Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(100)/2019, с. 43–59

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(100)/2019, pp. 43–59

УДК 519.21

# ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ, КЕРОВАНЕ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

І. М. БОДНАРЧУК, В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння у тривимірному просторі, керованого загальною стохастичною мірою. Доведено існування та єдиність м'якого розв'язку. Отримано неперервність за Гельдером його траєкторій за часовою та просторовою змінними.

*Ключові слова і фрази.* Стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, м'який розв'язок, неперервність за Гельдером, простір Бєсова.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60G17, 60G57.

## 1. Вступ

Ми продовжуємо дослідження властивостей м'якого розв'язку хвильового рівняння, керованого загальною стохастичною мірою, попередні результати якого представлено у роботах [1, 2].

Нехай $\mathsf{X}$ — довільна множина, $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ — σ-алгебра підмножин з $\mathsf{X}$; $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це збіжність за ймовірністю. Нехай також $\mu$ — стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, тобто, σ-адитивне відображення

$$\mu : \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}).$$

Приклади стохастичних мір можна знайти у [3, розділ 7] та [4, 5].

Розглядаємо задачу Коші:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x); \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$, $T > 0$, $a > 0$, та $\mu$ — стохастична міра, визначена на борелевій σ-алгебрі $\mathcal{B}([0,T])$, у такому м'якому сенсі (див., наприклад [6]):

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t, x-y) v_0(y)\, dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t,x-y) u_0(y)\, dy\right) + \\ &+ \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t-s, x-y) f(s,y,u(s,y))\, dy + \\ &+ \int_0^t d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{S}_d(t-s,x-y)\sigma(s,y)\, ds\,, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\mathcal{S}_d$ — фундаментальний розв'язок хвильового рівняння в $\mathbb{R}^d$.

Інтеграли від випадкових функцій по $dy$ та $ds$ беруться для кожного фіксованого $\omega \in \Omega$. Такі інтеграли досліджено, наприклад у [7].

У статтях [1, 2] досліджено дану задачу з одновимірною та двовимірною просторовими змінними відповідно. Доведено існування та єдиність м'якого розв'язку, установлено гельдеровість його траєкторій та неперервну залежність від даних задачі. У цій статті ми певним чином узагальнюємо результати робіт [1, 2] на випадок, коли просторова змінна є тривимірною. А саме, доводимо, що існує єдиний м'який розв'язок задачі Коші (1), визначений рівністю (4) нижче, та показуємо його неперервність за Гельдером за сукупністю змінних.

Властивості м'яких розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із частинними похідними досліджувались у багатьох роботах. Зокрема, у [8] доведено існування та єдиність розв'язку для класу неавтономних параболічних змішаних диференціальних рівнянь, які визначені на обмеженій відкритій підмножині $D \in \mathbb{R}^d$ і містять стандартний та дробовий $L^2(D)$-значні дробові броунівські рухи. Хвильові рівняння із шумом Леві та $\alpha$-стійкими розподілами вивчалися в роботах [9] та [10–12] відповідно. Варто відмітити, що у [10] досліджено хвильове рівняня, кероване кольоровим $\alpha$-стійким шумом, який є похідною від анізотропного гармонізованого дробового стійкого поля з $\alpha \in (1,2)$ та індексом Хюрста $H \in (1/2,1)$. Зокрема, у зазначеній роботі визначено відповідну випадкову міру, доведено її $\sigma$-адитивність за ймовірністю та побудовано стохастичний інтеграл за такою $\alpha$-стійкою мірою. Також гельдеровість розв'язку за сукупністю змінних установлено для параболічного рівняння із циліндричним вінерівським процесом у [13] та для неоднорідного хвильового рівняння, керованого гауссовим полем див. [14]. У статті [15] за допомогою рядів Фур'є–Хаара доведено збіжність м'яких розв'язків за умови, що збігаються траєкторії відповідних стохастичних мір. Докладні дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із частинними похідними можна знайти в [16, 17] або [18]. У більшості робіт на стохастичні інтегратори накладаються такі додаткові умови, як існування моментів, мартингальність тощо. Об'єктом дослідження цієї статті є рівняння з частинними похідними, кероване загальною стохастичною мірою без подібних умов.

Основний результат нашого дослідження — теорему 2.1 — сформульовано в розділі 2 та доведено в розділі 6. Третій розділ містить деякі додаткові відомості, що використовуються при доведенні отриманих результатів. У розділах 4, 5 представлено твердження про неперервність за Гельдером інтеграла за стохастичною мірою окремо за просторовою (лема 4.1) та часовою (лема 5.1) змінними. У висновках зіставлено отримані результати з результатами попереднього дослідження хвильового рівняння на прямій та площині.

## 2. Формулювання основного результату

За [19, п. 1, § 12] фундаментальний розв'язок хвильового рівняння (1) обчислюється за формулою

$$\mathcal{S}_3(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\delta\big(a^2t^2 - |x|^2\big)I_{\{t>0\}} = \frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}I_{\{t>0\}},$$

де $\delta$ — це функція Дірака (відповідно, $\delta_{S_{at}}$ — рівномірна міра на сфері радіуса $at$ із загальною масою $4\pi a^2t^2$), та $|\cdot|$ позначає евклідову норму.

Нехай $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ — простір основних функцій (тобто фінітних нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}^4$), а $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ — відповідний простір узагальнених функцій (тобто лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$).

Узагальнена функція $\mathcal{S}_3 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ діє на основну функцію $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ за правилом (див. [19, рівність (1), § 12]):

$$(\mathcal{S}_3,\varphi) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^\infty \frac{1}{t}\int_{|x|=at}\varphi(x,t)\,dS(x)\,dt = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x|}\,\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)dx\,, \tag{3}$$

де $dS(x)$ — елемент площі сфери $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = at\}$.

Розглядаємо м'який розв'язок задачі (1), а саме, таку вимірну випадкову функцію $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$, що м. н. задовольняє рівняння (2). Тобто, шукаємо розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|y-x|=at} v_0(y)\, dS(y) + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int\limits_{|y-x|=at} u_0(y)\, dS(y) \right) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t ds \int\limits_{|y-x|=a(t-s)} \frac{f(s,y,u(s,y))}{t-s}\, dS(y) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{1}{t-s} d\mu(s) \int_{|x-y|=a(t-s)} \sigma(s,y)\, dS(y)\,. \tag{4}$$

Тут $dS(y)$ — елемент площі сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y-x| = at\}$ та сфери $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y-x| = a(t-s)\}$ у відповідних інтегралах.

Будемо розглядати такі припущення.

