Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 1(100)/2019, с. 102–122

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 1(100)/2019, pp. 102–122

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ ДВОВИМІРНОЇ СИНУСОЇДНОЇ МОДЕЛІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

О. В. ІВАНОВ, О. В. ЛИМАР

Анотація. Розглянуто двовимірну тригонометричну модель спостережень, різноманітні дискретні модифікації якої отримали істотну увагу в літературі з обробки сигналів, завдяки їх застосуванню в аналізі текстурованих поверхонь. У припущенні про те, що випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським, зокрема, сильно залежним, випадковим полем на площині, доведено асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот цієї тригонометричної моделі регресії.

Ключові слова і фрази. Двовимірна синусоїдна модель, однорідне та ізотропне гауссівське випадкове поле, оцінка найменших квадратів, теорема редукції, асимптотична єдиність, теорема Брауера про нерухому точку, спектральна міра функції регресії, μ-припустимість, асимптотична нормальність.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02; Secondary 62J99.

1. Постановка задачі

У статті розглянуто двовимірну тригонометричну модель регресії, різноманітні дискретні модифікації якої отримали велику увагу в літературі з обробки сигналів, завдяки їх застосуванню в аналізі текстур [6, 19, 25, 26], зокрема, в обробці так званих симетричних зображень відтінків сірого (symmetric gray-scale texture images), у тому розумінні, що інтенсивність сірого кольору в будь-якій точці цього образу пропорційна значенню процесу, що спостерігається, у цій точці. Ця проблема має спеціальний інтерес у спектральному аналізі [17, 18], див. також [19] та наведені там посилання на прикладні публікації з указаної проблематики.

У роботі отримано властивість асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів синусоїдної моделі у випадку, коли випадковий шум є однорідним та ізотропним гауссівським полем на площині [10, 24]. Із математичної точки зору така постановка задачі оцінювання є природним узагальненням добре відомої проблеми виявлення прихованих періодичностей (див., наприклад, [9, 12]).

У дискретній постановці задачі, коли помилки спостережень є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, зокрема, гауссівськими, асимптотичні властивості ОНК розглянуто в роботах [15, 21]. Для помилок спостережень, що утворюють дискретне лінійне однорідне поле, ці результати узагальнено в [16]. Зауважимо також, що в роботі [5] розглянуто багатопараметричне гармонічне коливання, що спостерігається на фоні однорідного випадкового поля, у якого існують спектральні щільності всіх порядків. Для такої моделі сформульовано деякі результати про асимптотичну поведінку періодограмних оцінок і ОНК невідомих амплітуд і кутових частот цього гармонічного коливання. У монографії [14] розглядалася задача оцінювання кутових частот багатопараметричного сигналу, періодичного за кожною змінною, що спостерігається на фоні однорідного випадкового поля, яке задовольняє умову сильного перемішування.

Розглянемо модель спостережень

$$X(t_1,t_2) = g(t_1,t_2;\theta^0) + \varepsilon(t_1,t_2), \quad t=(t_1,t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{1.1}$$

де

$$g(t_1,t_2;\theta^0) = \sum_{k=1}^{N}\Big(A_k^0\cos\big(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2\big) + B_k^0\sin\big(\lambda_k^0 t_1+\mu_k^0 t_2\big)\Big), \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\theta^0 &= \big(\theta_1^0,\theta_2^0,\theta_3^0,\theta_4^0,\ldots,\theta_{4N-3}^0,\theta_{4N-2}^0,\theta_{4N-1}^0,\theta_{4N}^0\big) = \\ &= \big(A_1^0,B_1^0,\lambda_1^0,\mu_1^0,\ldots,A_N^0,B_N^0,\lambda_N^0,\mu_N^0\big),\end{aligned} \tag{1.3}$$

— вектор істинних значень невідомих параметрів, число $N \geq 1$ є відомим; $(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0$, $k=\overline{1,N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t_1,t_2),(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\}$ — задане на повному ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,\mathsf{P})$ випадкове поле, відносно якого припустимо таке.

N. ε — майже напевно (м. н.) вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім, коваріаційна функція якого $B(t_1,t_2) = \mathsf{E}\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(0,0)$, $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$, задовольняє одну з умов:

(i) поле ε є ізотропним та $B(t_1,t_2) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$, де $L(\rho)$, $\rho>0$, є монотонно неспадна повільно змінна на нескінченності функція, $t=(t_1,t_2)$, $\|t\| = (t_1^2+t_2^2)^{1/2}$.

(ii) $\int_{\mathbb{R}^2}|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 < \infty$.

В умові **N(i)** $\lim_{\rho\to0}\rho^{-\alpha}L(\rho) = B(0)$, тобто $L(\rho)$ при $\rho\to0$ має порядок ρ^α.

Функції регресії (1.2), як і класичні тригонометричні функції регресії ($\mu_k^0 = 0$, $k=\overline{1,N}$) при $N\geq 2$ не найкращим чином розрізняють параметри, у тому розумінні, що не задовольняють умови жодної загальної теореми про консистентність ОНК параметрів нелінійних моделей регресії (див., наприклад, [8, 10]). Таким чином, для доведення консистентності ОНК параметрів (1.3) треба допомогти тригонометричній функції регресії розрізняти параметри, обираючи, наприклад, для визначення ОНК, таку параметричну множину, в якій параметри вже будуть добре розрізнятись.

Для точок (a,b), (c,d) на площині будемо писати $(a,b)<(c,d)$, якщо $a<c$, $b<d$. У цій роботі ми розглядаємо модель (1.1)–(1.3), в якій виконано таке припущення.

R1. $\big(\lambda_k^0,\mu_k^0\big) < \big(\lambda_{k+1}^0,\mu_{k+1}^0\big)$, $k=\overline{1,N-1}$, і всі величини λ_j^0, μ_j^0, $i,j=\overline{1,N}$, — додатні та різні.

Це припущення означає, що параметричні множини, які містять значення параметрів $\lambda^0 = \big(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_N^0\big)$, $\mu^0 = \big(\mu_1^0,\ldots,\mu_N^0\big)$, мають вигляд

$$\Lambda(\underline{\lambda},\overline{\lambda}) = \{\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\in\mathbb{R}^N : 0\leq\underline{\lambda}<\lambda_1<\ldots<\lambda_N<\overline{\lambda}<\infty\}, \tag{1.4}$$

$$M(\underline{\mu},\overline{\mu}) = \{\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_N)\in\mathbb{R}^N : 0\leq\underline{\mu}<\mu_1<\ldots<\mu_N<\overline{\mu}<\infty\}. \tag{1.5}$$

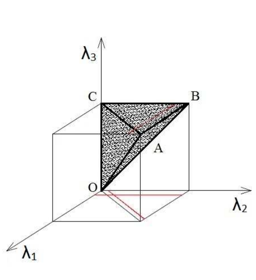

Рис. 1

На рис. 1 зображено параметричну множину $\Lambda(0,1)$ $OCBA$ при $N=3$: $0<\lambda_1<$ $<\lambda_2<\lambda_3<1$. Необхідно мати на увазі, що ми відділяємо деяку малу частину з бічних граней для розрізнення параметрів — від OCA для відокремлення λ_1 від λ_2; від OCB для відокремлення λ_1 від 0; від OAB для відокремлення λ_2 від λ_3.

Позначимо

$$Q_T(\theta)=T^{-2}\int_0^T\int_0^T[X(t_1,t_2)-g(t_1,t_2;\theta)]^2dt_1dt_2. \tag{1.6}$$

За стандартним означенням ОНК параметра θ^0, отриманою за спостереженнями поля $X(t_1,t_2)$, $(t_1,t_2)=[0,T]\times[0,T]$, називається будь-який випадковий вектор

$$\theta_T=(A_{1T},B_{1T},\lambda_{1T},\mu_{1T},\ldots,A_{NT},B_{NT},\lambda_{NT},\mu_{NT}), \tag{1.7}$$

що мінімізує функціонал (1.6) на параметричній множині $\Theta\subset\mathbb{R}^{4N}$, в якій A_k,B_k, $k=\overline{1,N}$, можуть набувати будь-яких значень, а λ,μ містяться у замкнених множинах $\Lambda^c(\underline{\lambda},\overline{\lambda})$, $M^c(\underline{\mu},\overline{\mu})$.

При доведенні косистентності ОНК моделі (1.1)–(1.3) та в подальших обчисленнях треба забезпечити збіжність м. н. до нуля при $T\to\infty$ величин

$$\frac{\sin T(\lambda_{kT}-\lambda_{jT})}{T(\lambda_{kT}-\lambda_{jT})},\ \frac{\sin T(\mu_{kT}-\mu_{jT})}{T(\mu_{kT}-\mu_{jT})},\ \frac{\sin T(\lambda_{kT}-\lambda_j^0)}{T(\lambda_{kT}-\lambda_j^0)},$$
$$\frac{\sin T(\mu_{kT}-\mu_j^0)}{T(\mu_{kT}-\mu_j^0)},\ k\neq j;\ \frac{\sin T\lambda_{kT}}{T\lambda_{kT}},\ \frac{\sin T\mu_{kT}}{T\mu_{kT}},\ k=\overline{1,N}. \tag{1.8}$$

Однак, користуючись наведеним означенням оцінок $\lambda_T=(\lambda_{1T},\ldots,\lambda_{NT})$, $\mu_T=$ $=(\mu_{1T},\ldots,\mu_{NT})$, неможливо з'ясувати поведінку знаменників дробів (1.8) при $T\to\infty$.

