbf{E} \exp(\beta \|X_k\|^2) \cdot \exp(-\beta x^2 \ln k) = K_\beta \sum_{k \geq 2} k^{-\beta x^2} = \\ &= K_\beta 2^{-\beta x^2} \sum_{k \geq 2} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\beta x^2}. \end{aligned}$$

Але при $x > \sqrt{2/\beta}$ остання сума обмежена величиною

$$4 \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2} = 4\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right).$$

Звідси негайно отримуємо нерівність (10). □

Зауваження 1. Із нерівності (10) негайно випливає оцінка:

$$\forall p > 0 \quad \mathbf{E} \sup_{k \geq 2} \left| \frac{\|X_k\|}{\sqrt{\ln k}} \right|^p < \infty. \tag{12}$$

Лема 3. *Нехай* $(c_{m,n}), (A_n), (C_m)$ — *числові послідовності, які задовольняють такі умови:*

$$\forall m,n \geq 1 \quad |c_{m,n}| \leq A_n, \quad \sum\nolimits_{n\geq 1} A_n < \infty,$$

$$\forall n \geq 1 \quad \lim_{m\to\infty} c_{m,n} = 0, \quad \sum\nolimits_{n\geq 1} c_{m,n} = C_m.$$

Тоді

$$\lim_{m\to\infty} C_m = 0$$

(див. [11, розд. 1, гл. 4, § 2, задача 180]).

Лема 4. *Нехай для в. в.* $(Z_{m,n})$, (Z_m), Z, (Y_n) *виконуються асимптотичні співвідношення:*

$$\forall m \geq 1 \quad Z_{m,n} \xrightarrow{D} Z_m, \quad \textit{при } n \to \infty, \tag{13}$$

$$Z_m \xrightarrow{D} Z, \quad \textit{при } m \to \infty, \tag{14}$$

і

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Z_{m,n} - Y_n| > \epsilon) = 0. \tag{15}$$

Тоді

$$Y_n \xrightarrow{D} Z, \quad \textit{при } n \to \infty$$

(див. [12, гл. 1, § 4, теорема 4.2]).

3. Доведення теореми 1

Оскільки за умов (6), (7) виконується ЦГТ в B, то існує нормально розподілений в. е. Γ зі значеннями в B, який задовольняє рівність (3). Тоді можна ввести випадкову функцію

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \Phi_k(t), \tag{16}$$

де (Γ_k) — послідовність незалежних копій Γ, а $\Phi_k(t)$ — пікоподібні функції Фабера–Шаудера (які є інтегралами відповідних функцій Гаара $H_k(u)$, точніше $\Phi_k(t) = \int_0^t H_{k-1}(u)du$).

Відомо (див. [13, с. 128], [6]), що ряд (16) збігається за нормою простору B рівномірно по $t \in [0,1]$ м. н. і є зображенням броунівського руху в B. Зазначимо, що для дійсної прямої така конструкція була запропонована Леві [14] (див. також [15]).

Далі для всіх $k \geq 1$ розкладемо в. е. X_k та Γ_k по базису (e_i) :

$$X_k = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{k,i} e_i, \quad \Gamma_k = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{k,i} e_i.$$

Зафіксуємо ціле $m > 1$ і введемо такі позначення:

$$X_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{k,i} e_i, \qquad \Gamma_k^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{k,i} e_i,$$

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(m)}, \qquad W^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_k^{(m)} \Phi_k(t).$$

Щоб застосувати лему 4 виберемо

$$Z_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leq k\leq n} \left\| S_k^{(m)} \right\|, \qquad Z_m = \sup_{0\leq t\leq 1} \left\| W^{(m)}(t) \right\|,$$

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \|S_k\|, \qquad\qquad Z = \sup_{0\le t\le 1} \|W(t)\|.$$