A1. Функції $u_0(y) = u_0(y,\omega) : \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$, $v_0(y) = v_0(y,\omega) : \mathbb{R}^3 \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірні та для кожного $\omega \in \Omega$:

$$|u_0(y,\omega)| \le C_{u_0}(\omega), \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y) \right| \le C_{u_0}(\omega), \quad |v_0(y,\omega)| \le C_{v_0}(\omega)\,.$$

A2. $v_0(y), u_0(y), \frac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i = 1,2,3$, неперервні за Гельдером:

$$|v_0(y') - v_0(y'')| \le L_{v_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(v_0)}, \quad 0 < \beta(v_0) \le 1;$$
$$|u_0(y') - u_0(y'')| \le L_{u_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \le 1\,;$$
$$\left| \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y') - \frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'') \right| \le L_{u_0}(\omega)|y' - y''|^{\beta(u_0)}\,.$$

A3. $f(s,y,v) : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)| \le C_f$.

A4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $y \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}$,

$$|f(s,y',v') - f(s,y'',v'')| \le L_f(|y' - y''| + |v' - v''|)\,.$$

A5. $\sigma(s,y) : [0,T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)| \le C_\sigma$.

A6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s',y') - \sigma(s'',y'')| \le L_\sigma\big(|s' - s''|^{\beta(\sigma)} + |y' - y''|^{\beta(\sigma)}\big), \quad 1/2 < \beta(\sigma) \le 1.$$

A7. $\forall t \in [0,T] : \quad |\mu((0,t])| \le C(\omega)$.

Надалі позначатимемо за допомогою $C$ та $C(\omega)$ відповідно невипадкову та випадкову додатні константи, що можуть бути різними у різних формулах, і точне значення яких не суттєве.

**Теорема 2.1.** *Нехай виконуються припущення* A1–A6. *Тоді*

*1) Рівняння (4) має розв'язок $u(t,x)$. Якщо $v(t,x)$ — інший розв'язок (4), то для всіх $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^3$ $u(t,x) = v(t,x)$ м. н.*

*2) Якщо також справджується* A7, *то стохастична функція $u(t,x)$ має таку модифікацію $\bar{u}(t,x)$, що для будь-яких фіксованих $\delta > 0$ та $\gamma \in [0, \beta(v_0) \wedge \beta(u_0)]$, $\gamma < \beta(\sigma) - 1/2$, виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x') - \bar{u}(t_2,x'')| \le C(\omega)(|t_1 - t_2|^\gamma + |x' - x''|^\gamma),$$
$$t_1, t_2 \in [\delta, T],\ x', x'' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x''| \le 1.$$

## 3. Додаткові відомості

Розглянемо простір Бєсова $B_{22}^{\alpha}([b,c])$, $\alpha \in (1/2,1)$, $b,c \in \mathbb{R}$. А саме, простір функцій $g : [b,c] \to \mathbb{R}$, для яких скінченна норма

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} = \|g\|_{\mathsf{L}_2([b,c])} + \left(\int_0^{c-b} \left(w_{2,[b,c]}(g,r)\right)^2 r^{-2\alpha-1}\,dr\right)^{1/2},$$

де

$$w_{2,[b,c]}(g,r) = \sup_{0\le h\le r}\left(\int_b^{c-h} |g(s+h)-g(s)|^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Покладемо для довільного $t \in (0,T]$

$$\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t], \quad n \ge 0, \quad 1 \le k \le 2^n.$$

Нехай функція $g(z,s) : Z \times [0,T] \to \mathbb{R}$ така, що $\forall z \in Z :\ g(z,\cdot)$ неперервна на $[0,T]$. Тут $Z$ — довільна множина. Позначимо

$$g_n(z,s) = g(z,0)\mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1\le k\le 2^n} g(z,(k-1)2^{-n}T \wedge t)\mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(T)}}(s).$$

Тоді за [20, лема 3] випадкова функція

$$\eta(z) = \int_{(0,t]} g(z,s)d\mu(s), \quad z \in Z,$$

має таку модифікацію

$$\widetilde{\eta}(z) = \int_{(0,t]} g_0(z,s)d\mu(s) + \sum_{n\ge1}\left(\int_{(0,t]} g_n(z,s)d\mu(s) - \int_{(0,t]} g_{n-1}(z,s)d\mu(s)\right), \tag{5}$$

що для всіх $\varepsilon > 0$, $\omega \in \Omega$, $z \in Z$

$$|\widetilde{\eta}(z)| \le |g(z,0)\mu((0,t])| + \\ + \left\{\sum_{n\ge1} 2^{n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|g(z,k2^{-n}T\wedge t) - g(z,(k-1)2^{-n}T\wedge t)\right|^2\right\}^{\frac12} \times \\ \times \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12}.$$

Для цієї модифікації за [21, теорема 1.2] та [22, нерівність (6)] справедлива оцінка

$$|\widetilde{\eta}(z)| \le |g(z,0)\mu((0,t])| + C\|g(z,\cdot\wedge t)\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \times \\ \times \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t]\right)\right|^2\right\}^{\frac12}, \tag{6}$$

де $\alpha = \varepsilon/2 + 1/2$. Зауважимо, що модифікація $\widetilde{\eta}$ є спільною для всіх $z \in Z$, а стала $C$ залежить від величин $\alpha, T$ та не залежить від $z, \omega$.

## 4. Регулярність стохастичного інтеграла за просторовою змінною

**Лема 4.1.** *Нехай виконуються припущення A5, A6. Тоді для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ випадкова функція*

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{(0,t]} \frac{1}{t-s}d\mu(s)\int_{|x-y|=a(t-s)} \sigma(s,y)\,dS(y)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

*має модифікацію* (5), *що* $\forall\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$ *виконується*

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le C(\omega)|x' - x''|^{\gamma_1}, \quad \forall\, x', x'' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x''| \le 1.$$

*Доведення.* Маємо

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_{(0,t]} \frac{1}{t-s} d\mu(s) \int_{|y|=1} a^2(t-s)^2 \sigma(s, x + ay(t-s))\, dS(y) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{(0,t]} (t-s) d\mu(s) \int_{|y|=1} \sigma(s, x + ay(t-s))\, dS(y) \, = \frac{1}{4\pi}\int_{(0,t]} h(t,x,s) d\mu(s),$$

де

$$h(t,x,s) = (t-s)\int_{|y|=1} \sigma(s, x + ay(t-s))\, dS(y)\,, \quad s < t\,.$$

Перейдемо від поверхневого інтеграла до кратного. Для цього спочатку перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\varphi\sin\theta\,, \\ y_2 = r\sin\varphi\sin\theta\,, \qquad r = 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]. \\ y_3 = r\cos\theta\,, \end{cases}$$

Покладемо

$$x_{t-s} = (x_1 + a(t-s)\cos\varphi\sin\theta, x_2 + a(t-s)\sin\varphi\sin\theta, x_3 + a(t-s)\cos\theta)\,.$$

Тоді, оскільки елемент поверхні у сферичних координатах має вигляд

$$dS(y) = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta\,,$$

то отримуємо таке:

$$h(t,x,s) = (t-s)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma\big(s, x_{t-s}\big) \sin\theta\, d\theta\,. \tag{7}$$

Розглядаємо довільні $t \in (0,T],\ x', x'' \in \mathbb{R}^3 :\ |x' - x''| \le 1$. Тоді

$$\varphi(x') - \varphi(x'') = \frac{1}{4\pi}\int_0^t h(t,x',s)d\mu(s) - \frac{1}{4\pi}\int_0^t h(t,x'',s)d\mu(s) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t H(z,s)d\mu(s)\,, \quad z = (x', x'', t).$$

Тут для зручності подальших обчислень ми позначили

$$H(z,s) = h(t,x',s) - h(t,x'',s).$$

Для модифікації (5) випадкової функції

$$\eta(z) = \varphi(x') - \varphi(x'')$$

використаємо оцінку (6), причому модифікацію будуємо на множині $Z \times [0,t] = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times [0,t] \times [0,t]$. У такому випадку оцінка (6) має вигляд

$$4\pi|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le |H(z,0)\mu((0,t])| + C\|H(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{n\ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\Big(\Delta^{(t)}_{kn} \cap (0,t]\Big)\right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Нагадаємо, що тут стала $C$ залежить від $t$.

