Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 115–133

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 115–133

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ СПОСТЕРЕЖЕНЬ НА ПЛОЩИНІ

О. В. ІВАНОВ, О. В. ЛИМАР

Анотація. Розглянуто найпростішу синусоїдну модель симетричної текстурованої поверхні, яка спостерігається на фоні однорідного та ізотропного гауссівського, зокрема, сильно залежного, випадкового поля на площині. Доведено сильну консистентність та асимптотичну нормальність періодограмних оцінок амплітуди та кутових частот вказаної тригонометричної моделі регресії.

Ключові слова і фрази. Однорідне та ізотропне гауссівське випадкове поле, спектральна щільність, амплітуда, кутова частота, періодограмна оцінка, спектральна міра вектор-функції, консистентність, асимптотична нормальність.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 62J02; Secondary 62J99.

1. Вступ

Серед різноманітних проблем нелінійного регресійного аналізу визначне місце, завдяки своїм численним застосуванням, займає задача оцінювання амплітуд та кутових частот, взагалі кажучи, суми гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні випадкового шуму. Різноманітні тригонометричні моделі регресії широко представлені у літературі з обробки сигналів, а саме, в аналізі текстур при обробці так званих симетричних зображень відтінків сірого [1–4]. Ця проблема також досліджується у спектральному аналізі [5, 6].

У роботах [7, 8] розглянуто асимптотичні властивості оцінок найменших квадратів (ОНК) параметрів синусоїдних моделей двовимірних текстурованих поверхонь, що спостерігаються на фоні однорідного та ізотропного гауссівського випадкового поля на площині [9, 10].

У цій роботі отримано властивості консистентності та асимптотичної нормальності періодограмних оцінок параметрів одного гармонічного коливання на площині, що спостерігається на фоні вказаного випадкового поля.

Ці результати продовжують дослідження роботи [11], в якій розглянуто асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів гармонічного коливання, що спостерігається на фоні слабко залежного стаціонарного шуму, та роботи [12], де випадковий шум є локальним функціоналом від гауссівського стаціонарного процесу із сильною залежністю. Періодограмні оцінки у нелінійних моделях регресії із сильно залежним шумом розглядалися також у роботі [13].

Незважаючи на те, що умова сильної залежності випадкового шуму є однією з умов нашої роботи, все одно періодограмні оцінки виявляються асимптотично нормальними. Цей результат є наслідком того, що множина точок сингулярності спектра шуму Ξ_{noise} (у нас це початок координат) та множина атомів спектральної міри тригонометричної функції регресії Ξ_{regr} (у нас це ненульове істинне значення двох частот гармонічного коливання на площині) не перетинаються. У роботі [14] для суми звичайних гармонічних коливань, що спостерігаються на фоні стаціонарного шуму, спектральна щільність якого може мати декілька точок сингулярності, зокрема, і в нулі (випадок сильної залежності), цей ефект розглянуто з достатньою повнотою. Негауссівські граничні розподіли статистичних оцінок із нестандартними нормуваннями виникають, коли $\Xi_{noise} \cap \Xi_{regr} \neq \emptyset$.

2. Постановка задачі

Нехай спостерігається випадкове поле

$$X(t_1,t_2) = A_0 \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) + \varepsilon(t_1,t_2),\ (t_1,t_2) \in [0,T]^2, \tag{2.1}$$

де $A_0 > 0, \theta_0 = (\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M = (\underline{\lambda}, \overline{\lambda}) \times (\underline{\mu}, \overline{\mu})$, $0 < \underline{\lambda} < \overline{\lambda} < \infty$, $0 < \underline{\mu} < \overline{\mu} < \infty$, $\varepsilon = \{\varepsilon(t_1,t_2), (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ — задане на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ дійснозначне випадкове поле, для якого виконується така умова.

N. ε — майже напевно (м. н.) вибіркове неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім, коваріаційна функція якого $B(t_1,t_2) = \mathsf{E}\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(0,0)$, $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$, $B(0,0) = 1$, задовольняє одну з умов:

(i) поле ε є ізотропним та $B(t_1,t_2) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|)\|t\|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, де $L(\rho)$, $\rho > 0$, — монотонно неспадна повільно змінна на нескінченності функція, $t = (t_1,t_2)$, $\|t\| = (t_1^2 + t_2^2)^{1/2}$;

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |B(t_1,t_2)| dt_1 dt_2 < \infty$.

Позначимо A^C замикання множини A.

Означення 1. Періодограмною оцінкою частоти θ_0 будемо називати такий випадковий вектор $\theta_T \in \Lambda^C \times M^C$, для якого

$$Q_T(\theta_T) = \max_{\theta \in \Lambda^C \times M^C} Q_T(\theta),$$

$$Q_T(\theta) = \left|2T^{-2} \int_0^T \int_0^T X(t_1,t_2) e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} dt_1 dt_2\right|^2. \tag{2.2}$$

У той же час, оцінку амплітуди A_0 будемо шукати як значення $A_T = Q_T^{1/2}(\theta_T)$.

У цій статті при отриманні асимптотичних властивостей періодограмних оцінок використовується наведена нижче лема, яку було доведено у роботі [7].

Лема 1. *Якщо виконано умову* **N**, *то*

$$\xi(T) = \sup_{(\varphi_1,\varphi_2) \in \mathbb{R}^2} T^{-2} \left| \int_0^T \int_0^T e^{-i(\varphi_1 t_1 + \varphi_2 t_2)} \varepsilon(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \right| \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T \to \infty.$$

3. Консистентність періодограмних оцінок

Теорема 1. *Якщо модель (2.1) задовольняє умови* **N**, *то*

$$\theta_T \xrightarrow{\text{м. н.}} \theta_0,\ T \to \infty.$$

Доведення. Зафіксуємо θ та дослідимо поведінку при $T \to \infty$ величини

$$Q_T(\theta) = 4T^{-4} \left(A_0^2 \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 + \right.$$

$$+ \left| \int_0^T \int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 +$$

$$+ 2A_0 Re\left\{ \int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda t_1+\mu t_2)} dt_1 dt_2 \times \right.$$
$$\left.\left. \times \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) e^{-i(\lambda t_1+\mu t_2)} dt_1 dt_2 \right\}\right). \tag{3.1}$$