Тоді умови (13)–(15) леми 4 перепишуться так:

$$\forall m \ge 1 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \left\|S_k^{(m)}\right\| \xrightarrow{D} \sup_{0\le t\le 1} \left\|W^{(m)}(t)\right\|, \quad \text{при } \ n\to\infty, \tag{17}$$

$$\sup_{0\le t\le 1} \left\|W^{(m)}(t)\right\| \xrightarrow{D} \sup_{0\le t\le 1} \|W(t)\|, \quad \text{при } \ m\to\infty, \tag{18}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \left\|S_k^{(m)}\right\| - \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \|S_k\| \right| > \epsilon \right) = 0. \tag{19}$$

Таким чином за лемою 4 теорему 1 буде встановлено, якщо ми доведемо асимптотичні співвідношення (17)–(19).

Почнемо із (17). Оскільки в. е. X_k та Γ_k задовольняють рівності (3) для довільних $z^*, y^* \in B^*$, то звідси випливає, що

$$\forall i, l \ge 1 \quad \mathbf{E}\xi_{k,i} = \mathbf{E}\gamma_{k,i} = 0, \quad \mathbf{E}\xi_{k,i}\xi_{k,l} = \mathbf{E}\gamma_{k,i}\gamma_{k,l}\,,$$

тобто в. е. $X_k^{(m)}$ та $\Gamma_k^{(m)}$ мають однакові коваріаційні оператори.

Далі для довільного $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ покладемо $\varphi(x) = \|\sum_{i=1}^m x_i e_i\|$.

Зрозуміло, що $\varphi(x)$ неперервна й однорідна степеня $\alpha = 1$ функція на $\mathbb{R}^m$. Тому за лемою 1 при $n\to\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \left\|S_k^{(m)}\right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le n} \varphi\left(\sum_{l=1}^k \xi_{l,1}, \dots, \sum_{l=1}^k \xi_{l,m} \right) \xrightarrow{D}$$

$$\xrightarrow{D} \sup_{0\le t\le 1} \varphi\left(\sum_{k=1}^\infty \gamma_{k,1}\Phi_k(t), \dots, \sum_{k=1}^\infty \gamma_{k,m}\Phi_k(t) \right) = \sup_{0\le t\le 1} \left\|W^{(m)}(t)\right\|,$$

тобто (17) справедливе.

Перейдемо до співвідношення (18). Позначимо через

$$\Delta^{(m)} = \left| \sup_{0\le t\le 1} \left\|W^{(m)}(t)\right\| - \sup_{0\le t\le 1} \|W(t)\| \right|.$$

Тоді з елементарної числової нерівності

$$\left| \max_{1\le k\le n} a_k - \max_{1\le k\le n} b_k \right| \le \max_{1\le k\le n} |a_k - b_k|$$

та нерівності трикутника маємо

$$\Delta^{(m)} \le \sup_{0\le t\le 1} \left\|W^{(m)}(t) - W(t)\right\| = \sup_{0\le t\le 1} \left\| \sum_{k=1}^\infty (\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k)\Phi_k(t) \right\|. \tag{20}$$

Добре відомо, що функції Фабера–Шаудера $\Phi_k(t)$ невід'ємні і задовольняють нерівності

$$|\Phi_k(t)| \le 2^{-j/2-1} \quad \text{при } \ 2^j \le k \le 2^{j+1}.$$

Причому, коли k міститься в цих межах, носії функцій $\Phi_k(t)$ не перетинаються. Тому

$$\sup_{0\le t\le 1} \left\| \sum_{k=1}^\infty \left(\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k\right)\Phi_k(t) \right\| \le \sum_{j\ge 0} \max_{2^j\le k\le 2^{j+1}} \left\|\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k\right\| 2^{-j/2-1}.$$

Звідси та із (20) маємо

$$\mathbf{E}\Delta^{(m)} \le \frac{1}{2} \sum_{j\ge 0} 2^{-j/2}\, \mathbf{E} \max_{2^j\le k\le 2^{j+1}} \left\|\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k\right\|. \tag{21}$$