Оцінимо норму простору Бєсова функції $H(z,s)$. Для цього спочатку розглянемо $|H(z,s)|$, а потім $\|H(z,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])}$.

Маємо

$$|H(z,s)| = \left|(t-s)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big[\sigma\big(s,{x'}_{t-s}\big) - \sigma\big(s,{x''}_{t-s}\big)\Big] \sin\theta\, d\theta\right| \overset{A6}{\le}$$

$$\overset{A6}{\le} (t-s)L_\sigma |x'-x''|^{\beta(\sigma)} 2\pi \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)} \tag{9}$$

та для $s \in (0, t-h]$, $h < t$:

$$|H(z,s+h) - H(z,s)| \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}\,. \tag{10}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
&|H(z,s+h)-H(z,s)| = \\
&\quad = \bigg|(t-s)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big(\sigma\big(s,{x'}_{t-s-h}\big) - \sigma\big(s,{x'}_{t-s}\big)\Big) \sin\theta\, d\theta - \\
&\quad - (t-s)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big(\sigma\big(s,{x''}_{t-s-h}\big) - \sigma\big(s,{x''}_{t-s}\big)\Big) \sin\theta\, d\theta - \\
&\quad - h\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma\big(s,{x'}_{t-s-h}\big) \sin\theta\, d\theta + h\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma\big(s,{x''}_{t-s-h}\big) \sin\theta\, d\theta\bigg| \le \\
&\quad \le \Big((t-s)L_\sigma h^{\beta(\sigma)} + C_\sigma h\Big)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \le \\
&\quad \le \Big(TL_\sigma h^{\beta(\sigma)} + C_\sigma h\Big) 2\pi \le Ch^{\beta(\sigma)}\,,
\end{aligned} \tag{11}$$

оскільки $h \le t-s \le T$.

Для довільного $\lambda_1 \in (0,1)$ перемножимо нерівності (10), піднесену до степеня $1-\lambda_1$, та (11), піднесену до степеня $\lambda_1$. Одержимо

$$|H(z,s+h)-H(z,s)| \le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)} h^{\lambda_1\beta(\sigma)}$$

та

$$\left(\int_0^t \big(w_{2,[0,t]}(H,r)\big)^2 r^{-2\alpha-1} dr\right)^{1/2} \le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)} \left(\int_0^t r^{2\lambda_1\beta(\sigma)-2\alpha-1}\, dr\right)^{1/2} \le$$

$$\le C|x'-x''|^{(1-\lambda_1)\beta(\sigma)},$$

при $\beta(\sigma)\lambda_1 > \alpha \Leftrightarrow \lambda_1 > \frac{\alpha}{\beta(\sigma)} > \frac{1}{2\beta(\sigma)}$. Тоді для довільного

$$\gamma_1 = (1-\lambda_1)\beta(\sigma) < \left(1 - \frac{1}{2\beta(\sigma)}\right)\beta(\sigma) = \beta(\sigma) - 1/2$$

знайдеться відповідне $\alpha > 1/2$.

Крім того, із (9) маємо

$$|H(z,0)| \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}, \quad \|H(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} \le C|x'-x''|^{\beta(\sigma)}$$

та, для $|x'-x''| \le 1$, виконується

$$|H(z,0)| \le C|x'-x''|^{\gamma_1}, \quad \|H(z,\cdot)\|_{\mathsf{L}_2([0,t])} \le C|x'-x''|^{\gamma_1}\,.$$

Підставимо отримані оцінки у (8). Остаточно ми одержуємо

$$4\pi|\varphi(x') - \varphi(x'')| \le$$

$$\le C|x'-x''|^{\gamma_1}\left(|\mu((0,t])| + \left\{\sum_{n\ge1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1\le k\le 2^n} \left|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(t)}\Big)\right|^2\right\}^{\frac12}\right) \le C(\omega)|x'-x''|^{\gamma_1}\,,$$

де сума зі стохастичною мірою скінченна за [4, лема 3.1]. □

## 5. Регулярність стохастичного інтеграла за часовою змінною

**Лема 5.1.** *Нехай виконуються припущення A5–A7. Тоді для довільного фіксованого $x \in \mathbb{R}^3$ випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{1}{t-s} d\mu(s) \int_{|x-y|=a(t-s)} \sigma(s,y)\, dS(y)\,, \quad t \in [\delta, T],$$

*має модифікацію (5), що $\forall\, \delta > 0$ та $\gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$ неперервна за Гельдером із показником $\gamma_1$.*

*Доведення.* Нехай $x \in \mathbb{R}^3$ фіксоване. Розглянемо модифікацію (5) випадкової функції

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{S}_3(t-s, x-y)\sigma(s,y)\, dy = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_{(0,t]} \hat{h}(t,x,s) d\mu(s) = \frac{1}{4\pi}\int_{(0,t]} \hat{h}(z,s) d\mu(s), \quad z = (t,x) \in [\delta, T] \times \mathbb{R}^3,$$

де $\hat{h}(z,s)$ визначено рівністю (7), та

$$\hat{h}_n(z,s) = \hat{h}(z,0)\mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \le k \le 2^n} \hat{h}(z,(k-1)2^{-n}T \wedge t)\mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(T)}}(s).$$

Тоді для довільних фіксованих $\delta \le t_1 < t_2 \le T$ та $z_i = (t_i, x)$, $i = 1, 2$, маємо

$$\begin{aligned} 4\pi\big(\hat{\varphi}(t_2) - \hat{\varphi}(t_1)\big) &= \int_{(0,t_2]} \hat{h}_0(z_2,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{h}_0(z_1,s) d\mu(s) + \\ &+ \sum_{n \ge 1}\bigg(\int_{(0,t_2]} \hat{h}_n(z_2,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_2]} \hat{h}_{n-1}(z_2,s) d\mu(s)\bigg) - \\ &- \sum_{n \ge 1}\bigg(\int_{(0,t_1]} \hat{h}_n(z_1,s) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \hat{h}_{n-1}(z_1,s) d\mu(s)\bigg) = \\ &= I_1 + I_2\,, \end{aligned}$$