Оскільки $T^{-2}\left|\int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)e^{i(\lambda t_1+\mu t_2)}dt_1dt_2\right| \le 1$, то в силу леми 1, другий та третій доданки (3.1) прямують м. н. до 0 при $T\to\infty$. Далі

$$2T^{-2}\int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)e^{i(\lambda t_1+\mu t_2)}dt_1dt_2 =$$
$$= T^{-2}\int_0^T\int_0^T \left(e^{i(\lambda_0+\lambda)t_1}e^{i(\mu_0+\mu)t_2} + e^{i(\lambda-\lambda_0)t_1}e^{i(\mu-\mu_0)t_2}\right)dt_1dt_2 =$$
$$= \begin{cases} \frac{e^{i(\lambda_0+\lambda)T}-1}{i(\lambda_0+\lambda)T}\frac{e^{i(\mu_0+\mu)T}-1}{i(\mu_0+\mu)T} + \frac{e^{i(\lambda-\lambda_0)T}-1}{i(\lambda-\lambda_0)T}\frac{e^{i(\mu-\mu_0)T}-1}{i(\mu-\mu_0)T}, & \lambda\ne\lambda_0,\ \mu\ne\mu_0; \\ \frac{e^{i(\lambda_0+\lambda)T}-1}{i(\lambda_0+\lambda)T}\frac{e^{i2\mu_0T}-1}{i2\mu_0T} + \frac{e^{i(\lambda-\lambda_0)T}-1}{i(\lambda-\lambda_0)T}, & \lambda\ne\lambda_0,\ \mu=\mu_0; \\ \frac{e^{i2\lambda_0T}-1}{i2\lambda_0T}\frac{e^{i(\mu_0+\mu)T}-1}{i(\mu_0+\mu)T} + \frac{e^{i(\mu-\mu_0)T}-1}{i(\mu-\mu_0)T}, & \lambda=\lambda_0,\ \mu\ne\mu_0; \\ \frac{e^{i2\lambda_0T}-1}{i2\lambda_0T}\frac{e^{i2\mu_0T}-1}{i2\mu_0T} + 1, & \lambda=\lambda_0,\ \mu=\mu_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Використовуючи (3.1) та (3.2), маємо

$$Q_T(\theta_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} A_0^2,\ T\to\infty, \tag{3.3}$$

$$Q_T(\theta) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty, \tag{3.4}$$

рівномірно на будь-якій множині $\Theta_\delta = \left\{\theta\in\Lambda^C\times M^C:\ \|\theta-\theta_0\|\ge\delta\right\},\ \delta>0$.

Нехай ω належить множині елементарних подій $\Omega_1\subset\Omega,\ P(\Omega_1)=1$, для яких

$$\sup_{(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathbb{R}^2}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T e^{-i(\varphi_1t_1+\varphi_2t_2)}\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2\to 0,\ T\to\infty.$$

Припустимо, що для тієї ж ω $\theta_T\nrightarrow\theta_0$. Тоді існують $\delta>0$ і послідовність $\{T_n,\ n\ge\ 1\}$, $T_n\to\infty$, $n\to\infty$, такі, що $|\theta_{T_n}-\theta_0|\ge\delta$ та $Q_{T_n}(\theta_{T_n}) < Q_{T_n}(\theta_0)$ для всіх достатньо великих номерів n, що неможливо. □

Лема 2. *За умови* **N**

$$A_T^2 = Q_T(\theta_T) \xrightarrow{\text{м. н.}} A_0^2,\ T\to\infty. \tag{3.5}$$

Доведення. Запишемо, використовуючи (3.1),

$$0\le Q_T(\theta_T)-Q_T(\theta_0) =$$
$$= 4T^{-4}A_0^2\left|\int_0^T\int_0^T\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)e^{i(\lambda_Tt_1+\mu_Tt_2)}dt_1dt_2\right|^2 -$$
$$- 4T^{-4}A_0^2\left|\int_0^T\int_0^T\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)e^{i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\right|^2 + \eta_T, \tag{3.6}$$

$\eta_T \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty$.

Доцільно зауважити, що

$$\left|\int_0^T\int_0^T\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)e^{i(\lambda_Tt_1+\mu_Tt_2)}dt_1dt_2\right| \le$$
$$\le \max_{\theta\in\Lambda\times M}\left|\int_0^T\int_0^T\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)e^{i(\lambda t_1+\mu t_2)}dt_1dt_2\right| =$$

$$= \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda_T^* t_1 + \mu_T^* t_2)} dt_1 dt_2 \right|,$$

де $\theta_T^* = (\lambda_T^*, \mu_T^*) \in \Lambda^C \times M^C$ — невипадкова точка максимуму.

Із (3.2) випливає, що для усіх значень λ_T^* та μ_T^*

$$\begin{aligned} 2T^{-2} \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda_T^* t_1 + \mu_T^* t_2)} dt_1 dt_2 \right| \le \\ \le \left| \frac{\sin(\lambda_T^* - \lambda_0)T/2}{(\lambda_T^* - \lambda_0)T/2} \right| \left| \frac{\sin(\mu_T^* - \mu_0)T/2}{(\mu_T^* - \mu_0)T/2} \right| + \left| \frac{e^{i(\lambda_T^* + \lambda_0)T} - 1}{i(\lambda_T^* + \lambda_0)T} \right| \left| \frac{e^{i(\mu_T^* + \mu_0)T} - 1}{i(\mu_T^* + \mu_0)T} \right| \le \\ \le 1 + \left(\underline{\lambda} \underline{\mu} T^2 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\overline{\lim_{T \to \infty}} \max_{\theta \in \Lambda^C \times M^C} 4T^{-4} \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 \le 1. \tag{3.7}$$

З іншого боку,

$$\lim_{T \to \infty} 4T^{-4} \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 = 1. \tag{3.8}$$

Зі співвідношень (3.6)–(3.8) маємо

$$Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, \ T \to \infty,$$

а з (3.3) випливає, що $Q_T(\theta_T) \xrightarrow{\text{м. н.}} A_0^2, \ T \to \infty.$ □

Теорема 2. *За умови* **N**

$$T(\lambda_T - \lambda_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, \ T(\mu_T - \mu_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, \ T \to \infty.$$

Доведення. Із доведення леми 2 випливає, що

$$\begin{aligned} T^{-4} \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda_T t_1 + \mu_T t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 - \\ - T^{-4} \left| \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) e^{i(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)} dt_1 dt_2 \right|^2 \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, \ T \to \infty. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для виконання (3.9) необхідно і достатньо, щоб при $T \to \infty$ (див. (3.2))

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i(\lambda_T - \lambda_0)T} - 1}{i(\lambda_T - \lambda_0)T} \frac{e^{i(\mu_T - \mu_0)T} - 1}{i(\mu_T - \mu_0)T} + \frac{e^{i(\lambda_T + \lambda_0)T} - 1}{i(\lambda_T + \lambda_0)T} \frac{e^{i(\mu_T + \mu_0)T} - 1}{i(\mu_T + \mu_0)T} \right|^2 - \\ - \left| \frac{e^{i2\lambda_0 T} - 1}{i2\lambda_0 T} \frac{e^{i2\mu_0 T} - 1}{i2\mu_0 T} + 1 \right|^2 \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, \end{aligned}$$

або

$$\frac{\sin(\lambda_T - \lambda_0)T/2}{(\lambda_T - \lambda_0)T/2} \cdot \frac{\sin(\mu_T - \mu_0)T/2}{(\mu_T - \mu_0)T/2} \xrightarrow{\text{м. н.}} 1, \ T \to \infty.$$

Це можливо тоді і тільки тоді, коли $T(\lambda_T - \lambda_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, T(\mu_T - \mu_0) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0, T \to \infty.$ □

4. Асимптотична нормальність періодограмних оцінок

Визначимо спектральну міру [8, 10] вектор-функції

$$a(t_1,t_2) = (a_1(t_1,t_2),\ a_2(t_1,t_2),\ a_3(t_1,t_2)) = \\ = (\sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2),\ t_1 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2),\ t_2 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)). \tag{4.1}$$

Для цього введемо сім'ю матричних мір $\nu_T(d\lambda, d\mu)$ на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$, де $\mathcal{B}^2$ — σ-алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^2$, із матричними щільностями $\left(\nu_T^{jl}(\lambda,\mu)\right)_{i,j=1}^3$,

$$\nu_T^{jl}(\lambda,\mu) = a_T^j(\lambda,\mu) a_T^l(\lambda,\mu) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|a_T^j(\lambda,\mu)\right|^2 d\lambda d\mu \int_{\mathbb{R}^2} \left|a_T^j(\lambda,\mu)\right|^l d\lambda d\mu \right)^{-1/2},$$

$$a_T^j(\lambda,\mu) = \int_0^T \int_0^T e^{i(\lambda t_1 + \mu t_2)} a_j(t_1,t_2) dt_1 dt_2,\ j,l = \overline{1,3}.$$

Означення 2 [15, 16]. Якщо $\nu_T \Rightarrow \nu$, $T \to \infty$, то міра ν називається спектральною мірою вектор-функції $a(t_1,t_2)$, $t_1, t_2 \ge 0$.