Позначимо через $Q^{(m)}$ оператор проектування на підпростір, натягнутий на вектори $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Як добре відомо [16, розділ 1.a, твердження 1.a.2], існує абсолютна константа K така, що

$$\forall x \in B \quad \left\|Q^{(m)}(x) - x\right\| \leq K\|x\|. \tag{22}$$

Оскільки при $m \to \infty$

$$\left\|\Gamma^{(m)} - \Gamma\right\| \to 0 \quad \text{м. н.},$$

то, застосовуючи теорему Лебега, оцінку (12) із зауваження 1 та (22), отримаємо

$$\forall p > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\left\|\Gamma^{(m)} - \Gamma\right\|^p = 0. \tag{23}$$

Далі скористаємось лемою 3. Виберемо

$$c_{m,j} = 2^{-j/2}\mathbf{E} \max_{2^j \leq k \leq 2^{j+1}} \left\|\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k\right\|,$$

$$A_j = K2^{-j/2}\sqrt{j+1}\,\mathbf{E}\max_{k\geq 2} \frac{\|\Gamma_k\|}{\sqrt{\ln k}},$$

де K — константа із нерівності (22).

Тоді з (23) випливає, що при фіксованому j

$$\lim_{m\to\infty} c_{m,j} = 0. \tag{24}$$

Ще раз застосовуючи оцінку (22), отримаємо

$$\begin{aligned} c_{m,j} &\leq K2^{-j/2}\mathbf{E} \max_{2^j \leq k < 2^{j+1}} \|\Gamma_k\| \leq \\ &\leq K2^{-j/2}\sqrt{j+1}\,\mathbf{E} \max_{2 \leq k \leq 2^j+1} \frac{\|\Gamma_k\|}{\sqrt{\ln k}} \leq A_j. \end{aligned} \tag{25}$$

Враховуючи оцінку (12), маємо

$$\sum_{j\geq 1} A_j < \infty. \tag{26}$$

Співвідношення (24)–(26) показують, що умови леми 3 виконуються. А отже

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j\geq 0} 2^{-j/2}\,\mathbf{E} \sup_{2^j \leq k \leq 2^{j+1}} \left\|\Gamma_k^{(m)} - \Gamma_k\right\| = 0.$$

Остання рівність разом із нерівністю (21) дають

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{E}\Delta^{(m)} = 0.$$

Оскільки зі збіжності в середньому випливає слабка збіжність, то (18) установлено.

Залишається довести рівність (19). Виберемо довільне p, $1 < p < 2$. Тоді з умови (6) випливає, що

$$\mathbf{E}\|X\|^p < \infty. \tag{27}$$

Далі так само, як і при доведенні оцінки (20), одержуємо

$$\mathbf{E}\left|\max_{0\leq k\leq n}\left\|S_k^{(m)}\right\| - \max_{0\leq k\leq n}\|S_k\|\right|^p \leq \mathbf{E}\max_{0\leq k\leq n}\left\|S_k^{(m)} - S_k\right\|^p. \tag{28}$$

Оцінимо вираз у правій частині (28). У наших умовах $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^m = 0$. Окрім того виконується нерівність (27). Звідси неважко перевірити, що послідовність ($\eta_k = \|S_k^{(m)} - S_k\|, k \geq 1$) утворює субмартингал. Справді, при $k < n$

$$\mathbf{E}_k\eta_n = \mathbf{E}_k\left\|S_n^{(m)} - S_n\right\| \geq \left\|\mathbf{E}_k(S_n^{(m)} - S_n)\right\| = \left\|S_k^{(m)} - S_k\right\| = \eta_k.$$

Тут через $\mathbf{E}_k\eta$ позначаємо умовне математичне сподівання в. в. η при фіксованих випадкових елементах X_i, $i = \overline{1,k}$.