А. М. Уолкер [22] свого часу запропонував у класичній задачі виявлення прихованих періодичностей таку модифікацію означення ОНК кутових частот, яка забезпечує і в нашій постановці задачі збіжність відношень (1.8) до нуля. Це надає можливість довести консистентність указаних оцінок. Сенс такої модифікації полягає в тому, що оцінка (1.7) визначається як точка мінімуму функціонала (1.6) на параметричній множині, що залежить від T, і асимптотично при $T\to\infty$ добре розрізняє сукупності частот λ і μ.

Уведемо дві монотонно неспадні сім'ї відкритих опуклих множин

$$\Lambda_T\subset\Lambda(\underline{\lambda},\overline{\lambda}),\ M_T\subset M(\underline{\mu},\overline{\mu}),\ T\geq T_0>0, \tag{1.9}$$

які містять істинні значення параметрів λ^0, μ^0, відповідно, та задовольняють наведені нижче умови.

R2.
$$\lim_{T\to\infty}\inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}}T(\lambda_{j+1}-\lambda_j)=\lim_{T\to\infty}\inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \mu\in M_T}}T(\mu_{j+1}-\mu_j)=\infty, \tag{1.10}$$
$$\lim_{T\to\infty}\inf_{\lambda\in\Lambda_T}T\lambda_1=\lim_{T\to\infty}\inf_{\mu\in M_T}T\mu_1=\infty. \tag{1.11}$$

Умова (1.11) завжди виконується, коли $\underline{\lambda}>0$, $\underline{\mu}>0$. Якщо $\Lambda_T\subset\Lambda(0,\overline{\lambda})$, $M_T\subset$ $\subset M(0,\overline{\mu})$, то для виконання (1.10), (1.11) можна розглядати, наприклад, множини Λ_T, M_T такі, що

$$\inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \lambda\in\Lambda_T}}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)=\inf_{\substack{1\leq j\leq N-1\\ \mu\in M_T}}(\mu_{j+1}-\mu_j)=\inf_{\lambda\in\Lambda_T}\lambda_1=\inf_{\mu\in M_T}\mu_1=T^{-1/2}. \tag{1.12}$$

Сенс припущень (1.10), (1.11) полягає в тому, щоб охопити випадок оцінювання близьких частот у сукупностях λ^0, μ^0 і близьких до нуля частот λ_1^0, μ_1^0.

Насправді, умова **R1** не обмежує загальності запису функції регресії (1.2). У будь-якому випадку ми можемо записати

$$g(t_1, t_2; \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} \Big(A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_{i_k}^0 t_2) + B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_{i_k}^0 t_2) \Big), \tag{1.13}$$

де $\lambda^0 \in \Lambda(\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$ та $(\mu_{i_1}^0, \dots, \mu_{i_N}^0)$ є деякою перестановкою координат вектора $\mu^0 = (\mu_1^0, \dots, \mu_N^0) \in M(\underline{\mu}, \overline{\mu})$. Наступне означення підходить як для припущень **R1**, **R2**, так і для аналогічних припущень, які охоплюють функцію регресії вигляду (1.13).

Означення 1. ОНК у сенсі Уолкера векторного параметра θ^0 вигляду (1.3) моделі (1.1), (1.2) назвемо будь-який випадковий вектор θ_T вигляду (1.7), що мінімізує функціонал (1.6) на множині параметрів $\Theta \subset \mathbb{R}^{4N}$, в якій амплітуди A_k, B_k, $k = \overline{1, N}$, можуть набувати довільних значень, а кутові частоти λ, μ містяться у замкнених множинах Λ_T^c, M_T^c.

Важливо зауважити, що множини $\Lambda_T^c \times M_T^c$ є опуклими. Ми віддаємо перевагу використанню у статті умови **R1**, щоб спростити позначення індексів.

У роботі [13] було доведено властивість консистентності ОНК параметрів функції регресії (1.2), (1.3).

Теорема 1. *Якщо виконано умови* **N**, **R1**, **R2**, *то ОНК у сенсі Уолкера* θ_T *є сильно консистентною оцінкою параметра* θ^0, *а саме:* $A_{kT} \to A_k^0$, $B_{kT} \to B_k^0$, $T(\lambda_{kT} - \lambda_k^0) \to 0$, $T(\mu_{kT} - \mu_k^0) \to 0$ *м. н. при* $T \to \infty$, $k = \overline{1, N}$.

У подальшому тексті статті для отримання основного результату, а саме, для доведення теореми 5 про асимптотичну нормальність ОНК параметрів двовимірної тригонометричної моделі регресії (1.1)–(1.3), використовуються теорема редукції 2 (лінеаризації), теорема 3 про асимптотичну єдиність ОНК, теорема 4 про асимптотичну нормальність ОНК у сенсі Уолкера, які доведено для загальної моделі регресії. Неважко впевнитися, що тригонометрична функція регресії (1.2), (1.3) задовольняє умови цих загальних теорем.

Варто зауважити, що доведення перелічених результатів використовує методологію, розвинену у роботі [12], але узагальнення на випадкові поля містять нетривіальні технічні ускладнення.

2. Теорема редукції

Розглянемо модель регресії

$$X(t_1, t_2) = g(t_1, t_2; \theta) + \varepsilon(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in [0, T]^2, \tag{2.1}$$

де $g\colon [0; \infty)^2 \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}^2$ неперервна функція, $\Theta_\gamma = \bigcup_{\|a\|<1} (\Theta + \gamma a), \gamma > 0$ — деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — відкрита множина, що містить у собі монотонно неспадну сім'ю відкритих опуклих множин $\Theta_T \subset \Theta$, $T > T_0 > 0$, істинне значення параметра $\theta \in \Theta_T$, $T > T_0$. Припускаємо також, що випадковий шум $\varepsilon(t_1, t_2)$ задовольняє умови **N**.

Використовуючи позначення $Q_T(\tau)$ і для функції регресії (2.1), припустимо, що $\inf_{\tau \in \Theta_T^c} Q_T(\tau)$ досягається у множинах $\Theta_T^c, T > T_0$, для кожного $\omega \in \Omega$.

Означення 2. ОНК (у сенсі Уолкера) невідомого параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \Theta_T$, $T > T_0$, моделі спостережень (2.1) називається будь-який вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q) \in \Theta_T^c$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\tau \in \Theta_T^c} Q_T(\tau).$$

Зауважимо, що існування хоча б одного такого випадкового вектора випливає з теореми (3.10), с. 270 роботи І. Пфанцагля [20].

Припустимо, що $g(t_1,t_2;\cdot)\in C^2(\Theta_\gamma)$ для кожного $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2_+$. Позначимо

$$g_i(t_1,t_2;\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau_i}g(t_1,t_2;\tau),\ g_{il}(t_1,t_2;\tau)=\frac{\partial^2}{\partial\tau_i\partial\tau_l}g(t_1,t_2;\tau),\ i,l=\overline{1,q},$$

$$d_T^2(\theta)=\operatorname{diag}\bigl(d_{iT}^2(\theta)\bigr)_{i=1}^q,$$

$$d_{iT}^2(\theta)=\int_0^T\!\!\int_0^T g_i^2(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2,\ \varliminf_{T\to\infty}T^{-2}d_{iT}^2(\theta)>0,\ i=\overline{1,q},$$

$$d_{il,T}^2(\theta)=\int_0^T\!\!\int_0^T g_{il}^2(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2,\ \theta\in\Theta_T^c,\ i,l=\overline{1,q}.$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat u_T=\hat u_T(\theta)=d_T(\theta)\bigl(\hat\theta_T-\theta\bigr) \tag{2.2}$$

і зробимо заміну змінних $u=d_T(\theta)(\tau-\theta)$, яка відповідає нормуванню (2.2), у функції регресії та її похідних, тобто

$$\begin{aligned}
g(t_1,t_2;\tau)&=g(t_1,t_2;\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h(t_1,t_2;u),\\
g_i(t_1,t_2;\tau)&=g_i(t_1,t_2;\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h_i(t_1,t_2;u),\\
g_{il}(t_1,t_2;\tau)&=g_{il}(t_1,t_2;\theta+d_T^{-1}(\theta)u)=h_{il}(t_1,t_2;u),\ i,l=\overline{1,q}.
\end{aligned}$$

Позначимо $V(R)=\bigl\{u\in\mathbb{R}^q:\|u\|<R\bigr\}$. Літерами k позначатимемо додатні константи. Припускаємо, що для $R\ge 0$ всіх достатньо великих $T(T>T_0(R))$ та істинного значення параметра θ виконується умова **R3**.

R3.