Компоненти матричної спектральної міри $\nu(d\lambda, d\mu) = \left(\nu_{jl}(d\lambda, d\mu)\right)_{j,l=1}^3$ знайдемо зі співвідношень

$$\lim_{T\to\infty} d_{iT}^{-1} d_{jT}^{-1} \int_0^T \int_0^T a_i(t_1+h_1, t_2+h_2) a_j(t_1,t_2) dt_1 dt_2 = \\ = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda h_1 + \mu h_2)} \nu_{ij}(d\lambda, d\mu),\ i,j = 1,2,3,$$

де $d_{iT}^2 = \int_0^T \int_0^T a_i^2(t_1,t_2) dt_1 dt_2$, $i = 1,2,3$. Провівши обчислення, отримуємо

$$\begin{pmatrix} \delta & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \delta & \frac{3}{4}\delta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \frac{3}{4}\delta & \delta \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

де δ — міра, зосереджена у точках $\pm(\lambda_0, \mu_0)$, $\delta(\{\pm(\lambda_0,\mu_0)\}) = \frac{1}{2}$.

Таким чином, для будь-якої неперервної обмеженої функції $b(\lambda,\mu)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} b(\lambda,\mu) \nu_T(d\lambda, d\mu) \to \int_{\mathbb{R}^2} b(\lambda,\mu) \nu(d\lambda, d\mu),\ T \to \infty. \tag{4.3}$$

За умови **N(ii)** спектральна щільність $f(\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, випадкового поля ε існує та є неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}^2$, і для неї виконано (4.3). Умови **N(i)**, взагалі кажучи, не вистачає для існування спектральної щільності поля ε, для якої справедлива збіжність (4.3), і тому для наших цілей потрібна додаткова умова (див. роботи [8, 17–19]).

S. Випадкове поле $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, має спектральну щільність

$$f(\lambda) = \tilde{f}(\|\lambda\|) = c(\alpha) \|\lambda\|^{\alpha-2} L_S\left(\|\lambda\|^{-1}\right), \tag{4.4}$$

де $c(\alpha) = \Gamma(\frac{2-\alpha}{2}) / 2^\alpha \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2})$, $\alpha \in (0,1)$ і збігається з α з умови **N(i)**, $L_S(\rho), \rho > 0$, — неперервна повільно змінна на нескінченності функція.

Зауваження 1. У випадку коли функція $\tilde{f}$ спадає у деякому околі нуля, умова **S** випливає з умови **N(i)**: див. теорему 4 у [19].

Зв'язок функції L з умови **N(i)** та L_S з умови **S** розглянуто у цитованих вище роботах. Крім цього, для коректності подальших формулювань нам потрібна умова додатності спектральної щільності f.

$\mathbf{S}^+$. $f(\lambda) > 0,\ \lambda \in \Lambda \times M$.

Означення 3 [16]. Спектральна щільність f поля ε називається ν-припустимою, якщо вона інтегровна за мірою ν та для функції $b = f$ виконано (4.3).

Із леми 1 роботи [8] випливає, що для спектральної міри ν, а також для всіх інших спектральних мір, що виникають у нашій роботі, спектральна щільність f поля ε є припустимою за введених вище умов.

Враховуючи вигляд міри ν, маємо (див. [8]), що вектор

$$\Big(d_{1T}^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad d_{2T}^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad d_{3T}^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\Big)'$$

є асимптотично нормальним при $T\to\infty$ з нульовим середнім та коваріаційною матрицею

$$K_1 = (2\pi)^2 f(\lambda_0,\mu_0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

Із цього факту отримємо, що вектор

$$\Big(T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\Big)' \tag{4.5}$$

є асимптотично нормальним $N(0,K_2)$,

$$K_2 = (2\pi)^2 f(\lambda_0,\mu_0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Аналогічно отримуємо асимптотичну нормальність вектора

$$\Big(T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\quad T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\Big)' \tag{4.7}$$

із такою ж коваріаційною матрицею K_2.

Нехай $\mathbb{I}_2$ — одинична матриця другого порядку.

Лема 3. *Якщо виконуються умови* $\mathbf{N}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^+$, *то вектор* $\nabla Q_T(\theta_0)$ *асимптотично нормальний* $N(0,K_3)$ *при* $T\to\infty$, *де*

$$K_3 = \frac{2}{3}(2\pi)^2 A_0^2 f(\lambda_0,\mu_0)\mathbb{I}_2.$$

Доведення. Перепишемо функціонал $Q_T(\theta)$ таким чином:

$$Q_T(\theta) = 4T^{-4}\left(\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\lambda t_1+\mu t_2)dt_1dt_2\right)^2 + \\ + 4T^{-4}\left(\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\lambda t_1+\mu t_2)dt_1dt_2\right)^2.$$

Тоді частинна похідна за λ має вигляд

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{8} S_i =$$
$$= -4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0t_1\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0t_1\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0t_1\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0t_1\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2.$$

Очевидно, $S_1,\ S_5 \to 0,\ T\to\infty$. Беручи до уваги лему 1, $S_3 \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty$. А врахувавши асимптотичну нормальність величин

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2,\ T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2,$$

що випливає з асимптотичної нормальності векторів (4.5), (4.7), отримуємо збіжність до 0 за ймовірністю доданків $S_4,\ S_6,\ S_8$. Отже,

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\lambda} = S_2 + S_7 + \eta_T^{(1)},\ \eta_T^{(1)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\lambda} = 2A_0T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 4A_0T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 + \eta_T^{(2)} = 2A_0(b_{1T}-2b_{2T}) + \eta_T^{(2)},$$

$\eta_T^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty.$

Розглянемо тепер частинну похідну за μ. Аналогічно

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\mu} = \sum_{i=1}^{8} J_i =$$

$$= -4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\cos^2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0 t_2\sin 2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\cos^2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0 t_2\sin 2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\sin 2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0 t_2\cos^2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 4T^{-4}\int_0^T\int_0^T A_0\sin 2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T A_0 t_2\cos^2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ 8T^{-4}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2.$$

Очевидно, $J_1,\ J_5 \to 0,\ T\to\infty$. За лемою 1 $J_3 \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty$. Завдяки асимптотичній нормальності величин

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,\ T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2,$$

що, як і вище, випливає з асимптотичної нормальності векторів (4.5), (4.7), отримуємо збіжність до 0 за ймовірністю доданків $J_4,\ J_6,\ J_8$. Отже,

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\mu} = J_2 + J_7 + \eta_T^{(3)},\ \eta_T^{(3)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty,$$

і, таким чином,

$$\frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial\mu} = 2A_0T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 -$$
$$- 4A_0T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2 + \eta_T^{(4)} = 2A_0(c_{1T}-2c_{2T}) + \eta_T^{(4)},$$

$\eta_T^{(4)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Зауважимо, що $b_{1T}=c_{1T}$.