де

$$I_1 = \int_{(0,t_1]} \Big(\hat{h}_0(z_2,s) - \hat{h}_0(z_1,s)\Big) d\mu(s) + \\ + \sum_{n \ge 1}\bigg(\int_{(0,t_1]} \Big(\hat{h}_n(z_2,s) - \hat{h}_n(z_1,s)\Big) d\mu(s) - \int_{(0,t_1]} \Big(\hat{h}_{n-1}(z_2,s) - \hat{h}_{n-1}(z_1,s)\Big) d\mu(s)\bigg);$$

$$I_2 = \int_{(t_1,t_2]} \hat{h}_0(z_2,s)\, d\mu(s) + \sum_{n \ge 1}\bigg(\int_{(t_1,t_2]} \hat{h}_n(z_2,s)\, d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \hat{h}_{n-1}(z_2,s)\, d\mu(s)\bigg).$$

Розглянемо спочатку доданок $I_1$. Для $s \in (0, t_1]$, $\tilde{z} = (t_1, t_2, x)$ покладемо

$$\hat{H}(\tilde{z}, s) = \hat{h}(z_2, s) - \hat{h}(z_1, s)\,.$$

Тоді аналогічно до (6) можемо записати

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \big|\hat{H}(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])\big| + \\ &+ C\Big\|\hat{H}(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\Big\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])} \times \left\{\sum_{n \ge 1} 2^{-n\varepsilon} \sum_{1 \le k \le 2^n} \Big|\mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (0,t_1]\Big)\Big|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \Big|\hat{H}(\tilde{z},0)\mu((0,t_1])\Big| + C(\omega)\Big\|\hat{H}(\tilde{z}, \cdot \wedge t_1)\Big\|_{B_{22}^{\alpha}([0,T])}, \end{aligned} \tag{12}$$

де остання нерівність отримується з використанням A7 [22, оцінка (12)].

Оцінимо кожен із доданків співвідношення (12). Спочатку розглянемо величину $\hat{q}(\tilde{z}, s)$, $s \in (0, t_1]$. Аналогічно до рівності (7) отримуємо представлення функції $\hat{h}(z_i, s)$, $i = 1, 2$:

$$\hat{h}(z_i, s) = (t_i - s) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sigma\big(s, x_{t_i - s}\big) \sin\theta d\theta \,. \tag{13}$$

Тоді аналогічно до (9) та (10) за припущеннями A5, A6 маємо

$$\begin{aligned} \big|\hat{H}(\tilde{z}, s)\big| &\le C|t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}, \\ \big|\hat{H}(\tilde{z}, s+h) - \hat{H}(\tilde{z}, s)\big| &\le C|t_2 - t_1|^{\beta(\sigma)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Оцінимо $|\hat{H}(\tilde{z}, s+h) - \hat{H}(\tilde{z}, s)|$ за допомогою степеня $h$. Оскільки

$$\Big|\hat{H}(\tilde{z}, s+h) - \hat{H}(\tilde{z}, s)\Big| \le \Big|\hat{h}(z_2, s+h) - \hat{h}(z_2, s)\Big| + \Big|\hat{h}(z_1, s+h) - \hat{h}(z_1, s)\Big|,$$

то аналогічно до попередньої оцінки, отримуємо

$$\Big|\hat{H}(\tilde{z}, s+h) - \hat{H}(\tilde{z}, s)\Big| \le C h^{\beta(\sigma)} \,.$$

Далі такі ж міркування, що і для аналогічного хвильового рівняння в $\mathbb{R}^2$ (див. [2, доведення леми 5.1]) приводять до

$$|I_1| \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma_1},$$

де $0 < \gamma_1 < \beta(\sigma) - 1/2$.

Тепер оцінимо доданок $I_2$. Покладемо

$$\tilde{q}_n(z_2, s) = \sum_{1 \le k \le 2^n} \hat{h}(z_2, (((k-1)2^{-n}T) \vee t_1) \wedge t_2) \mathbb{1}_{\Delta_{kn}^{(T)}}(s), \quad s \in [0, T].$$

За аналогом теореми Лебега про мажоровану збіжність [3, твердження 7.1.1] виконується

$$I_2 = \mathrm{p}\lim_{n\to\infty} \int_{(t_1, t_2]} \tilde{q}_n(z_2, s) d\mu(s), \quad \forall x, t_1, t_2.$$

Отже, випадкова функція

$$\int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_0(z_2, s) d\mu(s) + \sum_{n \ge 1} \left( \int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_n(z_2, s) d\mu(s) - \int_{(t_1,t_2]} \tilde{q}_{n-1}(z_2, s) d\mu(s) \right)$$

є модифікацією для $I_2$, яку ми знову позначимо $I_2$. Тоді аналогічно до (6) одержимо

$$\begin{aligned} |I_2| \le{} & \Big|\hat{h}(z_2, t_1)\mu((t_1, t_2])\Big| + \\ &+ \Bigg( \sum_{n\ge1} \sum_{1 \le k \le 2^n} 2^{n\varepsilon_0} |\hat{h}(z_2, (((k-1)2^{-n}T) \vee t_1) \wedge t_2) - \\ &\quad - \hat{h}(z_2, (((k'-1)2^{-n+1}T) \vee t_1) \wedge t_2)|^2 \Bigg)^{1/2} \times \\ &\quad \times \left( \sum_{n \ge 1} \sum_{1 \le k \le 2^n} 2^{-n\varepsilon_0} \Big| \mu\Big(\Delta_{kn}^{(T)} \cap (t_1, t_2]\Big)\Big|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

де $k'$ таке, що $\Delta_{kn}^{(T)} \subset \Delta_{k'(n-1)}^{(T)}$, та $\varepsilon_0 > 0$ — довільне.

Використовуючи припущення A5 та рівність (13), маємо

$$\Big|\hat{h}(z_2, s)\Big| \le C_\sigma 2\pi |t_2 - s| \le C|t_2 - t_1|, \quad \text{при} \quad s \in (t_1, t_2] \,.$$

Тоді

$$\left|\hat{h}(z_2,(((k-1)2^{-n}T)\vee t_1)\wedge t_2)-\hat{h}(z_2,(((k'-1)2^{-n+1}T)\vee t_1)\wedge t_2)\right|\le C|t_2-t_1|, \tag{15}$$

де дана величина має вигляд $|\hat{h}(z_2,s+h)-\hat{h}(z_2,s)|$ для $s\in[t_1,t_2]$ і такого $h\in[0,2^{-n}T]$, що $s+h\in(t_1,t_2]$.

З іншого боку, за припущеннями A6, A7 аналогічно до (14)

$$\left|\hat{h}(z_2,s+h)-\hat{h}(z_2,s)\right|\le C_\sigma 2\pi h+L_\sigma 2\pi a|t_2-s|h^{\beta(\sigma)}\le Ch+C|t_2-t_1|h^{\beta(\sigma)}\le$$
$$\le C|t_2-t_1|^{1-\beta(\sigma)}2^{-n\beta(\sigma)},$$

оскільки $h\le|t_2-t_1|$ та $h\le 2^{-n}T$.