(i) $$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\frac{|h_i(t_1,t_2;u)|}{d_{iT}(\theta)}\le k_i(R)T^{-1},\ i=\overline{1,q}; \tag{2.3}$$

(ii) $$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)}\le k_{il}(R)T^{-1},\ i,l=\overline{1,q}; \tag{2.4}$$

(iii) $$\frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{iT}(\theta)}\le\tilde k_{il}T^{-1},\ i,l=\overline{1,q}. \tag{2.5}$$

Позначимо також

$$\begin{aligned}
H(t_1,t_2;u_1,u_2)&=h(t_1,t_2;u_1)-h(t_1,t_2;u_2),\\
H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)&=h_i(t_1,t_2;u_1)-h_i(t_1,t_2;u_2),\ i=\overline{1,q}.
\end{aligned}$$

Уведемо векторнозначні функції

$$\Psi_T(u)=\bigl(\Psi_T^i(u)\bigr)_{i=1}^q,\qquad \Psi_T^i(u)=\int_0^T\!\!\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2+$$
$$+\int_0^T\!\!\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2,\ i=\overline{1,q}; \tag{2.6}$$

$$L_T(u)=\bigl(L_T^i(u)\bigr)_{i=1}^q,$$
$$L_T^i(u)=\int_0^T\!\!\int_0^T\left(\varepsilon(t_1,t_2)-\sum_{l=1}^q\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\right)\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2,\ i=\overline{1,q}. \tag{2.7}$$

Вектор $\Psi_T(u)$ визначено для $u\in U_T^c(\theta)$, $U_T(\theta)=d_T(\theta)(\Theta_T-\theta)$. За нашими припущеннями множина $U_T(\theta)$ розширюється до $\mathbb{R}^q$ при $T\to\infty$. Тоді для будь-якого $R>0$ $V^c(R)\subset U_T(\theta)$ для $T>T_0(R)$. Вектор $L_T(u)$ визначено для $u\in\mathbb{R}^q$.

Легко зрозуміти статистичний зміст векторів $\Psi_T(u)$ та $L_T(u)$. ОНК $\hat{u}_T$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0. \tag{2.8}$$

Вектор $L_T(u)$ відповідає віртуальній лінійній регресійній моделі з невідомим параметром $\beta = (\beta_1, \dots \beta_q)$

$$Z(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{q} g_i(t_1,t_2;\theta)\beta_i + \varepsilon(t_1,t_2),\ (t_1,t_2) \in [0,T]^2, \tag{2.9}$$

і система нормальних рівнянь

$$L_T(u) = 0 \tag{2.10}$$

задає нормовану ОНК $\tilde{u}_T$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$, якщо ми запишемо

$$\tilde{u}_T = \tilde{u}_T(\theta) = d_T(\theta)\big(\tilde{\beta}_T - \beta\big), \tag{2.11}$$

$\tilde{\beta}_T$ — стандартна ОНК параметра β моделі (2.9).

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* **N** *та* **R3***, то для довільних* $R > 0,\ r > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r\right\} \to 0, \quad T \to \infty. \tag{2.12}$$

Доведення. Для $i = \overline{1,q}$

$$\begin{aligned}
\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = &\int_0^T\!\!\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&+ \int_0^T\!\!\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 - \int_0^T\!\!\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&+ \int_0^T\!\!\int_0^T \frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l dt_1dt_2 = \\
= &\int_0^T\!\!\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 + \int_0^T\!\!\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&+ \int_0^T\!\!\int_0^T \frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\left[H(t_1,t_2;0,u) + \sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\right]dt_1dt_2 = \\
= &\, I_1(u) + I_2(u) + I_3(u).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Нехай $u \in V^c(R)$ фіксовано. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\, I_1^2(u) = &\,\mathsf{E}\left(\int_0^T\!\!\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right)^2 = \\
&= \int_0^T\!\!\int_0^T\!\!\int_0^T\!\!\int_0^T \frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\frac{H_i(v_1,v_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\,\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2)dt_1dt_2dv_1dv_2 \le \\
&\le \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{H_i^2(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}^2(\theta)}\int_0^T\!\!\int_0^T\!\!\int_0^T\!\!\int_0^T \Big|\,\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2)\Big|dt_1dt_2dv_1dv_2.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Використовуючи умову **R3**, отримуємо

$$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)} \le \left[\sum_{l=1}^{q}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}|u_l|\right] =$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{q} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)} \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)} |u_l| \right] \le R \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il} \right) T^{-2}. \tag{2.15}$$

Нехай виконано умову $\mathbf{N(ii)}$. Тоді

$$\mathsf{E}\, I_1^2(u) \le R^2 \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il} \right)^2 T^{-4} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T \Big| \mathsf{E}\, \varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2) \Big| dt_1dt_2dv_1dv_2.$$

За умови $\mathbf{N}$ $\;|\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(v_1,v_2)| = |B(t_1-v_1,t_1-v_2)|$ та

$$\Gamma(T) = T^{-4} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |B(t_1-v_1,t_1-v_2)| dt_1dt_2dv_1dv_2 =$$
$$= T^{-2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \left(1-\frac{|t_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T}\right) |B(t_1,t_2)| dt_1dt_2 = T^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} B_T(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

де

$$B_T(t_1,t_2) = \begin{cases} \left(1-\frac{|t_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T}\right)|B(t_1,t_2)|, & (t_1,t_2)\in[-T,T]^2; \\ 0, & (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2 \setminus [-T,T]^2. \end{cases}$$

Очевидно, $B_T(t_1,t_2) \to |B(t_1,t_2)|,\ T\to\infty,\ (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. Крім цього, $B_T(t_1,t_2) \le \le |B(t_1,t_2)|,\ T>0,\ (t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність $\Gamma(T) \to \int_{\mathbb{R}^2} |B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 < \infty,\ T\to\infty$, тобто інтеграл $\Gamma(T) = O(T^{-2})$ при $T\to\infty$.

Нехай виконано умову $\mathbf{N(i)}$. Тоді після заміни змінних $t_1 \to Tt_1,\ t_2 \to Tt_2$ отримуємо

$$\Gamma(T) = T^{-2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \left(1-\frac{|t_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T}\right) \tilde{B}(\|t\|)dt_1dt_2 =$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1-|t_1|)(1-|t_2|)\tilde{B}(T\|t\|)dt_1dt_2 \le \frac{L(T)}{T^\alpha} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dt_1dt_2}{\|t\|^\alpha},$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dt_1dt_2}{\|t\|^\alpha} \le \int_{V(\sqrt{2})} \|t\|^{-\alpha}dt = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^{1-\alpha}d\rho = \frac{2^{2-\alpha/2}\pi}{2-\alpha},$$

тобто $\Gamma(T) = O\big(\tilde{B}(T)\big)$ при $T\to\infty$.

Таким чином маємо, що $I_1(u) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ при $T\to\infty$ поточково для $u\in V^c(R)$. З іншого боку,

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{\|u_1-u_2\|\le h} |I_1(u_1) - I_2(u_2)| > r \right\} \le$$
$$\le r^{-1}\,\mathsf{E} \sup_{\|u_1-u_2\|\le h} \left| \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)}{d_{iT}(\theta)} dt_1dt_2 \right| \le$$
$$\le r^{-1} \sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\ \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \frac{|H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)}\, \mathsf{E}\,|\varepsilon(0,0)|T^2, \tag{2.16}$$

За умови $\mathbf{R3}$ отримуємо

$$\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}\ \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \frac{|H_i(t_1,t_2;u_1,u_2)|}{d_{iT}(\theta)} \le$$
$$\le h \left[\sum_{l=1}^{q} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t_1,t_2;u)|}{d_{il,T}(\theta)} \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)} \right] \le h \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il} \right) T^{-2}. \tag{2.17}$$

Із (2.17) випливає нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_1(u_1)-I_2(u_2)|>r\right\}\le k_1r^{-1}h, \tag{2.18}$$

де

$$k_1=\left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)\mathsf{E}\,|\varepsilon(0,0)|.$$

Нехай N_h скінченна h-сітка кулі $V^c(R)$. Тоді

$$\sup_{u\in V^c(R)}|I_1(u)|\le \sup_{\|u_1-u_2\|\le h}|I_1(u_1)-I_1(u_2)|+\max_{u\in N_h}|I_1(u)|. \tag{2.19}$$

З (2.16), (2.17) маємо для будь-якого $r>0$

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u\in V^c(R)}|I_1(u)|>r\right\}\le 2k_1r^{-1}h+\mathsf{P}\left\{\max_{u\in N_h}|I_1(u)|>\frac{r}{2}\right\}. \tag{2.20}$$

Для $\varepsilon>0$ задамо $h=\frac{\varepsilon r}{4k_1}$. Тоді для $T>T_0$ завдяки поточковій збіжності $I_1(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$\mathsf{P}\left\{\max_{u\in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_1}}}|I_1(u)|>\frac{r}{2}\right\}\le\frac{\varepsilon}{2},$$

унаслідок чого

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{u\in V^c(R)}|I_1(u)|>r\right\}\le\varepsilon.$$

Таким чином, $I_1(u)$ збігається рівномірно за $u\in V^c(R)$ до нуля за ймовірністю.

Маємо далі

$$\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}|H(t_1,t_2;0,u)|=\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|\sum_{i=1}^{q}\frac{h_i(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{iT}(\theta)}u_i\right|\le$$

$$\le\|u\|\left[\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\,u\in V^c(R)}\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{h_i(t_1,t_2;u)}{d_{iT}(\theta)}\right)^2\right]^{1/2}\le\|k(R)\|RT^{-1}, \tag{2.21}$$

де $k(R)=(k_1(R),\dots,k_q(R))$. Тоді, завдяки (2.15) та (2.21), запишемо

$$\sup_{u\in V^c(R)}|I_2(u)|=\sup_{u\in V^c(R)}\left|\int_0^T\!\!\int_0^T H(t_1,t_2;0,u)\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right|\le$$

$$\le T^2\sup_{u\in V^c(R)}\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\left|H(t_1,t_2;0,u)\frac{H_i(t_1,t_2;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\right|\le T^{-1}R^2\|k(R)\|\left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right),$$

і $I_2(u)$ рівномірно за $u\in V^c(R)$ при $T\to\infty$ збігається до 0.