Використовуючи асимптотичну нормальність вектора (4.5), знайдемо коваріаційну матрицю вектора $2A_0(b_{1T}-2b_{2T},\ b_{1T}-2c_{2T})$. Нехай $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, $b_T = (b_{1T},b_{2T},c_{2T})$. Для будь-яких $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$

$$\mathsf{E}\, e^{i\langle\lambda,b_T\rangle} \to \exp\{-\frac{1}{2}\langle K_2\lambda,\lambda\rangle\},$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток у відповідному евклідовому просторі. Візьмемо $\lambda = (\tau_1+\tau_2,-2\tau_1,-2\tau_2)$. Маємо $\langle K_2\lambda,\lambda\rangle = \frac{1}{6}(\tau_1^2+\tau_2^2)$, тобто випадковий вектор $2A_0(b_{1T}-2b_{2T},\ b_{1T}-2c_{2T})$ асимптотично нормальний $N(0,K_3)$. Отже, вектор $\nabla Q_T(\theta_0)$ також асимптотично нормальний $N(0,K_3)$ при $T\to\infty$. □

Позначимо $H(Q_T(\theta))$ матрицю Гессе функціонала $Q_T(\theta)$.

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми 3, то для будь-якого випадкового вектора $\tilde\theta_T$, для якого $\|\tilde\theta_T-\theta_0\| \le \|\theta_T-\theta_0\|$ м. н. для всіх $T>0$,*

$$T^{-2}H(Q_T(\tilde\theta_T)) \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{A_0^2}{6}\mathbb{I}_2,\ T\to\infty. \tag{4.8}$$

Доведення. Використовуючи позначення $\tilde{\theta}_T = \tilde{\theta} = (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$, маємо

$$T^{-2}\frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\lambda^2} = 8\Big(T^{-3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1dt_1dt_2\Big)^2 -$$
$$- 8T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times$$
$$\times T^{-4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1^2dt_1dt_2 +$$
$$+ 8\Big(T^{-3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1dt_1dt_2\Big)^2 -$$
$$- 8T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times$$
$$\times T^{-4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1^2dt_1dt_2 =$$
$$= \sum_{i=1}^4 Q_i.$$

Розглянемо $Q_1 = 8\big(Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)}\big)^2$,

$$Q_1^{(1)} = A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\big(\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2) - \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ \frac{1}{2}A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = Q_1^{(11)} + Q_1^{(12)},$$

$$|Q_1^{(11)}| \le A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1(t_1|\tilde{\lambda}-\lambda_0| + t_2|\tilde{\mu}-\mu_0|)dt_1dt_2 =$$
$$= A_0T^{-3}\Big(\frac{T^4}{3}|\tilde{\lambda}-\lambda_0| + \frac{T^4}{4}|\tilde{\mu}-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty,$$

за теоремою 2. Бачимо також, що $Q_1^{(12)} = O(T^{-2})$, тобто $Q_1^{(1)} \xrightarrow{\text{м. н.}} 0$ при $T\to\infty$.

Запишемо тепер

$$Q_1^{(2)} = T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\big(\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2) - \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\varepsilon(t_1+t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = Q_1^{(21)} + Q_1^{(22)}.$$

Розглянемо

$$\mathsf{E}\,\big(Q_1^{(22)}\big)^2 = T^{-6}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T t_1s_1\sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\sin(\lambda_0s_1+\mu_0s_2)\times$$
$$\times\,\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(s_1,s_2)dt_1dt_2ds_1ds_2 \le$$
$$\le T^{-4}\int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |\mathsf{E}\,\varepsilon(t_1,t_2)\varepsilon(s_1,s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2 =$$
$$= \begin{cases} O(B(T)),\ T\to\infty, \text{при виконанні } \mathbf{N(i)},\\ O(T^{-2}),\ T\to\infty, \text{при виконанні } \mathbf{N(ii)},\end{cases}$$

як показано у роботі [8]. Крім цього,

$$|Q_1^{(21)}| \le T^{-3} \int_0^T\int_0^T t_1(t_1|\tilde{\lambda} - \lambda_0| + t_2|\tilde{\mu} - \mu_0|)|\varepsilon(t_1, t_2)|dt_1dt_2 \le$$
$$\le T^{-2} \int_0^T\int_0^T |\varepsilon(t_1, t_2)|dt_1dt_2\big(T|\tilde{\lambda} - \lambda_0| + T|\tilde{\mu} - \mu_0|\big).$$

Використовуючи розклад функції $|x|$ за поліномами Чебишова–Ерміта $H_k(x)$ у просторі $L_2(\mathbb{R}, \phi(x)dx)$, $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{k!} H_k(x),\ d_k = \int_{\mathbb{R}} |x|H_k(x)\phi(x)dx,\ k \ge 0,$$

отримуємо

$$\mathsf{E}\,|\varepsilon(t_1, t_2)\varepsilon(s_1, s_2)| - \big(\mathsf{E}\,|\varepsilon(0, 0)|\big)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k^2}{k!} B^k(t_1 - s_1, t_2 - s_2) - \big(\mathsf{E}\,|\varepsilon(0, 0)|\big)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^2}{k!} B^k(t_1 - s_1, t_2 - s_2) \le |B(t_1 - s_1, t_2 - s_2)| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^2}{k!}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k^2}{k!} = \mathsf{E}\,\xi^2(0, 0) - \big(\mathsf{E}\,|\xi(0, 0)|\big)^2 = \mathbb{D}|\xi(0, 0)| < \infty,$$

то

$$\mathsf{E}\,|\varepsilon(t_1, t_2)\varepsilon(s_1, s_2)| - \big(\mathsf{E}\,|\varepsilon(0, 0)|\big)^2 \le \mathbb{D}|\varepsilon(0, 0)| \cdot |B(t_1 - s_1, t_2 - s_2)|,$$

$$\mathsf{E}\left(T^{-2} \int_0^T\int_0^T |\varepsilon(t_1, t_2)| - \mathsf{E}\,|\varepsilon(0, 0)|dt_1dt_2\right)^2 \le$$
$$\le \mathbb{D}|\varepsilon(0, 0)|T^{-4} \int_0^T\int_0^T\int_0^T\int_0^T |B(t_1 - s_1, t_2 - s_2)|dt_1dt_2ds_1ds_2 \to 0,\ T \to \infty,$$

як доведено у роботі [8], тобто

$$T^{-2} \int_0^T\int_0^T |\varepsilon(t_1, t_2)|dt_1dt_2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathsf{E}\,|\varepsilon(0, 0)|,\ T \to \infty,$$

і $Q_1^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $T \to \infty$. Таким чином, ми довели, що $Q_1 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $T \to \infty$.