А отже можна застосувати відому оцінку для субмартингалів [17, с. 78]:

$$\mathbf{E}\max_{0\le k\le n}\left\|S_k^{(m)}-S_k\right\|^p\le\frac{p}{p-1}\mathbf{E}\left\|S_n^{(m)}-S_n\right\|^p. \qquad (29)$$

Далі, спираючись на співвідношення (7), покажемо, що в. е. $X-X^{(m)}$ задовольняє ЦГТ. Маємо: $\forall\epsilon>0$

$$\liminf_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\|S_n-S_n^{(m)}\|}{\sqrt{n}}<\epsilon\right\}\ge\liminf_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{K\frac{\|S_n\|}{\sqrt{n}}<\epsilon\right\}=\alpha\Big(\frac{\epsilon}{K}\Big)>0,$$

тут була використана також оцінка (22).

Таким чином

$$\frac{\|S_n-S_n^{(m)}\|}{\sqrt{n}}\xrightarrow{D}\left\|\Gamma-\Gamma^{(m)}\right\|,\quad \text{при}\ \ n\to\infty. \qquad (30)$$

Причому $\forall p\in(0,2)$

$$\sup_{n\ge1}\mathbf{E}\left\|\frac{S_n-S_n^{(m)}}{\sqrt{n}}\right\|^p<\infty \qquad (31)$$

(див. [9, с. 275, наслідок 10.2]).

Співвідношення (30), (31) забезпечують збіжність відповідних моментів [12, гл. 1, § 5, теорема 5.4]: $\forall p\in(0,2)$

$$\mathbf{E}\left\|\frac{S_n-S_n^{(m)}}{\sqrt{n}}\right\|^p\to\mathbf{E}\left\|\Gamma-\Gamma^{(m)}\right\|^p,\quad \text{при}\ \ n\to\infty.$$

Останнє співвідношення разом із оцінками (28), (29) дають

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\max_{0\le k\le n}\|S_k\|-\max_{0\le k\le n}\left\|S_k^{(m)}\right\|\right|^p/n^{p/2}\le\frac{p}{p-1}\,\mathbf{E}\left\|\Gamma-\Gamma^{(m)}\right\|^p.$$

Щоб отримати звідси (19), залишається застосувати нерівність Маркова та (23). □

4. Деякі наслідки та приклади застосувань

Спочатку наведемо два наслідки теореми 1. Розглянемо простір $([0,1],\Lambda,\mu)$, де Λ — σ-алгебра борелевих множин відрізка $[0,1]$, а μ — міра Лебега. Через $L_p = L_p[0,1]$, $1\le p<\infty$, позначаємо банахів простір (класів) вимірних функцій $x(t)$ на просторі $([0,1],\Lambda,\mu)$ із нормою $\|x\|_p=\left(\int_0^1|x(t)|^p\mu(dt)\right)^{1/p}$.

Щоб отримати співвідношення (8) у просторі L_p, будемо вважати, що $X = (X(t),t\in[0,1])$ — вимірний, випадковий процес,

$$\forall t\in[0,1]\quad \mathbf{E}X(t)=0,\quad \sigma_p(t)=(\mathbf{E}|X(t)|^p)^{1/p}<\infty,$$

і який задовольняє умови:

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1|X(t)|^pdt\right)^{2/p}<\infty,\quad \text{при}\ \ p\ge2, \qquad (32)$$

або

$$\int_0^1|\sigma_2(t)|^pdt<\infty,\quad \text{при}\ \ 1\le p\le2. \qquad (33)$$

Оскільки простір L_p при $p\ge2$ має тип 2, а при $1\le p\le2$ — котип 2, то з теореми 1 випливає наслідок 1.

Наслідок 1. *Нехай $X(t)$ — вимірний випадковий процес, який задовольняє умову (32) або (33). Тоді у просторі L_p виконується слабка збіжність (8).*

Зауваження 2. 1. Неважко побачити, що при $p \geq 2$ умова

$$\int_0^1 |\sigma_p(t)|^p dt < \infty$$

буде достатньою для виконання (32)(див. також [7], де отримано близький до наслідку 1 результат у просторі L_p).