Неважко побачити, що $I_3(u)$ можна записати у вигляді

$$I_3(u)=\int_0^T\!\!\int_0^T\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\left[H(t_1,t_2;0,u)+\sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t_1,t_2;\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\right]dt_1dt_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^T\!\!\int_0^T\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}\sum_{l,j=1}^{q}\frac{h_{lj}(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{lT}(\theta)d_{jT}\theta}u_lu_jdt_1dt_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{l,j=1}^{q}\left(\int_0^T\!\!\int_0^T\frac{h_{lj}(t_1,t_2;u^*_{t_1,t_2})}{d_{lT}(\theta)d_{jT}\theta}\frac{g_i(t_1,t_2;\theta)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right)u_lu_j,\ u^*_t\in V(R).$$

Тоді за умови **R3**

$$\sup_{u\in V^c(R)} |I_3(u)| \le \frac{T^2}{2} k_i(R)\left(\sum_{l,j=1}^{q} k_{jl}(R)\tilde{k}_{jl}|u_l||u_j|\right)T^{-3} \le$$
$$\le \frac{qk_i(R)}{2} \max_{1\le j,l\le q} \left[k_{jl}(R)\tilde{k}_{jl}\right] R^2 T^{-1}.$$

Отже, $I_3(u)$ також рівномірно за $u \in V^c(R)$ при $T \to \infty$ збігається до 0. □

Можна перевірити, що функція регресії (1.2), (1.3) задовольняє умови **R3** теореми 2.

3. Асимптотична єдиність оцінки найменших квадратів

Позначимо

$$J_T(\theta) = (J_{il,T}(\theta))_{i,l=1}^q,\ J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta)d_{lT}^{-1}(\theta)\int_0^T\int_0^T g_i(t_1,t_2;\theta)g_l(t_1,t_2;\theta)dt_1dt_2, \tag{3.1}$$

$\lambda_{\min}(A)$ ($\lambda_{\max}(A)$) — найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A.

R4. Для деякого $\lambda_* > 0$ при $T > T_0$

$$\lambda_{\min}(J_T(\theta)) \ge \lambda_*. \tag{3.2}$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat{w}_T = \hat{w}_T(\theta) = T^{-1}d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta), \tag{3.3}$$

якій відповідає заміна змінних $w = T^{-1}d_T(\theta)(\tau - \theta)$ у функції регресії та її похідних. Уведемо позначення

$$\begin{aligned} g(t_1,t_1;\tau) &= g\big(t_1,t_2;\theta + Td_T^{-1}(\theta)w\big) = f(t_1,t_2;w),\\ g_i(t_1,t_1;\tau) &= g_i\big(t_1,t_2;\theta + Td_T^{-1}(\theta)w\big) = f_i(t_1,t_2;w),\\ g_{il}(t_1,t_1;\tau) &= g_{il}\big(t_1,t_2;\theta + Td_T^{-1}(\theta)w\big) = f_{il}(t_1,t_2;w),\ i,l=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Також запишемо

$$\begin{aligned} F(t_1,t_2;w_1,w_2) &= f(t_1,t_2;w_1) - f(t_1,t_2;w_2),\\ F_i(t_1,t_2;w_1,w_2) &= f_i(t_1,t_2;w_1) - f_i(t_1,t_2;w_2),\\ F_{il}(t_1,t_2;w_1,w_2) &= f_{il}(t_1,t_2;w_1) - f_{il}(t_1,t_2;w_2),\\ \Phi_{il,T}(w,0) &= \int_0^T\int_0^T F_{il}^2(t_1,t_2;w,0)dt_1dt_2,\ i,l=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Нам потрібна наступна умова.

R5. Для деякого $r_0 > 0$ і $T > T(r_0) > 0$

(i) $$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t_1,t_2;w)|}{d_{iT}(\theta)} \le \hat{k}_i(r_0)T^{-1},\ i=\overline{1,q}; \tag{3.6}$$

(ii) $$\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, w\in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t_1,t_2;w)|}{d_{il,T}(\theta)} \le \hat{k}_{il}(r_0)T^{-1},\ i,l=\overline{1,q}; \tag{3.7}$$

(iii) $$\sup_{w\in V^c(r_0)} T^2 d_{iT}^{-2}(\theta)d_{lT}^{-2}(\theta)\Phi_{il,T}(w,0)\|w\|^2 \le \hat{k}_{il}(r_0),\ i,l=\overline{1,q}. \tag{3.8}$$

Розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{2}T^{-2}\int_0^T\int_0^T \big(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\big)^2 dt_1dt_2 = \frac{1}{2}Q_T\big(\theta + Td_T^{-1}(\theta)w\big) \tag{3.9}$$

і його градієнт

$$\mathcal{M}_T(w) = \left(\mathcal{M}_T^i(w)\right)_{i=1}^q = \left(\frac{\partial}{\partial w_i}\left(\frac{1}{2}Q_T(\theta + Td_T^{-1}(\theta)w)\right)\right)_{i=1}^q =$$
$$= \left(T^{-1}\int_0^T\int_0^T \left(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\right)\frac{-f_i(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)}dt_1dt_2\right)_{i=1}^q.$$

Тоді нормована ОНК $\hat{w}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\mathcal{M}_T(w) = 0. \tag{3.10}$$

Наступна умова є умовою слабкої консистентності нормованої оцінки $\hat{w}_T$.

C. Для будь-якого $r > 0$ $\mathsf{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \to 0,\ T \to \infty$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* **N**, **R3**(**iii**), **R4**, **R5**, **C**. *Тоді нормована ОНК $\hat{w}_T$ з імовірністю, що прямує до 1 при $T \to \infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.10).*

Доведення. Розглянемо довільний елемент матриці Гессе $\mathcal{H}(w) = \left(\mathcal{H}_T^{il}(w)\right)_{i,l=1}^q$ інтеграла (3.9):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T^{il}(w) &= \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l}\left(\frac{1}{2}Q_T(\theta + Td_T^{-1}(\theta)w)\right) = \\
&= T^{-2}\int_0^T\int_0^T \Bigg(\left(X(t_1,t_2) - f(t_1,t_2;w)\right)\frac{-f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}T^2 + \\
&\quad + \frac{f_i(t_1,t_2;w)f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}T^2\Bigg)dt_1dt_2 = \\
&= \int_0^T\int_0^T \left(F(t_1,t_2;0,w) + \varepsilon(t_1,t_2)\right)\frac{-f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T\int_0^T \frac{f_i(t_1,t_2;w)f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 = \\
&= \int_0^T\int_0^T F(t_1,t_2;w,0)\frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 - \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w) - f_i(t_1,t_2;0))(f_l(t_1,t_2;w) - f_l(t_1,t_2;0))}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w) - f_i(t_1,t_2;0))f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T\int_0^T \frac{(f_l(t_1,t_2;w) - f_l(t_1,t_2;0))f_i(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 + \\
&\quad + \int_0^T\int_0^T \frac{f_i(t_1,t_2;0)f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2 = \\
&= I_1(w) + I_2(w) + I_3(w) + I_4(w) + I_5(w) + J_{il,T}(\theta),\ i,l = \overline{1,q}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Застосовуючи нерівність [23, с. 103]

$$|\lambda_{\min}(\mathcal{H}(w)) - \lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \le q \max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right|, \tag{3.12}$$

знаходимо

$$\max_{1\le i,l\le q}\left|\mathcal{H}_{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right| \le \sum_{m=1}^5 \max_{1\le i,l\le q}|I_m(w)|. \tag{3.13}$$

За умовами теореми для $\|w\| \le r_0$

$$\begin{aligned}
|I_1(w)| &= \left| \int_0^T \int_0^T F(t_1,t_2;w,0) \frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 \right| \le \\
&\le T^2 \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \left| F(t_1,t_2;w,0) \frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} \right| \le \\
&\le T^2 \hat{k}_{il}(r_0) \tilde{k}_{il} T^{-2} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} |F(t_1,t_2;w,0)| \le \\
&\le \hat{k}_{il} \tilde{k}_{il} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} |f(t_1,t_2;w) - f(t_1,t_2;0)| = \\
&= \hat{k}_{il} \tilde{k}_{il} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2} \left| T \sum_{l=1}^{q} \frac{f_l\Big(t_1,t_2;w^*_{(t_1,t_2)}\Big)}{d_{lT}(\theta)} w_l \right| \le \\
&\le \hat{k}_{il} \tilde{k}_{il} T \left(\sum_{l=1}^{q} \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2,\, w\in V^c(r_0)} \left(\frac{f_l(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta)} \right)^2 \right)^{1/2} \|w\| \le \\
&\le \|\hat{k}(r_0)\| \cdot \hat{k}_{il} \cdot \tilde{k}_{il} \cdot \|w\|, \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

$$\hat{k}(r_0) = \big(\hat{k}_1(r_0), \dots, \hat{k}_q(r_0)\big),\ \|w^*_t\| \le \|w\|,\ (t_1,t_2) \in [0,T]^2.$$