Розглянемо далі $Q_2 = -8Q_{21}Q_{22}$,

$$Q_{21} = A_0T^{-2} \int_0^T\int_0^T \cos(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\cos(\lambda_0t_1 + \mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-2} \int_0^T\int_0^T \cos(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1 + t_2)dt_1dt_2 = Q_{21}^{(1)} + Q_{21}^{(2)}.$$

Легко порахувати, що $Q_{21}^{(1)} = \frac{A_0}{2}$, $T \to \infty$, а за лемою 1 $Q_{21}^{(2)} \xrightarrow{\text{м. н.}} 0$, $T \to \infty$.

Аналогічно

$$Q_{22} = A_0T^{-4} \int_0^T\int_0^T t_1^2\cos(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\cos(\lambda_0t_1 + \mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-4} \int_0^T\int_0^T t_1^2\cos(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1 + t_2)dt_1dt_2 = Q_{22}^{(1)} + Q_{22}^{(2)},$$

$$Q_{22}^{(1)} = A_0T^{-4} \int_0^T\int_0^T t_1^2\big(\cos(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2) - \cos(\lambda_0t_1 + \mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1 + \mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1^2\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = Q_{22}^{(11)} + Q_{22}^{(12)},$$

де

$$|Q_{22}^{(11)}| \le A_0T^{-4}\Big(\frac{T^5}{4}|\tilde\lambda-\lambda_0| + \frac{T^5}{6}|\tilde\mu-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty.$$

Очевидно також, що $Q_{22}^{(12)} = \frac{A_0}{6} + O(T^{-1})$. Оцінка величини $Q_{22}^{(2)}$ аналогічна оцінці $Q_1^{(2)}$, і, таким чином, $Q_{22}^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Ми довели, що $Q_2 \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{2A_0^2}{3},\ T\to\infty$.

Подальші міркування аналогічні попереднім. Розглянемо величину

$$Q_3 = 8\big(Q_3^{(1)} + Q_3^{(2)}\big)^2,$$

$$Q_3^{(1)} = A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\big(\cos(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2) - \cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = Q_3^{(11)} + Q_3^{(12)}.$$

Оцінка $Q_3^{(11)}$ збігається з оцінкою $Q_1^{(11)}$, тому $Q_3^{(11)} \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty$. Бачимо також, що $Q_3^{(12)} = \frac{A_0}{4} + O(T)$. Величина $Q_3^{(2)} = T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\cos(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2)\varepsilon(t_1+t_2)dt_1dt_2$ оцінюється аналогічно $Q_1^{(2)}$, тому $Q_3^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Таким чином, $Q_3 \to \frac{A_0^2}{2},\ T\to\ \infty$.

Нарешті, $Q_4 = -8Q_{41}Q_{42}$. У свою чергу, $Q_{41} = Q_{41}^{(1)} + Q_{41}^{(2)}$,

$$Q_{41}^{(1)} = A_0T^{-2}\int_0^T\int_0^T\big(\sin(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2) - \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ \frac{A_0}{2}T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = Q_{41}^{(11)} + Q_{41}^{(12)},$$

$$|Q_{41}^{(11)}| \le \frac{A_0}{2}\big(T|\tilde\lambda-\lambda_0| + T|\tilde\mu-\mu_0|\big) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty,\quad Q_{41}^{(12)} \to 0,\ T\to\infty.$$

$$Q_{41}^{(2)} = T^{-2}\int_0^T\int_0^T\big(\sin(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2) - \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\varepsilon(t_1+t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\varepsilon(t_1+t_2)dt_1dt_2 \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty.$$

З іншого боку,

$$Q_{42} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1^2\sin(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1^2\sin(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2)\varepsilon(t_1+t_2)dt_1dt_2 = Q_{42}^{(1)} + Q_{42}^{(2)},$$

$$Q_{42}^{(1)} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1^2\big(\sin(\tilde\lambda t_1+\tilde\mu t_2) - \sin(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ \frac{A_0}{2}T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1^2\sin 2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = Q_{42}^{(11)} + Q_{42}^{(12)},$$

де

$$|Q_{42}^{(11)}| \le A_0T^{-4}\Big(\frac{T^5}{4}|\tilde\lambda-\lambda_0| + \frac{T^5}{6}|\tilde\mu-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\text{м. н.}} 0,\ T\to\infty,\quad Q_{42}^{(12)} = O(T^{-1}),$$

а оцінка $Q_{42}^{(2)}$ аналогічна оцінці $Q_1^{(22)}$. Ми довели, що $Q_4 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Отже,

$$T^{-2}\frac{\partial^2 Q_T(\tilde\theta)}{\partial\lambda^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{1}{6}A_0^2,\ T\to\infty.$$

Для величини

$$
\begin{aligned}
T^{-2}\frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\mu^2} &= 8\left(T^{-3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2dt_1dt_2\right)^2 - \\
&- 8T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times \\
&\times T^{-4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2^2dt_1dt_2 + \\
&+ 8\left(T^{-3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2dt_1dt_2\right)^2 - \\
&- 8T^{-2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times \\
&\times T^{-4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2^2dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

залишаються справедливими ті ж міркування, що і для $T^{-2}\frac{\partial Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\lambda^2}$. Тому

$$T^{-2}\frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\mu^2} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{1}{6}A_0^2,\ T\to\infty.$$

Залишилося розглянути

$$
\begin{aligned}
T^{-2}\frac{\partial Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\lambda\partial\mu} &= \frac{8}{T^3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2dt_1dt_2 \times \\
&\times \frac{1}{T^3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1dt_1dt_2 - \\
&- \frac{8}{T^2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times \\
&\times \frac{1}{T^4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1t_2dt_1dt_2 + \\
&+ \frac{8}{T^3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2dt_1dt_2 \times \\
&\times \frac{1}{T^3}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1dt_1dt_2 - \\
&- \frac{8}{T^2}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 \times \\
&\times \frac{1}{T^4}\int_0^T\int_0^T X(t_1,t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_1t_2dt_1dt_2 = \\
&= \sum_{i=1}^4 G_i.
\end{aligned}
$$

Запишемо $G_1 = 8G_{11}G_{12}$. Доведення збіжності величини G_{12} збігається з доведенням для Q_1 ($Q_1 = 8G_{12}^2$), а оцінка G_{11} аналогічна Q_1 (t_1 замінюється на t_2), тому $G_1 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$.

Маємо далі $G_2 = -8G_{21}G_{22}$. Оскільки $G_{21} = Q_{21}$, то $G_{21} = \frac{A_0^2}{2},\ T\to\infty$. Розглянемо тепер

$$G_{22} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{22}^{(1)}+G_{22}^{(2)},$$

$$G_{22}^{(1)} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\big(\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)-\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos^2(\lambda t_1+\mu t_2)dt_1dt_2 = G_{22}^{(11)}+G_{22}^{(12)},$$

де

$$|G_{22}^{(11)}| \le \frac{A_0}{9}\Big(T|\tilde{\lambda}-\lambda_0|+T|\tilde{\mu}-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T\to\infty,$$

за теоремою 2. Неважко порахувати, що $G_{22}^{(12)} = \frac{A_0}{8} + O(T^{-1})$. Міркування щодо оцінювання величини $G_{22}^{(2)}$ є аналогічними $Q_1^{(2)}$, і $G_{22}^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\ \infty$. Таким чином, $G_2 = -\frac{A_0^2}{2},\ T\to\infty$.