2. Для простору $B = C[0,1]$ із теореми 1 та результатів роботи [7] також можна отримати слабку збіжність (8).

Далі розглянемо банахів простір $B = l_p, 1 \leq p < \infty$. Це простір послідовностей, сумовних у p-му степені,

$$l_p = \left\{ x = (x_i)_1^\infty : \|x\|_{l_p} = \left(\sum_{i \geq 1} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Так само, як і вище, із теореми 1 випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Нехай в. е.* $X = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l_p$ *м. н.,*

$$\forall i, j \geq 1, \quad \mathbf{E}X = \mathbf{E}\xi_i = 0, \quad \sigma_p(i) = (\mathbf{E}|\xi_i|^p)^{1/p}, \quad r_{ij} = \mathbf{E}\xi_i \xi_j.$$

Якщо виконуються умови

$$\sum_{i \geq 1} |\sigma_p(i)|^p < \infty, \quad \textit{при } p \geq 2, \tag{34}$$

або

$$\sum_{i \geq 1} |\sigma_2(i)|^p < \infty, \quad \textit{при } 1 \leq p \leq 2,$$

то в. е. X задовольняє ЦГТ (4) і виконується слабка збіжність (8). При цьому

$$\Gamma = (\gamma_i^*)_1^\infty \in l_p, \quad \mathbf{E}\gamma_i^* = 0, \quad r_{ij} = \mathbf{E}\gamma_i^* \gamma_j^*.$$

Приклад 1. Нехай (u_i) — н. о. р. в. в. з функцією розподілу $F(x) = x$, $x \in [0,1]$, тобто u_i рівномірно розподілені на [0,1]. Позначимо через

$$F_n^*(s) = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} I(u_i \in [0,s]), \quad s \in \mathbb{R},$$

емпіричну функцію розподілу в. в. u_i, $i = \overline{1,n}$, де $I(A)$ — індикатор випадкової події A.

Розглянемо класичні статистики ω_n^2 та Ω_n^2:

$$\omega_n^2 = \int_0^1 |F_n^*(s) - s|^2 ds, \quad \Omega_n^2 = \int_0^1 \frac{|F_n^*(s) - s|^2}{s(1-s)} ds.$$

Нехай $W_0(s)$, $s \in [0,1]$, — нормально розподілений, випадковий процес, для якого

$$\mathbf{E}W_0(s) = 0, \quad \mathbf{E}W_0(s_1)W_0(s_2) = \min(s_1, s_2) - s_1 s_2.$$

Такий процес називається *броунівським мостом.*

Добре відомо (див. [18, розділ 6] та літературу там), що при $n \to \infty$

$$n\omega_n^2 \xrightarrow{D} \int_0^1 |W_0(s)|^2 ds, \tag{35}$$

$$n\Omega_n^2 \xrightarrow{D} \int_0^1 \frac{|W_0(s)|^2}{s(1-s)} ds. \tag{36}$$

Наслідок 1 дозволяє посилити співвідношення (35), (36) таким чином.

Твердження 1. *Нехай $B = L_2$ і у зображенні (16) броунівського процесу $W(t, s)$ $(\Gamma_n(s),\ s \in [0,1]) \overset{d}{=} (W_0(s),\ s \in [0,1])$. Тоді при $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n} \sup_{1 \le k \le n} k^2 \omega_k^2 \overset{D}{\to} \sup_{0 \le t \le 1} \int_0^1 |W(t,s)|^2 ds, \tag{37}$$

$$\frac{1}{n} \sup_{1 \le k \le n} k^2 \Omega_k^2 \overset{D}{\to} \sup_{0 \le t \le 1} \int_0^1 \frac{|W(t,s)|^2}{s(1-s)} ds. \tag{38}$$