Запишемо

$$\begin{aligned}
|I_2(w)| &= \left| \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{f_{il}(t_1,t_2;w)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 \right| = \\
&= \left| \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{F_{il}(t_1,t_2;w,0)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 + \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 \right| \le \\
&\le |I_6(w)| + |I_7(w)|. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

За нерівністю **R5(iii)**

$$\begin{aligned}
|I_6(w)| &= \left| \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \frac{F_{il}(t_1,t_2;w,0)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} dt_1 dt_2 \right| \le \\
&\le \left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \right)^{1/2} \cdot \left(T^2 \frac{\Phi_{il,T}(w,0)}{d^2_{iT}(\theta) d^2_{lT}(\theta)} \right)^{1/2} \le \\
&\le \left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \right)^{1/2} \cdot \Big(\hat{k}_{il}(r_0) \Big)^{1/2} \cdot \|w\|. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{aligned}
&\left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T \varepsilon^2(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \right)^{1/2} = \\
&\quad = \left(T^{-2} \int_0^T \int_0^T \big(\varepsilon^2(t_1,t_2) - \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0)\big) dt_1 dt_2 + \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0) \right)^{1/2} = \big(\xi_T + \mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0)\big)^{1/2},
\end{aligned}$$

$$\mathsf{E}\,\xi_T^2 = T^{-4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T \big(\mathsf{E}\,\varepsilon^2(t_1,t_2)\varepsilon^2(s_1,s_2) - (\mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0))^2\big) dt_1 dt_2 ds_1 ds_2.$$

Покажемо, що

$$\mathsf{E}\,\xi_T^2 \to 0,\ T \to \infty. \qquad (3.17)$$

За умови **N** та згідно з формулою Іcерліса

$$\mathsf{E}\,\varepsilon^2(t_1,t_2)\varepsilon^2(s_1,s_2) - \big(\mathsf{E}\,\varepsilon^2(0,0)\big)^2 = 2B^2(t_1-s_1, t_2-s_2).$$

Нехай виконано умову **N(ii)**. За теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T B^2(t_1-s_1,t_2-s_2)dt_1dt_2ds_1ds_2 =$$
$$=\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T}\right)B^2(t_1,t_2)dt_1dt_2 \to$$
$$\to \int_{\mathbb{R}^2} B^2(t_1,t_2)dt_1dt_2, \quad T\to\infty,$$

тобто (3.17) справджується.

Нехай виконано умову **N(i)**. Тоді так само, як і в доведенні теореми 2

$$T^{-2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|t_1|}{T}\right)\left(1-\frac{|t_2|}{T}\right)\tilde{B}^2(\|t\|)dt_1dt_2 = O\Big(\tilde{B}^2(T)\Big),\ T\to\infty,$$

і (3.17) виконується.

Позначимо $\xi_T = o_p^{(1)}(1) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ T\to\infty$. Якщо виконано умову **N(ii)**, із використанням умови **R5** отримуємо

$$\mathsf{E}\,|I_7(w)|^2 = \mathsf{E}\left|\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right|^2 \le$$
$$\le \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |\,\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(s_1,s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2\left(\sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{f_{il}(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}\right)^2 \le$$
$$\le \Big(\hat{k}_{il}(r_0)\cdot\tilde{k}_{il}\Big)^2 T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |B(t_1-s_1,t_2-s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2 \le$$
$$\le T^{-2}\int_{\mathbb{R}^2}|B(t_1,t_2)|dt_1dt_2 \to 0, \quad T\to\infty.$$

За умови **N(i)** це математичне сподівання, як було показано в доведенні теореми 2, є величиною $O(\tilde{B}(T))$. Таким чином,

$$|I_7(w)| = o_p^{(2)}(1) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\ T\to\infty. \tag{3.18}$$

Маємо далі

$$|I_3(w)| = \left|\int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))(f_l(t_1,t_2;w)-f_l(t_1,t_2;0))}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right| \le$$
$$\le T^4\sum_{j=1}^q\sum_{s=1}^q \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{\left|f_{ij}\Big(t_1,t_2;w^*_{1(t_1,t_2)}\Big)\right|}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\times$$
$$\times \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{\left|f_{ls}\Big(t_1,t_2;w^*_{2(t_1,t_2)}\Big)\right|}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\cdot|w_j|\cdot|w_s| \le$$
$$\le T^4\sum_{j=1}^q\sum_{s=1}^q \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{\left|f_{ij}\Big(t_1,t_2;w^*_{1(t_1,t_2)}\Big)\right|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\times$$
$$\times \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{\left|f_{ls}\Big(t_1,t_2;w^*_{2(t_1,t_2)}\Big)\right|}{d_{ls,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ls,T}(\theta)}{d_{sT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\cdot|w_j|\cdot|w_s| \le$$
$$\le \left(\sum_{s=1}^q\Big(\hat{k}_{ls}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ls}\Big)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^q\Big(\hat{k}_{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ij}\Big)^2\right)^{1/2}\|w\|^2, \tag{3.19}$$

$\|w^*_{1(t_1,t_2)}\|,\ \|w^*_{2(t_1,t_2)}\| \le \|w\|,\ (t_1,t_2)\in[0,T]^2$.

За умов теореми **R3(iii)** та **R5**

$$|I_4(w)| = \left|\int_0^T\int_0^T \frac{(f_i(t_1,t_2;w)-f_i(t_1,t_2;0))f_l(t_1,t_2;0)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}dt_1dt_2\right| \le$$
$$\le T^3\sum_{j=1}^q |w_j|\cdot \sup_{(t_1,t_2)\in[0,T]^2}\frac{\left|f_{ij}\left(t_1,t_2;w^*_{(t_1,t_2)}\right)\right|}{d_{ij,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{ij,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{jT}(\theta)}\frac{f_l(t_1,t_2;0)}{d_{lT}(\theta)} \le$$
$$\le \hat{k}_l(r_0)\cdot\left(\sum_{j=1}^q(\hat{k}_{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ij})^2\right)^{1/2}\cdot\|w\|, \tag{3.20}$$
$$|I_5(w)| \le \hat{k}_i(r_0)\cdot\left(\sum_{j=1}^q(\hat{k}_{lj}(r_0)\cdot\tilde{k}_{lj})^2\right)^{1/2}\cdot\|w\|. \tag{3.21}$$

Отже, враховуючи отримані нерівності (3.12)–(3.21), маємо як у [12],

$$\left|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(w))-\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))\right| \le$$
$$\le q\max_{1\le i,l\le q}\Bigg(\left\|\hat{k}(r_0)\right\|\cdot\hat{k}_{il}\cdot\tilde{k}_{il}\cdot\|w\| + \left(o_p^{(1)}(1)+\mathsf{E}\,\xi^2(0,0)\right)^{1/2}\left(\hat{k}_{il}^{1/2}\right)\cdot\|w\| +$$
$$+ o_p^{(2)}(1) + \left(\sum_{s=1}^q\left(\hat{k}_{ls}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ls}\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^q\left(\hat{k}_{il}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ij}\right)^2\right)^{1/2}\|w\|^2 +$$
$$+ \hat{k}_l(r_0)\left(\sum_{j=1}^q\left(\hat{k}_{ij}(r_0)\cdot\tilde{k}_{ij}\right)^2\right)^{1/2}\cdot\|w\| + \hat{k}_i(r_0)\cdot\left(\sum_{j=1}^q\left(\hat{k}_{lj}(r_0)\cdot\tilde{k}_{lj}\right)^2\right)^{1/2}\cdot\|w\|\Bigg). \tag{3.22}$$

Підставляючи в (3.22) нормовану ОНК $\hat{w}_T$, та враховуючи, що за умови **R4** $J_T(\theta^0)$ — додатно визначена матриця з мінімальним власним числом $\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) \ge \lambda_*$ при $T > T_0$, для деякого $r > 0$ розглянемо подію

$$\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3 = \left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right|\le r,\ \left|o_p^{(2)}(1)\right|\le r,\ \|\hat{w}_T\|\le r\right\} \subset$$
$$\subset \left\{|\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T))-\lambda_{\min}(J_T(\theta^0))| \le \frac{\lambda_*}{2}\right\} =$$
$$= \left\{\lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \le \lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \le \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$
$$\subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \ge \lambda_{\min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset \left\{\lambda_{\min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \ge \frac{\lambda_*}{2}\right\}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ для $T > T_0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} \le \frac{\varepsilon}{3} \ \text{ та } \ \mathsf{P}\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді, якщо для $T > T_0$ $\mathsf{P}\{\|\hat{w}_T\| > r\} \le \frac{\varepsilon}{3}$ за умови **C**, то

$$\mathsf{P}\left\{\left|o_p^{(1)}(1)\right| > r\right\} + \mathsf{P}\left\{\left|o_p^{(2)}(1)\right| > r\right\} + \mathsf{P}\left\{\|\hat{w}_T\| > r\right\} \le \varepsilon,$$

а, отже, для $T > T_0$

$$\mathsf{P}\{\Omega_1\cap\Omega_2\cap\Omega_3\} > 1-\varepsilon.$$

Це означає, що нормована ОНК $\hat{w}_T$ з імовірністю, що прямує до 1 при $T\to\infty$, є єдиним розв'язком системи рівнянь (3.10), оскільки матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, і функціонал (3.9) має єдиний екстремум (мінімум) у точці $\hat{w}_T$. □

Зауваження. Оскільки $-T^{-1}\Phi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, де $\hat{w}_T = T^{-1}\hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$, то з єдиності оцінки $\hat{w}_T$ в кулі $V(r)$ із великою імовірністю при $T > T_0$ для деякого $r > 0$ випливає єдиність оцінки $\hat{u}_T$ з такою ж імовірністю для $T > T_0$ в кулі $V(Tr)$.