Оцінимо $G_3 = 8G_{31}G_{32}$.

$$G_{31} = A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)t_2dt_1dt_2 +$$

$$+ T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_2\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{31}^{(1)}+G_{31}^{(2)},$$

$$G_{31}^{(1)} = A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_2\big(\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)-\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_2\cos^2(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 = G_{31}^{(11)}+G_{31}^{(12)},$$

де

$$|G_{31}^{(11)}| \le A_0\Big(\frac{T}{4}|\tilde{\lambda}-\lambda_0|+\frac{T}{3}|\tilde{\mu}-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T\to\infty,$$

за теоремою 2, а $G_{31}^{(12)} = \frac{A_0}{4},\ T\to\infty$.

У свою чергу,

$$G_{31}^{(2)} = T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_2\big(\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)-\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\big)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 +$$

$$+ T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_2\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{31}^{(21)}+G_{31}^{(22)},$$

$$|G_{31}^{(21)}| \le \Big(T^{-2}\int_0^T\int_0^T|\varepsilon(t_1,t_2)|dt_1dt_2\Big)\Big(T|\tilde{\lambda}-\lambda_0|+T|\tilde{\mu}-\mu_0|\Big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty,$$

а оцінка $G_{31}^{(22)}$ аналогічна $Q_1^{(22)}$, і $G_{31}^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Отже, $G_{31} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{A_0}{4},\ T\to\infty$.

Розглянемо тепер $G_{32} = G_{32}^{(1)}+G_{32}^{(2)}$,

$$G_{32}^{(1)} = A_0T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)dt_1dt_2 \to \frac{A_0}{4},\ T\to\infty,$$

аналогічно $G_{31}^{(11)}$. Величина

$$G_{32}^{(2)} = T^{-3}\int_0^T\int_0^T t_1\cos(\tilde{\lambda}t_1+\tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

оцінюється так само, як і $G_{31}^{(2)}$, тобто $G_{32}^{(2)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty$. Отже, $G_{32} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{A_0}{4},\ T\to\infty$. Таким чином, $G_3 \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{A_0^2}{2},\ T\to\infty$.

Залишилося розглянути $G_4 = -8G_{41}G_{42}$. Отримуємо

$$G_{41} = A_0T^{-2}\int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{41}^{(1)} + G_{41}^{(2)},$$

$G_{41}^{(2)} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T \to \infty$, за лемою 1. Оцінимо

$$G_{41}^{(1)} = A_0T^{-2}\int_0^T\int_0^T \big(\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2) - \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\big)\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ A^0T^{-2}\int_0^T\int_0^T \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)dt_1dt_2 = G_{41}^{(11)} + G_{41}^{(12)}.$$

Обчислення показують, що $G_{41}^{(11)} \to 0,\ T \to \infty$, а

$$|G_{41}^{(12)}| \le \frac{A_0}{2}\big(T|\tilde{\lambda} - \lambda_0| + T|\tilde{\mu} - \mu_0|\big) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T \to \infty,$$

за теоремою 2. Тобто, $G_{41} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T \to \infty$.

Розглянемо

$$G_{42} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{42}^{(1)} + G_{42}^{(2)},$$
$$G_{42}^{(1)} = A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\big(\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2) - \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\big)dt_1dt_2 +$$
$$+ A_0T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)dt_1dt_2 = G_{42}^{(11)} + G_{42}^{(12)},$$
$$|G_{42}^{(11)}| \le \frac{A_0}{6}\big(T|\tilde{\lambda} - \lambda_0| + T|\tilde{\mu} - \mu_0|\big) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T \to \infty,$$

за теоремою 2, а прості обчислення показують, що $G_{42}^{(12)} \to 0,\ T \to \infty$.

$$G_{42}^{(2)} = T^{-4}\int_0^T\int_0^T t_1t_2\big(\sin(\tilde{\lambda}t_1 + \tilde{\mu}t_2) - \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\big)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 +$$
$$+ T^{-4}\int_0^T\int_0^T \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\varepsilon(t_1,t_2)dt_1dt_2 = G_{42}^{(21)} + G_{42}^{(22)},$$

$G_{42}^{(21)}$ оцінюється аналогічно $Q_1^{(22)}$, тому $G_{42}^{(21)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T \to \infty$, а $G_{42}^{(22)} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0,\ T \to \infty$, за лемою 1. Тобто $G_{42} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T \to \infty$, і, таким чином, $G_4 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T \to \infty$.

Остаточно,

$$T^{-2}H(Q_T(\tilde{\theta})) = T^{-2}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\lambda\partial\mu} \\ \frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\mu\partial\lambda} & \frac{\partial^2 Q_T(\tilde{\theta})}{\partial\mu^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{A_0^2}{6}\mathbb{I}_2, T \to \infty. \qquad \square$$

Теорема 3. *За умов* **N**, **S**, **S**$^+$, *при* $T \to \infty$, *вектор* $T^2(\theta_T - \theta) = \big(T^2(\lambda_T - \lambda_0), T^2(\mu_T - \mu_0)\big)'$ *асимптотично нормальний* $N(0, K_4)$, *де*

$$K_4 = 24(2\pi)^2 A_0^{-2}\mathbb{I}_2. \tag{4.9}$$

Доведення. Оскільки $\nabla Q_T(\theta_T) = 0$, то

$$\nabla Q_T(\theta_0) + \big(T^{-2}H_T(\tilde{\theta})\big)T^2(\theta_T - \theta_0) = 0,$$

де в матриці $H_T(\tilde{\theta})$ в 1-му та 2-му рядках стоять, взагалі кажучи, різні вектори $\tilde{\theta}$ із властивістю $\|\tilde{\theta}-\theta_0\| \le \|\theta_T-\theta_0\|$.

За лемою 4, яку можна застосовувати, незважаючи на те, що $\tilde{\theta}$ різні в різних рядках матриці $H(Q_T(\tilde{\theta}))$, $T^{-2}H(Q_T(\tilde{\theta})) \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{A_0^2}{6}\mathbb{I}_2, T\to\infty$. За лемою 3 вектор $\nabla Q_T(\theta_0)$ асимптотично нормальний $N(0,K_3)$. Із цих двох фактів і випливає твердження теореми 3. □

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* **N**, **S**, $\mathbf{S}^+$, *то величина* $T(A_T-A_0)$ *асимптотично нормальна з нульовим середнім та дисперсією* $2(2\pi)f(\lambda_0,\mu_0)$.