Доведення. Дійсно, щоб отримати співвідношення (37), розглянемо у просторі L_2 випадкові процеси

$$X_i(s) = I(u_i \in (0,s)) - s.$$

Тоді

$$\mathbf{E}X_i(s) = 0, \ \ \mathbf{E}X_i(s_1)X_i(s_2) = R(s_1, s_2) = \min(s_1, s_2) - s_1 s_2,$$

тобто кореляційні функції процесів $X_i(s)$ та $W_0(s)$ є однаковими. Далі знаходимо

$$\mathbf{E}\|X_i\|^2 = \int_0^1 \mathbf{E}|X_i(s)|^2 ds = \int_0^1 s(1-s) ds = \frac{1}{6}.$$

Звідси та із зауваження 2 негайно випливає (37).

Так само доводиться (38). У цьому випадку слід вибрати

$$X_i(s) = \frac{I(u_i \in (0,s)) - s}{|s(1-s)|^{1/2}}, \quad \text{а} \quad \Gamma_n(s) \overset{d}{=} \frac{W_0(s)}{|s(1-s)|^{1/2}}. \qquad \square$$

Зауваження 3. У з'язку із твердженням 1 відзначимо, що для статистики Колмогорова $D_n = \sup_{1 \le s \le 1} |F_n^*(s) - s|$ також можна встановити асимптотичні співвідношення, подібні до (37), (38).

Точніше, при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{1 \le k \le n} k D_k \overset{D}{\to} \sup_{0 \le t \le 1} \sup_{0 \le s \le 1} |W(t,s)|, \tag{39}$$

де $W(t,s)$ — броунівський процес, уведений у твердженні 1 (див. [19]).

Приклад 2. Нехай ζ — дискретна в. в.,

$$\mathbf{P}(\zeta = k) = p_k, \quad \Sigma_{k \ge 1} p_k = 1. \tag{40}$$

Визначимо в. е. X у просторі l_2 рівностями

$$X = (\xi_k, k \ge 1), \quad \xi_k = I(\zeta = k) - p_k,$$

де $I(A)$ — індикатор випадкової події A.

Ясно, що

$$\mathbf{E}\xi_k = 0, \quad \mathbf{D}\xi_k = p_k - p_k^2, \quad \mathbf{E}\xi_i\xi_j = -p_i p_j.$$

Далі введемо граничний в. е. Γ. Позначимо через $(\gamma_k, k \ge 1)$ — послідовність н. о. р. в. в., які мають стандартний нормальний розподіл, $\mathbf{E}\gamma_k = 0, \mathbf{D}\gamma_k = 1$.

І нехай $Z = \sum_1^\infty \gamma_k \sqrt{p_k}$ (останній ряд збігається м. н. в силу рівностей (40)). Уведемо в.в. $\gamma_k^* = p_k Z - \sqrt{p_k}\gamma_k, k \ge 1$, та покладемо

$$\Gamma = (\gamma_k^*, k \ge 1). \tag{41}$$

Неважко перевірити, що

$$\forall k \ge 1 \quad \mathbf{E}Z = \mathbf{E}\gamma_k^* = 0, \quad \mathbf{D}Z = 1, \quad \mathbf{D}\gamma_k^* = p_k - p_k^2,$$
$$\forall i \ne j \quad \mathbf{E}\gamma_i^*\gamma_j^* = -p_i p_j.$$

Звідси ясно, що

$$\sum_{1}^{\infty} |\gamma_k^*|^2 < \infty \quad \text{м. н.}$$

А отже $\Gamma \in l_2$ м. н.