Враховуючи (15), для $\lambda_0\in(0,1)$ маємо

$$\left|\hat{h}(z_2,s+h)-\hat{h}(z_2,s)\right|\le C|t_2-t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}2^{-n\lambda_0\beta(\sigma)},$$

і тоді

$$|I_2|\le C|t_2-t_1||\mu((t_1,t_2])|+C|t_2-t_1|^{1-\lambda_0\beta(\sigma)}\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\varepsilon_0-2\lambda_0\beta(\sigma)+1)}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{-n\varepsilon_0}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(T)}\cap(t_1,t_2]\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$
$$\le C(\omega)|t_2-t_1|^{\gamma_1},$$

при $\lambda_0\beta(\sigma)>1/2$ і відповідному $\varepsilon_0>0$.

Таким чином, ми одержали, що

$$|\hat{\varphi}(t_2)-\hat{\varphi}(t_1)|\le C(\omega)|t_2-t_1|^{\gamma_1}.\qquad\square$$

## 6. Доведення теореми 2.1

**1) Існування та єдиність.** Покажемо, що рівняння (4) має єдиний розв'язок. Побудуємо цей розв'язок за допомогою такого процесу послідовних наближень.

Нехай $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n>0$:

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{4a^2\pi t}\int\limits_{|y-x|=at}v_0(y)\,dS(y)+\frac{1}{4a^2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|=at}u_0(y)\,dS(y)\right)+$$
$$+\frac{1}{4a^2\pi}\int_{|y-x|\le at}\frac{f\left(t-\frac{|y-x|}{a},y,u^{(n)}\left(t-\frac{|y-x|}{a},y\right)\right)}{|y-x|}\,dy+$$
$$+\frac{1}{4a^2\pi}\int_0^t\frac{1}{t-s}d\mu(s)\int_{|x-y|=a(t-s)}\sigma(s,y)\,dS(y)\,. \tag{16}$$

Тут ми використали формулу (3) для функції $f$, а саме:

$$\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t ds\int\limits_{|y-x|=a(t-s)}\frac{f(s,y,u(s,y))}{t-s}\,dS(y)=$$
$$=\frac{1}{4a^2\pi}\int_{|y-x|\le at}\frac{f\left(t-\frac{|y-x|}{a},y,u^{(n)}\left(t-\frac{|y-x|}{a},y\right)\right)}{|y-x|}\,dy\,.$$

Для всіх $n, t, x$ беремо одну й ту саму модифікацію стохастичного інтеграла, і тоді наступні оцінки виконуватимуться $\forall\omega \in \Omega$. За припущеннями A3, A4 маємо

$$\left|u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\right| \le \frac{1}{4a^2\pi}\left|\int_{|y-x|\le at} \frac{f\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y, u^{(n)}\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y\right)\right)}{|y-x|}\, dy - \right.$$
$$\left. - \int_{|y-x|\le at} \frac{f\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y, u^{(n-1)}\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y\right)\right)}{|y-x|}\, dy\right| \le$$
$$\le \frac{L_f}{4a^2\pi}\int_{|y-x|\le at} \frac{\left|u^{(n)}\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y\right) - u^{(n-1)}\left(t - \frac{|y-x|}{a}, y\right)\right|}{|y-x|}\, dy =$$
$$= \frac{L_f}{4a^2\pi}\int_{|y|\le at} \frac{\left|u^{(n)}\left(t - \frac{|y|}{a}, y+x\right) - u^{(n-1)}\left(t - \frac{|y|}{a}, y+x\right)\right|}{|y|}\, dy, \quad n \ge 1\,, \tag{17}$$

та

$$\left|u^{(2)}(t,x) - u^{(1)}(t,x)\right| \le \frac{2C_f}{4a^2\pi}\int_{|y|\le at} \frac{1}{|y|}\, dy = \frac{C_f}{2}\, t^2\,. \tag{18}$$

Покладемо

$$U_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|u^{(n+1)}(t,x) - u^{(n)}(t,x)\right|, \quad n \ge 1\,,$$

тоді із (17) маємо

$$U_n(t) \le \frac{L_f}{4a^2\pi}\int_{|y|\le at} \frac{U_{n-1}\left(t - \frac{|y|}{a}\right)}{|y|}\, dy\,. \tag{19}$$

За допомогою методу математичної індукції покажемо, що

$$U_n(t) \le \frac{2C_f}{L_f}\, \frac{\left(t\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n}}{(2n)!}. \tag{20}$$

Для $n = 1$ співвідношення (20) виконується за (18). Припустимо, що (20) виконується $\forall n \ge 1$, та доведемо, що оцінка буде справедливою для $n + 1$. Для цього підставимо (20) у (19) та перейдемо до сферичних кординат:

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\varphi\sin\theta\,, \\ y_2 = r\sin\varphi\sin\theta\,, \qquad r = [0, at], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi]. \\ y_3 = r\cos\theta\,, \end{cases} \tag{21}$$

Одержимо

$$U_{n+1}(t) \le \frac{L_f}{4a^2\pi}\frac{2C_f}{L_f}\frac{\left(t\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n}}{(2n)!}\int_0^{at} dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} \frac{\left(t - \frac{r}{a}\right)^{2n}}{r} r^2\sin\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{2C_f}{L_f}\, \frac{\left(\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n+2}}{(2n)!\, a^{2n+2}}\int_0^{at} (at - r)^{2n} r\, dr \,=\, \frac{2C_f}{L_f}\, \frac{\left(t\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}\,.$$

Таким чином, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)$ збігається рівномірно на $[0, T]$. Розв'язок будуємо у вигляді рівномірної границі $u^{(n)}(t,x)$ при $n \to \infty$.

Аналогічно можна показати, що побудований розв'язок єдиний. А саме, нехай $u(t,x)$ та $v(t,x)$ — розв'язки рівняння (4). Покладаємо

$$U(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \big|u(t,x) - v(t,x)\big|$$

та проводимо такі ж міркування, що й при доведенні існування розв'язку. Враховуючи припущення A3 та A4, отримуємо, що

$$0 \le U(t) \le \frac{2C_f}{L_f}\,\frac{\left(t\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n}}{(2n)!} \le \frac{2C_f}{L_f}\,\frac{\left(T\sqrt{\frac{L_f}{2}}\right)^{2n}}{(2n)!} \to 0, \quad n\to\infty\,,$$

і таким чином, $U(t) = 0$.