Доведення. Запишемо

$$T(A_T-A_0)=T\big[Q_T^{1/2}(\theta_T)-A_0\big]=T\big[Q_T(\theta_T)-A_0^2\big]\big[Q_T^{1/2}(\theta_T)+A_0\big]^{-1}.$$

За лемою 2

$$Q_T^{1/2}(\theta_T)+A_0 \xrightarrow{\text{м. н.}} 2A_0,\ T\to\infty. \tag{4.10}$$

За формулою Тейлора

$$T(Q_T(\theta_T)-Q_T(\theta_0))=\langle\nabla Q_T(\theta_0),T(\theta_T-\theta_0)\rangle+ \\ +\frac{1}{2}\langle\big(T^{-2}H(Q(\tilde{\theta}))\big)T(\theta_T-\theta_0),T^2(\theta_T-\theta_0)\rangle,$$

де $\|\tilde{\theta}-\theta_0\|\le\|\theta_T-\theta_0\|$ м.н. Величина

$$\langle\nabla Q_T(\theta_0),T(\theta_T-\theta_0)\rangle \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty, \tag{4.11}$$

відповідно до теореми 2 та леми 3.

З іншого боку,

$$\langle\big(T^{-2}H(Q(\tilde{\theta}))\big)T(\tilde{\theta}-\theta_0),T^2(\tilde{\theta}_T-\theta_0)\rangle \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ T\to\infty, \tag{4.12}$$

за лемою 4 та теоремами 2 і 3.

Співвідношення (4.10)–(4.12) дозволяють стверджувати, що асимптотичний розподіл $T(A_T-A_0)$ збігається з асимптотичним розподілом величини $\frac{T}{2A_0}\big[Q_T(\theta_0)-A_0^2\big]$.

Із формул (3.1) і (3.2) бачимо, що $T\big(Q_T(\theta_0)-A_0^2\big)$ має таку ж поведінку на нескінченності, як

$$Z_T(\theta_0)=4T^{-3}\left|\int_0^T\!\!\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)e^{i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\right|^2+ \\ +8A_0T^{-3}Re\left\{\int_0^T\!\!\int_0^T\cos(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)e^{i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\times\right. \\ \left.\times\int_0^T\!\!\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)e^{-i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\right\}.$$

Запишемо

$$T^{-3}\left|\int_0^T\!\!\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)e^{i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\right|^2=T^{-1}\int_0^T\!\!\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)e^{i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\times \\ \times T^{-2}\int_0^T\!\!\int_0^T\varepsilon(t_1,t_2)e^{-i(\lambda_0t_1+\mu_0t_2)}dt_1dt_2\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\ T\to\infty,$$

оскільки перший інтеграл асимптотично нормальний, а другий м. н. прямує до 0 за лемою 1.

Отже, залишається розглянути вираз

$$T^{-3}Re\left\{\int_0^T\int_0^T \cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)e^{i(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)}dt_1dt_2\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)e^{-i(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)}dt_1dt_2\right\}=$$
$$=T^{-3}\int_0^T\int_0^T \cos^2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2+$$
$$+\frac{1}{2}T^{-3}\int_0^T\int_0^T \sin 2(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2.$$

Другий доданок прямує до нуля при $T\to\infty$, а

$$T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2$$

асимптотично нормальний із нульовим середнім та дисперсією $\frac{1}{2}(2\pi)^2\times f(\lambda_0,\mu_0)$.

Звідси отримуємо, що випадкова величина $T(Q_T(\theta_0)-A_0^2)$ асимптотично нормальна з параметрами 0 та $8A_0^2(2\pi)^2f(\lambda_0,\mu_0)$, а отже і $T(A_T-A_0)$ асимптотично нормальна $N(0,2(2\pi)^2f(\lambda_0,\mu_0))$. □

Теорема 5. *Якщо виконуються умови* **N**, **S**, **S**$^+$, *то вектор* $\big(T(A_T-A_0),$ $T^2(\lambda_T-\lambda_0),\ T^2(\mu_T-\mu_0)\big)'$ *має асимптотично при* $T\to\infty$ *нормальний розподіл із нульовим вектором середніх та коваріаційною матрицею*

$$K_5=(2\pi)^2f(\lambda_0,\mu_0)\begin{pmatrix}2&0&0\\0&24A_0^{-2}&0\\0&0&24A_0^{-2}\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Доведення. Із доведень теорем 3 та 4, а також передуючих їм лем 3 та 4, зокрема, випливає, що

$$T^2(\lambda_T-\lambda_0)=12A_0^{-1}T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2-$$
$$-24A_0^{-1}T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_1\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2+\eta_T^{(2)},\ \eta_T^{(2)}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\ T\to\infty,$$

$$T^2(\mu_T-\mu_0)=12A_0^{-1}T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2-$$
$$-24A_0^{-1}T^{-2}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)t_2\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2+\eta_T^{(4)},\ \eta_T^{(4)}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\ T\to\infty,$$

$$T(A_T-A_0)=2T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2+\eta_T^{(5)},\ \eta_T^{(5)}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\ T\to\infty.$$

Покажемо, що випадкова величина $u_1T(A_T-A_0)+u_2T^2(\lambda_T-\lambda_0)+u_3T^2(\mu_T-\mu_0)$ є асимптотично нормальною при $T\to\infty$ для будь-яких $u=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$. Маємо

$$u_1T(A_T-A_0)+u_2T^2(\lambda_T-\lambda_0)+u_3T^2(\mu_T-\mu_0)=$$
$$=u_12T^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\cos(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2+$$
$$+u_212(A_0T)^{-1}\int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2)\sin(\lambda_0 t_1+\mu_0 t_2)dt_1dt_2-$$

$$
\begin{aligned}
&- u_2 24 A_0^{-1} T^{-2} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) t_1 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2 + \\
&+ u_3 12 (A_0 T)^{-1} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2 - \\
&- u_3 24 A_0^{-1} T^{-2} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) t_2 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2 + \eta_T^{(6)} = \\
&= v_1 \xi_{1T} + v_2 \xi_{2T} + v_3 \xi_{3T} + v_4 \xi_{4T},
\end{aligned}
$$

де $v_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} u_1$, $v_2 = \frac{12}{\sqrt{2}} A_0^{-1}(u_2 + u_3)$, $v_3 = -\frac{24}{\sqrt{6}} A_0^{-1} u_2$, $v_4 = -\frac{24}{\sqrt{6}} A_0^{-1} u_3$, $\eta_T^{(6)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $T \to \infty$,

$$
\begin{aligned}
\xi_{1T} &= \sqrt{2} T^{-1} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2, \\
\xi_{2T} &= \sqrt{2} T^{-1} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2, \\
\xi_{3T} &= \sqrt{6} T^{-2} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) t_1 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2, \\
\xi_{4T} &= \sqrt{6} T^{-2} \int_0^T\int_0^T \varepsilon(t_1,t_2) t_2 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2) dt_1 dt_2.
\end{aligned}
$$

Спектральна міра вектор-функції $\big(\cos(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2),\ \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2),\ t_1 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2),\ t_2 \sin(\lambda_0 t_1 + \mu_0 t_2)\big)$ має вигляд

$$
\nu(d\lambda, d\mu) = \begin{pmatrix}
\delta & i\rho & i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho & i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho \\
-i\rho & \delta & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta \\
-i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \delta & \frac{3}{4}\delta \\
-i\frac{\sqrt{3}}{2}\rho & \frac{\sqrt{3}}{2}\delta & \frac{3}{4}\delta & \delta
\end{pmatrix},
$$