Із наведених вище рівностей зрозуміло, що в. е. X та Γ мають однакові коваріаційні оператори. А отже із наслідку 2 маємо таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $(\zeta_n, n \geq 1)$ *— послідовність незалежних копій в. в.* ζ*,*

$$\Delta_n = \left\| P_n^*(\cdot) - p_{(\cdot)} \right\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |P_n^*(k) - p_k|^2 \right)^{1/2},$$

де

$$P_n^*(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I(\zeta_i = k) - \text{емпіричний розподіл.}$$

Якщо Γ *— в. е., визначений у рівності (41), то при* $n \to \infty$

$$\sqrt{n}\Delta_n \xrightarrow{D} \|\Gamma\|_{l_2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{1 \leq k \leq n} k\Delta_k \xrightarrow{D} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|W(t)\|_{l_2},$$

де $W(t)$ *задається формулою (16), в якій* Γ_n *— незалежні копії* Γ*.*

Зауваження 4. Цікаво відзначити, що компоненти γ_k^* в. е. Γ у прикладі 2 задовольняють умову

$$\sum_{1}^{\infty} \gamma_k^* = 0 \quad \text{м. н.},$$

тобто в. е. Γ у просторі l_2 — це певний аналог відомого процесу броунівського моста із прстору $C[0, 1]$.

Список літератури

1. P. Bachelier, *Theorie de la speculation*, Ann. Ecol. norm., **17** (1900), 21–86.
2. E. Erdös, M. Kac, *On certain limit theorems in the theory of probability*, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 292–302.
3. A. V. Skorokhod, N. P. Slobodenyuk, *Limit theorems for random walks*, Naukova dumka, Kyiv, 1970. (Russian)
4. V. Paulauskas, *On the distribution of the maximum of consecutive sums independent identically distributed random vectors*, Lietuvos matem. rinkinys, **13** (1973), 133–138.
5. V. Paulauskas, S. Steishunas, *On the rate of convergence of the maximum distribution of consecutive sums of independent random vectors to limit law*, Lietuvos matem. rinkinys, **13** (1973), 139–147.
6. I. K. Matsak, *Some limit theorem for maximum sums of independent random processes*, Ukr. mat. j., **60** (2008), 1664–1674. (Ukrainian)
7. I. K. Matsak, A. M. Plichko, A. S. Sheludenko, *Limit theorems for the maximum of sums of independent random processes*, Ukr. mat. j., **70** (2018), 506–518. (Ukrainian)
8. N. N. Vachania, B. I. Tarieladze, S. A. Chobanyan, *Probability distributions in Banach spaces*, Nauka, Moscow, 1985. (Russian)
9. M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Springer, Berlin, 1991.
10. X. Fernique, *Regularite des trajectoires des fonctions aleatoires gaussiennes*, Lect. Not. Math., **480** (1975), 1–96.
11. G. Polya, G. Szego, *Problems and theorems from analysis*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1964.
12. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1968.
13. J. Lamperty, *Probability*, Benjamin, New York, 1966.
14. P. Levy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

15. Z. Ciesielsky, *Holder condition for realizations of Gaussian processes*, TAMS, **99** (1961), 403–413.
16. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
17. I. I. Gihman, A. V. Skorokhod, *The Theory of Stochastic Processes*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
18. L. N. Bolshev, N. V. Smirnov, *Tables of mathematical statistics*, Nauka, Moscow, 1983. (Russian)
19. A. S. Sheludenko, *Limit theorem for some statistics of type Kolmogorov-Smirnov*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, ser. Mathematics. Mechanics, **38** (2017), no. 4, 54–58. (Ukrainian)

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, проспект Глушкова, 2, корп. 6, Київ, Україна, 03127
Адреса електронної пошти: ivanmatsak@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 01.01.2019

A LIMIT THEOREM FOR THE SUMS OF INDEPENDENT RANDOM ELEMENTS IN A BANACH SPACE

I. K. MATSAK

Abstract. Conditions for the convergence of the maximum of the norms of sums of independent identical distributed random elements in the Banach spaces are studied. Examples of applications to analysis of statistics type ω^2 are presented.

ОДНА ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНИХ ЕЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. К. МАЦАК

Аннотация. Изучаются условия сходимости максимума нормы сумм независимых одинаково распределенных случайных елементов в банаховых пространствах. Даны примеры применений к анализу статистик типа ω^2.