**2) Гельдеровість.** Покажемо гельдеровість за просторовою змінною. Розглядаємо довільні $t\in(0,T]$, $x', x'' \in \mathbb{R}^3$ такі, що $|x'-x''| \le 1$. Застосуємо процес послідовних наближень (16) та метод математичної індукції. Для $n=0$ виконується

$$\left|u^{(0)}(t,x') - u^{(0)}(t,x'')\right| = 0 \le C_0(t,\omega)|x'-x''|^{\gamma}, \quad C_0(t,\omega) = 0.$$

Нехай для $n>0$ існує така стала $C_n(t,\omega)\ge 0$ що

$$\left|u^{(n)}(t,x') - u^{(n)}(t,x'')\right| \le C_n(t,\omega)|x'-x''|^{\gamma}.$$

Тоді, застосовуючи лему 4.1, матимемо для відповідної модифікації $u(t,\cdot)$

$$\begin{aligned}
\left|u^{(n+1)}(t,x') - u^{(n+1)}(t,x'')\right| &\le \frac{1}{4a^2\pi t}\left|\int\limits_{|y-x'|=at} v_0(y)\,dS(y) - \int\limits_{|y-x''|=at} v_0(y)\,dS(y)\right| + \\
&+ \frac{1}{4a^2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x'|=at} u_0(y)\,dS(y)\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x''|=at} u_0(y)\,dS(y)\right)\right| + \\
&+ \frac{1}{4a^2\pi}\left|\int_{|y-x'|\le at}\frac{f\Big(t-\frac{|y-x'|}{a}, y, u^{(n)}\Big(t-\frac{|y-x'|}{a}, y\Big)\Big)}{|y-x'|}\,dy - \right.\\
&\left. - \int_{|y-x''|\le at}\frac{f\Big(t-\frac{|y-x''|}{a}, y, u^{(n)}\Big(t-\frac{|y-x''|}{a}, y\Big)\Big)}{|y-x''|}\,dy\right| + \\
&+ C(\omega)|x'-x''|^{\gamma_1} = \\
&= B_1 + B_2 + B_3 + C(\omega)|x'-x''|^{\gamma_1}\,,
\end{aligned}$$

де $C(\omega)$ — із твердження леми 4.1, не залежить від $n$.

Розглянемо кожен із доданків окремо. Нехай $B_1 = |I_1(t,x') - I_1(t,x'')|$ та

$$I_1(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{|y-x|=at} v_0(y)\,dS(y) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|r|=1} v_0(x+rat)\,dS(r)\,.$$

Тоді, аналогічно до знаходження $h(t,x,s)$ при доведенні леми 4.1, отримаємо, що

$$I_1(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} v_0\big(x_t\big)\sin\theta\,d\theta\,. \tag{22}$$

За припущенням A2 одержуємо таку оцінку:

$$B_1 = \frac{t}{4\pi}\left|\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} v_0\big(x'_t\big)\sin\theta\,d\theta - \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} v_0\big(x''_t\big)\sin\theta\,d\theta\right| \le$$

$$\leq \frac{t}{4\pi} L_{v_0}(\omega) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |x' - x''|^{\beta(v_0)} \sin\theta \, d\theta \leq C(\omega)|x' - x''|^{\beta(v_0)} .$$

Далі аналогічно розглядаємо $B_2 = |I_2(t, x') - I_2(t, x'')|$, де

$$I_2(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t} \int\limits_{y:|y-x|=at} u_0(y)\, dS(y) \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int\limits_{|r|=1} u_0(x + art)\, dS(r) \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|r|=1} u_0(x + art)\, dS(r) + \frac{t}{4\pi} \int\limits_{|r|=1} \frac{\partial}{\partial t} u_0(x + art)\, dS(r)$$

та

$$I_2(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} u_0\big(x_t\big) \sin\theta \, d\theta + \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} u_0\big(x_t\big) \sin\theta \, d\theta \,, \qquad (23)$$

і так само отримаємо за припущеннями A1, A2, що

$$B_2 \leq C(\omega)|x' - x''|^{\beta(u_0)} .$$

Тепер оцінимо $B_3$. Робимо заміну $y - x'$ та $y - x'' \to y$ у першому та другому інтегралах відповідно. Тоді застосуємо припущення A4. Одержимо

$$B_3 = \frac{1}{4a^2\pi} \left| \int_{|y| \leq at} \frac{f\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x', u^{(n)}\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x'\Big)\Big)}{|y|}\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_{|y| \leq at} \frac{f\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x'', u^{(n)}\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x''\Big)\Big)}{|y|}\, dy \right| \overset{A4}{\leq}$$

$$\overset{A4}{\leq} \frac{L_f}{4a^2\pi} \int_{|y| \leq at} \frac{\Big(|x' - x''| + \Big|u^{(n)}\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x'\Big) - u^{(n)}\Big(t - \frac{|y|}{a}, y + x''\Big)\Big|\Big)}{|y|}\, dy .$$

Перейдемо до сферичних кординат:

$$B_3 \leq \frac{L_f}{2} \frac{t^2}{2} |x' - x''| +$$

$$+ \frac{L_f}{4a^2\pi} \int_0^{at} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big| u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x'_{r/a}\Big) - u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x''_{r/a}\Big) \Big| r \sin\theta \, d\theta .$$

Нагадаємо, що $x_{r/a} = (x_1 + r\cos\varphi\sin\theta, x_2 + r\sin\varphi\sin\theta, x_3 + r\cos\theta)$, і тому $|x'_{r/a} - x''_{r/a}| \leq 1$.

Тоді

$$|u^{(n+1)}(t, x') - u^{(n+1)}(t, x'')| \leq C(\omega)|x' - x''|^{\gamma} + \frac{L_f}{2} \frac{t^2}{2} |x' - x''|^{\gamma} +$$

$$+ \frac{L_f}{4a^2\pi} \int_0^{at} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big| u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x'_{r/a}\Big) - u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x''_{r/a}\Big) \Big| r \sin\theta \, d\theta \leq$$

$$\leq C(\omega)\left(1 + \frac{L_f}{2}\right)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)|x' - x''|^{\gamma} +$$

$$+ \frac{L_f}{4a^2\pi} \int_0^{at} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big| u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x'_{r/a}\Big) - u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x''_{r/a}\Big) \Big| r \sin\theta \, d\theta =$$

$$= C_f(\omega)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)|x' - x''|^{\gamma} +$$

$$+ \frac{L_f}{4a^2\pi} \int_0^{at} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big| u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x'_{r/a}\Big) - u^{(n)}\Big(t - \frac{r}{a}, x''_{r/a}\Big) \Big| r \sin\theta \, d\theta .$$

Оскільки $C_0(t,\omega)=0$, то

$$\left|u^{(1)}(t,x')-u^{(1)}(t,x'')\right|\le C_1(t,\omega)|x'-x''|^{\gamma}\,,$$

де

$$C_1(t,\omega)=C_f(\omega)\left(1+\frac{t^2}{2}\right).$$

Застосуємо тепер припущення індукції, матимемо

$$\left|u^{(n+1)}(t,x')-u^{(n+1)}(t,x'')\right|\le$$
$$\le C_1(t,\omega)|x'-x''|^{\gamma}+\frac{L_f}{2a^2}|x'-x''|^{\gamma}\int_0^{at}C_n\Big(t-\frac{r}{a},\omega\Big)r\,dr\,.$$