де міра δ та заряд ρ зосереджені в точках $\pm(\lambda_0, \mu_0)$ і набувають значень $\delta\big(\{\pm\ (\lambda_0, \mu_0)\}\big) = \frac{1}{2}$, $\rho\big(\{\pm(\lambda_0, \mu_0)\}\big) = \pm\frac{1}{2}$. Маємо

$$
\mathsf{E} \exp\{i(v_1 \xi_{1T} + v_2 \xi_{2T} + v_3 \xi_{3T} + v_4 \xi_{4T})\} \to \exp\{-\frac{1}{2}\langle K_6 v, v\rangle\},\ T \to \infty,
$$

де

$$
K_6 = (2\pi)^2 f(\lambda_0, \mu_0) \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\
0 & \sqrt{3}/2 & 1 & 3/4 \\
0 & \sqrt{3}/2 & 3/4 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Тоді при підстановці у квадратичну форму $\langle K_6 v, v\rangle$ замість змінних v_i, $i = \overline{1,4}$, їх виразів через u_i, $i = \overline{1,3}$, ми отримуємо

$$
\begin{aligned}
\langle K_6 v, v\rangle &= (2\pi)^2 f(\lambda_0, \mu_0) \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \sqrt{3} v_2 v_3 + \sqrt{3} v_3 v_4 + \frac{2}{3} v_3 v_4 \right) = \\
&= (2\pi)^2 f(\lambda_0, \mu_0) \big(2u_1^2 + 24 A_0^{-2} u_2^2 + 24 A_0^{-2} u_3^2 \big).
\end{aligned}
$$

Отже, випадковий вектор $\big(T(A_T - A_0),\ T^2(\lambda_T - \lambda_0),\ T^2(\mu_T - \mu_0)\big)'$ слабко збігається до нормального вектора з нульовим середнім та коваріаційною матрицею K_5. $\square$

Зауваження 2. Для функції регресії, що досліджувалася у попередніх роботах авторів [7] та [8]:

$$g(t_1, t_2; \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} (A_k^0 \cos(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2) + B_k^0 \sin(\lambda_k^0 t_1 + \mu_k^0 t_2)),$$

при $N = 1$ і $B_1^0 = 0$ коваріаційна матриця нормального граничного розподілу ОНК $\big(T(A_T - A_0),\ TB_T,\ T^2(\lambda_T - \lambda_0),\ T^2(\mu_T - \mu_0)\big)'$, для яких ми використовуємо ті ж самі позначення, що і для періодограмних оцінок, має вигляд

$$\Psi(\theta_0) = \frac{2(2\pi)^2 f(\lambda_0, \mu_0)}{A_0^2} \begin{pmatrix} A_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7A_0^2 & 6A_0^2 & 6A_0^2 \\ 0 & 6A_0^2 & 12 & 0 \\ 0 & 6A_0^2 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що граничний нормальний розподіл ОНК $\big(T(A_T - A_0), T^2(\lambda_T - \lambda_0), T^2(\mu_T - \mu_0)\big)'$ має коваріаційну матрицю

$$(2\pi)^2 f(\lambda_0, \mu_0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 24A_0^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 24A^{-2_0} \end{pmatrix},$$

тобто у розглянутій моделі спостережень ОНК та періодограмні оцінки її параметрів мають однакові граничні нормальні розподіли.

Список літератури

1. J. M. Francos, A. Z. Meiri, B. Porat, *A united texture model based on 2-D Wald type decomposition*, IEEE Transactions on Signal Processing, **17** (1993), no. 41, 2665–2678.
2. T. Yuan, T. Subba Rao, *Spectrum estimation for random fields with application to Markov modelling and texture classification*, Markov Random Fields, Theory and Applications (R. Chellappa, A. K. Jain, eds.), Academic Press, New York, 1993.
3. H. Zhang, V. Mandrekar, *Estimation of hidden frequencies for 2D stationary processes*, Journal of Time Series Analysis, (2001), no. 22, 613–629.
4. S. Nandi, D. Kundu, R. K. Srivastava, *Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model*, Computational Statistics and Data Analysis, **58** (2013), 147–161.
5. P. Malliavan, *Sur la norte d'une matrice circulante Gaussienne*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique), (1994), 45–49.
6. P. Malliavan, *Estimation d'un signal Lorentzien*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Serie 1 (Mathematique), (1994), 991–997.
7. A. V. Ivanov, O. V. Maliar, *Consistency of the least squares estimator of the textured surface sinusoidal model parameters*, Theor. Probability and Math. Statist., **97** (2017), 72–82.
8. A. V. Ivanov, O. V. Lymar, *Asymptotic normality of the least squares estimator of two-dimensional sinusoidal observation model parameters*, Theor. Probability and Math. Statist., **100** (2019), 102–122.
9. M. I. Yadrenko, *Spectral Theory of Random Fields*, Optimization Software, New York, 1983.
10. A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, Boston, London, 1989.
11. G. P. Hrechka, A. Ya. Dorogovtsev, *On asymptotic properties of periodogram estimator of harmonic oscillation frequency and amplitude*, Computing and Applied Math., **28** (1975), 18–31.
12. B. M. Zhurakovskyi, A. V. Ivanov, *Periodogram estimator properties of the parameters of the regression model with strongly dependent noise*, Research bulletin of NTUU "KPI (2012), no. 4, 59–65.
13. P. S. Knopov, G. D. Bila, *Periodogram estimates in the nonlinear regression models with strongly dependent noise*, Kibernetika i Sistemny Analiz, (2013), no. 4, 163–172.
14. A. V. Ivanov, N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, I. N. Savich, *Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra*, Annals Prob., **41** (2013), no. 2, 1088–1114.

15. U. Grenander, *On the estimation of regression coufficients in the case of an autocorrelated disturbance*, Ann. Math. Statist., **25** (1954), no. 2, 252–272.
16. I. A. Ibragimov, Y. A. Rozanov, *Gaussian Random Processes*, Springer-Verlag, New York, 1978.
17. T. Alodat, A. Olenko, *Weak convergence of weighted additive functionals of long-range dependent fields*, Theor. Probability and Math. Statist., **97** (2017), 9–23.
18. V. Anh, N. Leonenko, A. Olenko, V. Vaskovich, *On rate of convergence in non-central limit theorems*, Bernoulli, **25** (2019), no. 4A, 2920–2948.
19. N. Leonenko, A. Olenko, *Tauberian and Abelian theorems for long-range dependent random fields*, Comp. Appl. Prob., **15** (2013), 715–742.

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03057
Адреса електронної пошти: alexntuu@gmail.com

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей, фізико-математичний факультет, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», проспект Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03057
Адреса електронної пошти: malyar.ol95@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 03.08.2019

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF PERIODOGRAM PARAMETER ESTIMATORS FOR A TRIGONOMETRIC OBSERVATION MODEL ON THE PLANE

A. V. IVANOV, O. V. LYMAR

Abstract. The simplest sinusoidal model of symmetric texture surface is considered, which is observed on the background of homogeneous and isotropic Gaussian, in particular, strongly dependent random field on the plane. Strong consistency and asymptotic normality of periodogram amplitude and angular frequencies estimators of the specified trigonometric regression model are proved.