Можна впевнитися, що тригонометрична функція регресії (1.2), (1.3) задовольняє умови **R5**.

Матриці $J_T(\theta)$ для тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) у точці $\theta = \theta^0$ збігаються при $T \to \infty$ до блочно-діагональної матриці $J(\theta^0)$ із блоками

$$J_k(\theta^0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} \\ 0 & 1 & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{B_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & \frac{-A_k^0}{\sqrt{\frac{4}{3}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)}} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3.23}$$

Матриця $J(\theta^0)$ є додатно визначеною. Із цього випливає, що існує число T_0 таке, що для $T > T_0$ матриці $J_T(\theta^0)$ є додатно визначеними, і умову **R4** виконано.

Для тригонометричної моделі (1.1)–(1.3) за припущеннями **N**, **R1**, **R2** нормована оцінка $\hat{w}_T$ сильно консистентна (теорема 1), і, зокрема, умову слабкої консистентності **C** виконано.

4. Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів

У цьому розділі ми доводимо теорему про асимптотичну нормальність ОНК $\hat{\theta}_T$ в сенсі означення 2 і застосовуємо її для отримання асимптотичної нормальності ОНК $\hat{\theta}_T$ параметрів тригонометричної моделі.

Розглянемо нелінійну модель регресії (2.1) та введемо сім'ю матричних мір $\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta)$ на $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B})$, де $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^2$, із матричними щільностями $\left(\nu_T^{jl}(\lambda, \mu; \theta)\right)_{j,l=1}^q$,

$$\nu_T^{jl}(\lambda, \mu; \theta) = g_T^j(\lambda, \mu; \theta)\overline{g_T^l(\lambda, \mu; \theta)}\left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|g_T^j(\lambda, \mu; \theta)\right|^2 d\lambda d\mu \int_{\mathbb{R}^2} \left|g_T^l(\lambda, \mu; \theta)\right|^2 d\lambda d\mu\right)^{-1/2},$$

$$g_T^j(\lambda, \mu; \theta) = \int_0^T\int_0^T e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} g_j(t_1, t_2; \theta) dt_1 dt_2, \ j, l = \overline{1, q}.$$

R6. Сім'я мір $\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta)$ слабко збігається при $T \to \infty$ до додатно визначеної матричної міри $\nu(d\lambda, d\mu; \theta)$.

З умови **R6** випливає, що для будь-якої обмеженої неперервної функції $a(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} a(\lambda, \mu)\nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) \to \int_{\mathbb{R}^2} a(\lambda, \mu)\nu(d\lambda, d\mu; \theta), \ T \to \infty. \tag{4.1}$$

За умови **N(ii)** спектральна щільність $f(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, випадкового поля ε є обмеженою і неперервною функцією на $\mathbb{R}^2$, для якої виконано (4.1). Однієї умови **N(i)** не вистачає для того, щоб говорити про існування спектральної щільності f, для якої справедливе (4.1). У зв'язку із цим нам потрібна додаткова умова (див., наприклад, роботи [1, 3]).

NS. Випадкове поле $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, має спектральну щільність

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{f}(\|\lambda\|) = c(\alpha)\|\lambda\|^{\alpha-2} L_s\left(\frac{1}{\|\lambda\|}\right), \tag{4.2}$$

де $c(\alpha) = \frac{\Gamma(\frac{2-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2})}$, $\alpha \in (0,1)$, і збігається з α з умови **N(i)**, $L_s(\rho)$, $\rho > 0$, — локально обмежена повільно змінна на нескінченності функція така, що f неперервна в кожній точці множини $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Функції L з умови **N(i)** та L_s з умови **NS**, узагалі кажучи, різні, але вони еквівалентні на нескінченності [3]:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{L(r)}{L_s(r)} = 1.$$

Зрозуміло, що для інтегровності спектральної щільності (4.2) функція $\rho^{\alpha-1} L_s(\rho^{-1})$, $\rho > 0$, має бути інтегровною на нескінченності. У розділі 5 роботи [2] розглянуто декілька прикладів, де вдається явно записати функції L та L_s з умов **N(i)** та **NS**.

Означення 3. Міра $\nu(d\lambda, d\mu; \theta)$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t_1, t_2; \theta)$ або, що те ж саме, спектральною мірою вектор-функції $\nabla g(t_1, t_2; \theta)$ [10].

Отже, за умови **R6**

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) = \left(J_{jl,T}(\theta)\right)_{j,l=1}^q = J_T(\theta),$$

і коли $T \to \infty$, то $J_T(\theta) \to J(\theta) = \nu(\mathbb{R}^2; \theta)$ — додатно визначена матриця. Таким чином, з умови **R6** випливає умова **R4**.

Означення 4. [7] Спектральна щільність f випадкового поля ε називається ν-припустимою, якщо вона інтегровна за мірою ν, тобто всі елементи матриці $\int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1, \lambda_2)\nu(d\lambda_1, d\lambda_2; \theta)$ набувають скінченних значень, та для функції $a = f$ виконується (4.1).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* **C**, **R3**, **R5**, **R6**, **N(ii)** *або* **NS**, *причому у другому випадку спектральна щільність f є ν-припустимою. Тоді оцінка $\hat{u} = d_T(\theta)(\theta_T - \theta)$ асимптотично нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею*

$$\gamma(\theta) = (2\pi)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu(d\lambda, d\mu; \theta)\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda, \mu)\nu(d\lambda, d\mu; \theta) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu(d\lambda, d\mu; \theta)\right)^{-1}. \tag{4.3}$$

Доведення. Використовуючи введені раніше вектори (2.7) та систему (2.10), а також позначення

$$b_{lT} = \frac{g_l(t_1, t_2; \theta)}{d_{lT}(\theta)},$$

отримуємо, що

$$L_T^i(u) = \int_0^T \int_0^T \left(\varepsilon(t_1, t_2) - \sum_{l=1}^q b_{lT} u_l\right) b_{iT} dt_1 dt_2 = 0,$$

тобто

$$\int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) b_{iT} dt_1 dt_2 = \sum_{l=1}^q b_{lT} \int_0^T \int_0^T b_{lT} b_{iT} dt_1 dt_2 u_l = \sum_{l=1}^q J_{il,T}(\theta) u_l, \ i = \overline{1, q}.$$

Таким чином, отримуємо систему рівнянь відносно u

$$J_T(\theta) u = d_T^{-1} \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \nabla g(t_1, t_2; \theta) dt_1 dt_2$$

та її розв'язок

$$\tilde{u}_T = J_T^{-1}(\theta) \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) d_T^{-1}(\theta) \nabla g(t_1, t_2; \theta) dt_1 dt_2 = J_T^{-1}(\theta) \zeta_T, \tag{4.4}$$

причому існування $J_T^{-1}(\theta)$ при $T > T_0$ випливає з умови **R6**.

Коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$ має вигляд

$$\gamma_T = J_T^{-1}(\theta) \cdot \sigma_T^2(\theta) \cdot J_T^{-1}(\theta), \tag{4.5}$$

де $\sigma_T^2(\theta)$ — коваріаційна матриця вектора ζ_T. При $T \to \infty$

$$\gamma_T(\theta) = (2\pi)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda, \mu) \nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu_T(d\lambda, d\mu; \theta) \right)^{-1} \to$$
$$\to (2\pi)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu(d\lambda, d\mu; \theta) \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda, \mu) \nu(d\lambda, d\mu; \theta) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \nu(d\lambda, d\mu; \theta) \right)^{-1} = \gamma(\theta), \tag{4.6}$$

тобто вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично нормальним $N(0, \gamma(\theta))$.

Наступні міркування аналогічні міркуванням роботи [12]. Доведемо, що функція розподілу $F_T(y_1, y_2; \theta)$ випадкового вектора $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$ збігається при $T \to \infty$ до гауссівської функції розподілу $\Phi_{0,\gamma(\theta)}(y_1, y_2)$. Для цього покажемо, що для довільного $r > 0$

$$\triangle_T(r) = \mathsf{P}\{\|\hat{u}_T - \tilde{u}_T\| > r\} \to 0, \ T \to \infty. \tag{4.7}$$

Розглянемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T \in V^c(R - r)\}$, де R таке, що для $T > T_0$, завдяки асимптотичній нормальності $\tilde{u}_T$, виконується $\mathsf{P}\{\overline{A}_T\} \le \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ — фіксоване як завгодно мале число. Уведемо також подію

$$B_T = \left\{ \sup_{u \in V^c(R)} \left\| J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u)) \right\| \le r \right\}.$$