Робимо заміну змінної $t-\frac{r}{a}=z_1$, тоді

$$\left|u^{(n+1)}(t,x')-u^{(n+1)}(t,x'')\right|\le$$
$$\le\left(C_1(t,\omega)+C_f(\omega)\int_0^t C_n(z_1,\omega)(t-z_1)\,dz_1\right)|x'-x''|^{\gamma}\,.$$

Таким чином, ми отримали, що

$$\left|u^{(n+1)}(t,x')-u^{(n+1)}(t,x'')\right|\le C_{n+1}(t,\omega)|x'-x''|^{\gamma}\,,$$

де

$$C_{n+1}(t,\omega)=C_f(\omega)\left(1+\frac{t^2}{2}+\int_0^t C_n(z_1,\omega)(t-z_1)\,dz_1\right),$$

та за індукцією отримаємо

$$C_{n+1}(t,\omega)=C_f(\omega)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(t\sqrt{C_f(\omega)}\right)^{2j}}{(2j)!}+\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(t\sqrt{C_f(\omega)}\right)^{2j+2}}{(2j+2)!}\right)\le$$
$$\le 2C_f(\omega)e^{at\sqrt{C(\omega)}}\le 2C_f(\omega)e^{aT\sqrt{C(\omega)}}=C(T,\omega)\,,$$

що і завершує доведення гельдеровості розв'язку за просторовою змінною.

Для встановлення виконання умови Гельдера за часовою змінною $t\in[\delta,T]$ для стохастичної функції $u(t,x)$ скористаємось уже доведеним. А саме, обираємо модифікацію $u$, що гельдерова за $x$ та, відповідно, модифікацію (5) стохастичного інтеграла, що гельдерова за $t$ та $x$. Останнє можна зробити з таких міркувань. У лемі 4.1 стала гельдеровості $C(\omega)$ залежить від значення змінної $t$. Проте, якщо додатково вимагати виконання припущення A7 та для довільного $\delta>0$ розглядати стохастичний інтеграл для фіксованого $t\in[\delta,T]$, то нескладно отримати умову Гельдера зі сталою, що не залежить від $t$. Для цього потрібно скористатись оцінками (6) та (7) із [22] відповідно для стохастичного інтеграла та норми простору Бєсова на $[0,T]$. Таким чином, ми отримуємо модифікацію $\varphi(x)$, неперервну за Гельдером за змінною $x$ при фіксованому $t$ (лема 4.1), та модифікацію $\hat\varphi(t)$, що задовольняє умову Гельдера за $t$ при кожному фіксованому $x$ (лема 5.1). Виключимо всі $\omega\in\Omega$, для яких $\varphi(t,x)\neq\hat\varphi(t,x)$ хоча б для однієї пари раціональних $(t,x)\in[\delta,T]\times\mathbb{R}^3$. Для всіх інших $\omega$ покладемо $\bar\varphi=\varphi=\hat\varphi$ для раціональних $(t,x)$ та довизначимо на всю множину $[\delta,T]\times\mathbb{R}^3$ за неперервністю.

Отже, для вказаної модифікації розв'язку маємо, що для довільних $\delta \le t_1 \le t_2 \le T$ та $x \in \mathbb{R}^3$:

$$|u(t_1,x) - u(t_2,x)| \le \left| \frac{1}{4a^2\pi t_1} \int\limits_{|y-x|=at_1} v_0(y)\, dS(y) - \frac{1}{4a^2\pi t_2} \int\limits_{|y-x|=at_2} v_0(y)\, dS(y) \right| +$$

$$+ \frac{1}{4a^2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{1}{t_1} \int\limits_{|y-x|=at_1} u_0(y)\, dS(y) \right) - \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \frac{1}{t_2} \int\limits_{|y-x|=at_2} u_0(y)\, dS(y) \right) \right| +$$

$$+ \frac{1}{4a^2\pi} \left| \int_{|y-x|\le at_1} \frac{f\Big(t_1 - \frac{|y-x|}{a}, y, u\Big(t_1 - \frac{|y-x|}{a}, y\Big)\Big)}{|y-x|}\, dy - \right.$$

$$\left. - \int_{|y-x|\le at_2} \frac{f\Big(t_2 - \frac{|y-x|}{a}, y, u\Big(t_2 - \frac{|y-x|}{a}, y\Big)\Big)}{|y-x|}\, dy \right| + C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_1} =$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + C(\omega)|t_1 - t_2|^{\gamma_1}.$$

Використовуючи формулу (22) та припущення A1, A2, одержимо, що

$$D_1 = |I_1(t_1,x) - I_1(t_2,x)| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left| t_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} v_0\big(x_{t_1}\big) \sin\theta\, d\theta - t_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} v_0\big(x_{t_2}\big) \sin\theta\, d\theta \right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left| (t_1 - t_2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} v_0\big(x_{t_1}\big) \sin\theta\, d\theta \, + \right.$$

$$\left. + \, t_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \big(v_0\big(x_{t_1}\big) - v_0\big(x_{t_2}\big)\big) \sin\theta\, d\theta \right| \le$$

$$\le \frac{a^{\beta(v_0)}|t_1 - t_2|^{\beta(v_0)}}{4\pi} \Big( T^{1-\beta(v_0)} 2\pi C_{v_0}(\omega) + T 2\pi L_{v_0}(\omega) \Big) \le C(\omega)|t_1 - t_2|^{\beta(v_0)}.$$

Так само, за (23) з урахуванням A1, A2, можемо записати

$$D_2 = |I_2(t_1,x) - I_2(t_2,x)| =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \big(u_0\big(x_{t_1}\big) - u_0\big(x_{t_2}\big)\big) \sin\theta\, d\theta \, + \right.$$

$$+ (t_1 - t_2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} u_0\big(x_{t_1}\big) \sin\theta\, d\theta +$$

$$\left. + \, t_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left( \frac{\partial}{\partial t_1} u_0\big(x_{t_1}\big) - \frac{\partial}{\partial t_2} u_0\big(x_{t_2}\big) \right) \sin\theta\, d\theta \right| \le$$

$$\le C(\omega)|t_1 - t_2|^{\beta(u_0)}.$$

Для оцінки $D_3$ переходимо до сферичних координат (21). Одержимо

$$D_3 \le \frac{1}{4a^2\pi} \left| \int_0^{at_1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{f\big(t_1 - \frac{r}{a}, y_r + x, u\big(t_1 - \frac{r}{a}, y_r + x\big)\big) r^2 \sin\theta}{r}\, d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_0^{at_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x, u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x\Big)\Big) r \sin\theta\, d\theta \right|,$$