Із теореми 2 випливає, що для $T > T_0$

$$\mathsf{P}\{\overline{B}_T\} = \mathsf{P}\left\{ \sup_{u \in V^c(R)} \left\| J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u)) \right\| > r \right\} \le$$
$$\le \mathsf{P}\left\{ \lambda_{\max}\big(J_T^{-1}(\theta)\big) \cdot \sup_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(J_T(\theta))} \cdot \sup_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > r \right\} \le$$
$$\le \mathsf{P}\left\{ \sup_{u \in V^c(R)} \|\Psi_T(u) - L_T(u)\| > \lambda_* r \right\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Крім цього, розглянемо подію C_T, яка полягає в тому, що ОНК $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.8). За теоремою 3 для $T > T_0$ $\mathsf{P}\{\overline{C}_T\} \le \frac{\varepsilon}{3}$. Отримуємо, що для $T > T_0$

$$\mathsf{P}\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{4.8}$$

Маємо далі

$$J_T^{-1}(\theta) L_T(u) = J_T^{-1}(\theta) \left(\int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1, t_2) \cdot b_{iT}(\theta) dt_1 dt_2 \right)_{i=1}^q -$$
$$- J_T^{-1}(\theta) \left(\sum_{l=1}^q u_l \int_0^T \int_0^T b_{lT} \cdot b_{iT}(\theta) dt_1 dt_2 \right)_{i=1}^q = \tilde{u}_T - J_T^{-1}(\theta) \left(\sum_{l=1}^q u_l \cdot J_{il,T}(\theta) \right)_{i=1}^q =$$
$$= \tilde{u}_T - u.$$

Якщо подія $A_T \cap B_T \cap C_T$ відбулася, то для $u \in V^c(R)$

$$\begin{aligned}\left\|u + J_T^{-1}(\theta)\Psi_T(u)\right\| &= \left\|u + J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u)) + J_T^{-1}(\theta)L_T(u)\right\| = \\ &= \left\|u + \tilde{u}_T - u + J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u))\right\| \le \\ &\le \|\tilde{u}_T\| + \left\|J_T^{-1}(\theta)(\Psi_T(u) - L_T(u))\right\| \le R - r + r = R,\end{aligned}$$

тобто, $F_T(u) = u + J_T^{-1}(\theta)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ у $V^c(R)$.

Для доведення (4.7) використаємо теорему Брауера про нерухому точку.

Теорема Брауера. *Нехай F неперервне відображення $V^c(R)$ у себе. Тоді існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Застосуємо до $F_T(u)$ наведену теорему. Отримаємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, або, завдяки невиродженості $J_T^{-1}(\theta)$, $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Завдяки виконанню події C_T, єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u_T^0) = 0$ в кулі $V_T^c(R)$ є нормована ОНК $\hat{u}_T$.

Отже, $\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\}$ і $\mathsf{P}\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \ge 1 - \varepsilon$. Зауважимо, що з (4.8) випливає

$$\begin{aligned}1 - \varepsilon &\le \mathsf{P}\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\} = \\ &= \mathsf{P}\left\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \left\{\sup_{u \in V^c(R)} \left\|J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(u) - L_T(u))\right\| \le r\right\}\right\} \le \\ &\le \mathsf{P}\{\left\|J_T^{-1}(\theta) \cdot (\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))\right\| \le r\} = \mathsf{P}\{\left\|J_T^{-1}(\theta) \cdot L_T(\hat{u}_T)\right\| \le r\} = \\ &= \mathsf{P}\{\|\tilde{u}_T - \hat{u}_T\| \le r\}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Отже, (4.7) випливає з (4.9).

Завершення доведення теореми повністю збігається із [12]. □

Знайдемо компоненти $\nu_{jk}(d\lambda, d\mu; \theta^0)$ спектральної міри $\nu(d\lambda, d\mu; \theta^0)$ тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) зі співвідношень [10]

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty} d_{jT}^{-1} d_{kT}^{-1} \int_0^T \int_0^T g_j(t_1 + h_1, t_2 + h_2) g_k(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= G_{jk}(h_1, h_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda h_1 + \mu h_2)} \nu_{jk}(d\lambda, d\mu), \ j, k = \overline{1, 4N}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Матриця $G = (G_{jk})_{j,k=1}^{4N}$ є блочно-діагональною матрицею із блоками

$$G_k = \begin{bmatrix} a_k & -b_k & C_k & C_k \\ b_k & a_k & D_k & D_k \\ C_k' & D_k' & a_k & \frac{3}{4}a_k \\ C_k' & D_k' & \frac{3}{4}a_k & a_k \end{bmatrix}, \ k = \overline{1, N}, \tag{4.11}$$

де $$a_k = \cos(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2); \ b_k = \sin(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2);$$

$$C_k = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} \bigl(A_k \sin(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2) + B_k \cos(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2)\bigr);$$

$$D_k = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} \bigl(-A_k \cos(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2) + B_k \sin(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2)\bigr);$$

$$C_k' = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} \bigl(-A_k \sin(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2) + B_k \cos(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2)\bigr);$$

$$D_k' = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} \bigl(-A_k \cos(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2) - B_k \sin(\lambda_k h_1 + \mu_k h_2)\bigr).$$

Зі співвідношень (4.10) випливає, що шукана спектральна міра тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) є блочно-діагональною матрицею із блоками

$$\nu_k(d\lambda, d\mu; \theta^0) = \begin{bmatrix} \delta_k & i\rho_k & e_k & e_k \\ -i\rho_k & \delta_k & f_k & f_k \\ \overline{e_k} & \overline{f_k} & \delta_k & \frac{3}{4}\delta_k \\ \overline{e_k} & \overline{f_k} & \frac{3}{4}\delta_k & \delta_k \end{bmatrix}, \tag{4.12}$$

де

$$e_k = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} (B_k\delta_k - iA_k\rho_k),\ f_k = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} (-A_k\delta_k - iB_k\rho_k),$$

$$\overline{e_k} = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} (B_k\delta_k + iA_k\rho_k),\ \overline{f_k} = \left(\frac{3}{4(A_k^2 + B_k^2)}\right)^{1/2} (-A_k\delta_k + iB_k\rho_k),$$

$$\rho_k\big(\{\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0)\}\big) = \pm\frac{1}{2},\ \delta_k\big(\{\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0)\}\big) = \frac{1}{2},\ k = \overline{1, N}. \tag{4.13}$$

Лема 1. *За умов* **R1**, **R2**, **NS** *спектральна щільність* $\tilde{f}$ *поля* ε *є* ν*-припустимою, де* ν *— спектральна міра (4.12), (4.13) тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3).*

Доведення. Нехай

$$\tilde{f}^c(\|\lambda\|) = \tilde{f}(\|\lambda\|)\mathcal{X}\Big\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(\|\lambda\|) \le c\Big\} + c\mathcal{X}\Big\{\lambda \in \mathbb{R}^2 : \tilde{f}(\|\lambda\|) > c\Big\}$$

— зрізання функції f на рівні $c > 0$. Запишемо

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\right| \le \\ &\le \left|\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^c(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0)\right| + \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^c(\|\lambda\|)\nu_T^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^c(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\right| + \\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}^c(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0) - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0)\right| = \\ &= I_1^{kl}(T, c) + I_2^{kl}(T, c) + I_3^{kl}(T, c),\ k, l = \overline{1, 4N}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Подальші міркування аналогічні доведенню теореми 4.1 роботи [11], і тому ми не будемо їх проводити детально.

Перш за все, усі інтеграли $\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\|\lambda\|)\nu^{kl}(d\lambda; \theta^0),\ k, l = \overline{1, 4N}$, існують завдяки тому, що ν – атомна міра, і всі її атоми містяться в точках $\pm(\lambda_k^0, \mu_k^0),\ k = \overline{1, N}$, які відокремлені від початку координат. Зауважимо далі, що

$$\lim_{c\to\infty} I_3^{kl}(c) = 0,\ k, l = \overline{1, 4N}, \tag{4.15}$$

за теоремою Лебега про монотонну збіжність. З іншого боку, при фіксованому c

$$\lim_{T\to\infty} I_2^{kl}(T, c) = 0,\ k, l = \overline{1, 4N}, \tag{4.16}$$

за означенням слабкої збіжності.

Запишемо для $k, l = \overline{1, 4N}$

$$I_1^{kl}(T, c) \le \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\{\lambda\in\mathbb{R}^2 : f(\|\lambda\|) > c\}} \big(\tilde{f}(\|\lambda\|) - c\big) \frac{|g_T^k(\lambda; \theta^0)|}{d_{kT}(\theta^0)} \cdot \frac{|g_T^l(\lambda; \theta^0)|}{d_{lT}(\theta^0)} d\lambda.$$

Якщо рівень c — достатньо велике число, то за умови **NS** $\lambda \in \mathbb{R}^2$ такі, що $\tilde{f}(\|\lambda\|) > c$, потрапляють у настільки малий окіл нуля $V(c)$, що частоти (λ_i^0, μ_i^0), $i = \overline{1, N}$, потрапляють за межі цього околу, і тому для $\lambda \in V(c)$ прямими обчисленнями можна отримати оцінки такого вигляду: для $T > T_0$

$$d_{kT}^{-1}(\theta^0) \max_{\lambda \in V(c)} \left| g_T^k(\lambda; \theta^0) \right| \le h_k(c) T^{-1}, \ k = \overline{1, 4N}. \tag{4.17}$$

Доведемо нерівності (4.17). Стандартні обчислення показують, що при $T \to \infty$

$$g_T^{4k-3}(\lambda; \theta^0) = O(1), \qquad g_T^{4k-2}(\lambda; \theta^0) = O(1),$$
$$g_T^{4k-1}(\lambda; \theta^0) = O(T), \qquad g_T^{4k}(\lambda; \theta^0) = O(T), \ k = \overline{1, N}.$$

Отже, нерівності (4.17) виконуються і приводять до оцінок

$$I_1^{kl}(T, c) \le \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{V(c)} \big(\tilde{f}(\|\lambda\|) - c\big) d\lambda \right) h_k(c) h_l(c) T^{-2}, \ k, l = \overline{1, 4N}. \tag{4.18}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $T > T_0$ можна взяти таке $c_1 > 0$, що для $c > c_1$ $I_1^{kl}(T, c) < \varepsilon/3$, і таке $c_2 > 0$, що для $c > c_2$ $I_3^{kl}(c) < \varepsilon/3$. Фіксуючи далі $c > c_1 \vee c_2$, і знаходимо $T_1 = T_1(\varepsilon) > T_0$ таке, що для $T > T_1$ $I_2^{kl}(T, c) < \varepsilon/3$. Бачимо, що зі співвідношень (4.15), (4.16), (4.18), правильних для $k, l = \overline{1, 4N}$, випливає твердження леми. □

Застосуємо теорему 4 до тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3). Тоді ми можемо стверджувати, що нормована ОНК $\hat{u} = d_T(\theta)(\theta_T - \theta)$ параметрів тригонометричної функції регресії асимптотично нормальна з нульовим середнім та блочно-діагональною коваріаційною матрицею із блоками $\gamma_k(\theta) = (2\pi)^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0) J_k^{-1}(\theta^0)$, де матриці $J_k(\theta^0)$ задано (3.23).

Перейдемо від нормованої ОНК $\hat{u} = d_T(\theta)(\theta_T - \theta)$ до нормованої ОНК:

$$\begin{gathered}(T(A_{1T} - A_1^0),\ T(B_{1T} - B_1^0),\ T^2(\lambda_{1T} - \lambda_1^0),\ T^2(\mu_{1T} - \mu_1^0), \dots, \\ T(A_{NT} - A_N^0), T(B_{NT} - B_N^0), T^2(\lambda_{NT} - \lambda_N^0), T^2(\mu_{NT} - \mu_N^0))\end{gathered} \tag{4.19}$$

і введемо блочно-діагональну матрицю Q із блоками

$$Q_k = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{1}{6}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)} \end{bmatrix}, \ k = \overline{1, N}. \tag{4.20}$$

Тоді вектор (4.19) асимптотично нормальний $N(0, \Gamma(\theta^0))$, де $\Gamma(\theta^0)$ — блочно-діагональна матриця із блоками

$$\begin{gathered} (2\pi)^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0) \big[Q_k J_k(\theta^0) Q_k \big]^{-1} = \\ = 2\pi^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}B \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}A & -\frac{1}{2}A \\ \frac{1}{2}B & -\frac{1}{2}A & \frac{1}{3}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) & \frac{1}{4}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) \\ \frac{1}{2}B & -\frac{1}{2}A & \frac{1}{4}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) & \frac{1}{3}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2) \end{bmatrix}^{-1}, \\ k = \overline{1, N}. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Обертаючи ці матриці, сформулюємо остаточний результат про асимптотичну нормальність ОНК параметрів функції регресії (1.2), (1.3).

Теорема 5. *Якщо для тригонометричної функції регресії (1.2), (1.3) виконано умови* **R1**, **R2**, **N(ii)** *або* **N(i)** *та* **NS**, *то нормована ОНК* $(T(A_{1T} - A_1^0), T(B_{1T} - B_1^0), T^2(\lambda_{1T} - \lambda_1^0), T^2(\mu_{1T} - \mu_1^0), \dots, T(A_{NT} - A_N^0), T(B_{NT} - B_N^0), T^2(\lambda_{NT} - \lambda_N^0),$

$T^2(\mu_{NT} - \mu_N^0))$ *асимптотично нормальна з нульовим середнім та коваріаційною матрицею* $\Psi(\theta^0)$, *де* $\Psi(\theta^0)$ — *блочно-діагональна матриця із блоками*

$$\Psi_k(\theta^0) = \frac{8\pi^2 f(\lambda_k^0, \mu_k^0)}{(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2} \begin{bmatrix} (A_k^0)^2 + 7(B_k^0)^2 & -6A_k^0 B_k^0 & -6B_k^0 & -6B_k^0 \\ -6A_k^0 B_k^0 & 7(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 & 6A_k^0 & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 & 0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, k = \overline{1, N}.$$

Очевидно, коли виконано умови $\mathbf{N(i)}$ та **NS**, то в (4.21) та формулюванні теореми 5 $f(\lambda_k^0, \mu_k^0) = \tilde{f}(\sqrt{(\lambda_k^0)^2 + (\mu_k^0)^2})$, $k = \overline{1, N}$.

References

1. T. Alodat, A. Olenko, *Weak convergence of weighted additive functionals of long-range dependent fields*, Theor. Probability and Math. Statist., **97** (2017), 9–23.
2. V. Anh, N. Leonenko, A. Olenko, *On the rate of convergence to Rosenblatt-type distribution*, J. Math. Anal. Appl., **425** (2015), 111–132.
3. V. Anh, N. Leonenko, A. Olenko, V. Vaskovich, *On rate of convergence in non-central limit theorems: arXiv: 1703.05900*, Submitted to Bernoulli (in press).
4. Rabi N. Bhattacharya, R. Ranga Rao, *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*, Wiley, 1976.
5. D. R. Brillinger, *Regression for randomly sampled spatial series: the trigonometric case*, Journal of Applied Probability, **23** (1986), 275–289.
6. J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat, *A united texture model based on 2-D Wald type decomposition*, IEEE Transactions on Signal Processing, **17** (1993), no. 41, 2665–2678.
7. I. A. Ibragimov, Y. A. Rozanov, *Gaussian Random Processes*, Springer-Verlag, New York, 1978.
8. A. V. Ivanov, *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, Boston, London, 1997.
9. A. V. Ivanov, *Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations in models with long-range dependence*, Theor. Probability and Math. Statist., **80** (2010), 61–69.
10. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, Boston, London, 1989.
11. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, I. N. Savich, *Limit theorems for weighted non-linear transformations of Gaussian processes with singular spectra*, Ann. Probab., **41** (2013), no. 2, 1088–1114.
12. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, B. M. Zhurakovsky, *Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors*, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, **49** (2015), 156–186.
13. A. V. Ivanov, O. V. Maliar, *Consistency of the least squares estimator of the textured surface sinusoidal model parameters*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **97** (2017), 72–82.
14. P. S. Knopov, *Optimal Estimators of Stochastic System Parameters*, Naukova dumka, Kyiv, 1981.
15. D. Kundu, A. Mitra, *Asymptotic properties of the least squares estimates of 2-D exponential signals*, Multidimensional Systems and Signal Processing, **7** (1996), 135–150.
16. D. Kundu, S. Nandi, *Determination of discrete spectrum in a random field*, Statistica Neerlandica, **57** (2003), no. 2, 258–284.
17. P. Malliavan, *Estimation d'un signal Lorentzien*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique), (1994), 991–997.
18. P. Malliavan, *Sur la norte d'une matrice circulante Gaussienne*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique), (1994), 45–49.
19. S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava, *Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model*, Computational Statistics and Data Analysis, **58** (2013), 147–161.
20. J. Pfanzagl, *On the measurability and consistency of minimum contrast estimates*, Metrika, **14** (1969), 249–272.
21. C. R. Rao, L. C. Zhao, B. Zhou, *Maximum likelihood estimation of 2-D superimposed exponential*, IEEE Transactions on Signal Processing, **42** (1994), 795–802.
22. A. M. Walker, *On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals*, Adv. Appl. Probab., **5** (1973), 217–241.
23. J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

24. M. I. Yadrenko, *Spectral Theory of Random Fields*, Optimization Software, New York, 1983.
25. T. Yuan, T. Subba Rao, *Spectrum estimation for random fields with application to Markov modelling and texture classification*, Markov Random Fields, Theory and Applications (R. Chellappa, A. K. Jain, eds.), Academic Press, New York, 1993.
26. H. Zhang, V. Mandrekar, *Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes*, Journal of Time Series Analysis, **22** (2001), 613–629.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, Київ, Україна, 03057
Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, Київ, Україна, 03057
Адреса електронної пошти: malyar.ol95@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 19.01.2019

ASYMPTOTIC NORMALITY OF THE LEAST SQUARES ESTIMATOR OF TWO-DIMENSIONAL SINUSOIDAL OBSERVATION MODEL PARAMETERS

A. V. IVANOV, O. V. LYMAR

Abstract. In the paper the two-dimensional trigonometric observation model is considered. Various discrete modifications of such a sinusoidal model have received considerable attention in the literature on signal processing due to their application in the analysis of the textured surfaces. Under assumption that random noise is a homogeneous and isotropic Gaussian, in particular, strongly dependent random field on the plane, the asymptotic normality of the least squares estimator of this trigonometric regression model amplitudes and angular frequencies is proved.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНОЙ СИНУСОИДНОЙ МОДЕЛИ НАБЛЮДЕНИЙ

А. В. ИВАНОВ, А. В. ЛИМАРЬ

Аннотация. Рассмотрена двумерная тригонометрическая модель наблюдений, различные дискретные модификации которой получили существенное внимание в литературе по обработке сигналов, благодаря их применению в анализе текстурированных поверхностей. В предположении, что случайный шум является однородным и изотропным, в частности, сильно зависимым, случайным полем на плоскости, доказана асимптотическая нормальность оценки наименьших квадратов амплитуд и угловых частот этой тригонометрической модели регрессии.