де $y_r = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$, та в першому інтегралі робимо заміну змінної $z = r + a(t_2 - t_1)$:

$$D_3 = \frac{1}{4a^2\pi}\bigg|\int_{a(t_2-t_1)}^{at_2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \int_0^{\pi} f\Big(t_2 - \frac{z}{a}, y_{z-a(t_2-t_1)} + x, u\Big(t_2 - \frac{z}{a}, y_{z-a(t_2-t_1)} + x\Big)\Big) z\sin\theta\, d\theta\, - \\ - \int_0^{at_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x, u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x\Big)\Big) r\sin\theta\, d\theta\bigg| \le \\ \le \frac{1}{4a^2\pi}\bigg|\int_{a(t_2-t_1)}^{at_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\Big[f\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_{r-a(t_2-t_1)} + x, u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_{r-a(t_2-t_1)} + x\Big)\Big) - \\ - f\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x, u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x\Big)\Big)\Big] r\sin\theta\, d\theta\,\bigg| + \\ + \frac{1}{4a^2\pi}\bigg|\int_0^{a(t_2-t_1)} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x, u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x\Big)\Big) r\sin\theta\, d\theta\bigg|.$$

За припущеннями A3, A4 маємо таке:

$$D_3 \le \frac{L_f}{4a^2\pi}\int_{a(t_2-t_1)}^{at_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \int_0^{\pi}\Big[a|t_2 - t_1| + \Big|u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_{r-a(t_2-t_1)} + x\Big) - u\Big(t_2 - \frac{r}{a}, y_r + x\Big)\Big|\Big] r\sin\theta\, d\theta + \\ + \frac{C_f}{4a^2\pi}\pi a^2 (t_2 - t_1)^2 .$$

Тоді, оскільки $u$ гельдерова за просторовою змінною, то

$$D_3 \le \frac{L_f}{4a^2\pi}\bigg|\int_{a(t_2-t_1)}^{at_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\big[a|t_2 - t_1| + C(T,\omega)(a|t_2 - t_1|)^{\gamma}\big] r\sin\theta\, d\theta\,\bigg| + \\ + \frac{C_f}{4} T|t_2 - t_1| \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma} .$$

Таким чином, маємо

$$|u(t_1, x) - u(t_2, x)| \le C(\omega)|t_2 - t_1|^{\gamma} .$$

## 7. Висновки

Розглянуто задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою $d\mu(t)$, на множині $[0,T] \times \mathbb{R}^3$. Доведено, що існує єдиний м'який розв'язок. Крім того, установлено неперервність цього розв'язку за Гельдером за сукупністю змінних із показником $\gamma \in [0, \beta(v_0) \wedge \beta(u_0)]$, $\gamma < \beta(\sigma) - 1/2$, що збігається з відповідним показником гельдеровості хвильового рівняння на площині [2]. Нагадаємо, що $\beta(v_0)$, $\beta(u_0)$ та $\beta(\sigma)$ — це показники гельдеровості відповідно функцій $v_0, u_0$, які відповідають початковим умовам, та функції $\sigma$, яка є коефіцієнтом випадкового шуму. При цьому, для аналогічної задачі на прямій у [1] установлено виконання умови Гельдера з показниками $\gamma_1$, $\gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$ такими, що $\gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2 < 1/2$, для просторової та часової змінних відповідно.

## 8. Подяка

Автори вдячні фонду Александра фон Гумбольдта за підтримку цього дослідження в рамках Research Group Linkage Potsdam/Kyiv під назвою "Singular diffusions: analytic and stochastic approaches".

Автори висловлюють подяку рецензенту за цінні зауваження та поради.

## Список літератури


1. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 1–16.
2. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko *Wave equation in a plane driven by a general stochastic measure*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **98** (2018), 70–86. (Ukrainian)
3. S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
4. V. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math., **194** (2009), no. 3, 231–251.
5. V. M. Radchenko *Averaging principle for heat equation driven by general stochastic measure*, Statist. Probab. Lett., **146** (2019), 224–230.
6. A. Millet, P.-L. Morien, *On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density*, Stoch. Proc. Appl., **86** (2000), 141–162.
7. V. N. Radchenko, *On a definition of the integral of a random function*, Theory Probab. Appl., **41** (1997), no. 3, 597–601.
8. Yu. Mishura, K. Ralchenko, G. Shevchenko, *Existence and uniqueness of mild solution to stochastic heat equation with white and fractional noises*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **98** (2018), 142–162.
9. D. Khoshnevisan, E. Nualart, *Level sets of the stochastic wave equationdriven by a symmetric Lévy noise*, Bernoulli, **14** (2008), no. 4, 899–925.
10. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with a coloured stable noise*, Random Oper. Stoch. Equ., **25** (2017), no. 4, 249–260.
11. L. I. Pryhara, G. M. Shevchenko, *Wave equation with stable noise*, Theory Probab. Math. Statist., **96** (2018), no. 1, 145–157.
12. L. I. Rusaniuk, G. M. Shevchenko, *Equation for vibrations of a string with fixed ends, forced by a stable random noise*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **98** (2018), no. 1, 163–172. (Ukrainian)
13. R. Serrano, *A note on space-time Hölder regularity of mild solutions to stochastic Cauchy problems in $L^p$-spaces*, Braz. J. Probab. Stat., **29** (2015), no. 4, 767–777.
14. R. C. Dalang, M. Sanz-Solé, *Hölder–Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three*, Mem. Amer. Math. Soc., **199** (931), AMS, Providence, 2009.
15. V. M. Radchenko, N. O. Stefans'ka *Approximation of solutions of wave equation driven by stochastic measures*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **99** (2018), no. 2, 203–211. (Ukrainian)
16. S. V. Lototsky, B. L. Rozovsky *Stochastic partial differential equations*, Universitext, Springer, Cham, 2017.
17. D. Koshnevisan, *Analysis of stochastic partial differential equations*, AMS, Providence, 2014.
18. J. B. Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Ecole D'ete de Probabilites de Saint–Flour, XIV–1984, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1986, 265–439.
19. V. S. Vladimirov *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1981. (Russian)
20. V. N. Radchenko, *Evolution equations with general stochastic measures in Hilbert space*, Theory Probab. Appl., **59** (2015), no. 2, 328–339.
21. A. Kamont, *A discrete characterization of Besov spaces*, Approx. Theory Appl., **13** (1997), no. 2, 63–77.
22. I. M. Bodnarchuk, G. M. Shevchenko, *Heat equation in a multidimensional domain with a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **93** (2016), 1–17.


Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

*Адреса електронної пошти*: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

*Адреса електронної пошти*: vradchenko@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 23.03.2019

## WAVE EQUATION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE DRIVEN BY A GENERAL STOCHASTIC MEASURE

I. M. BODNARCHUK, V. M. RADCHENKO

Abstract. The Cauchy problem for a wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure is investigated. The existence and uniqueness of the mild solution are proved. Hölder regularity of its paths in time and spatial variables is obtained.

## ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ, УПРАВЛЯЕМОЕ ОБЩЕЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

И. Н. БОДНАРЧУК, В. Н. РАДЧЕНКО

Аннотация. Исследуется задача Коши для волнового уравнения в трехмерном пространстве, управляемого общей стохастической мерой. Доказано существование и единственность мягкого решения. Получена непрерывность по Гельдеру его траекторий по временной и пространственной переменным.