Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 147–156

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 147–156

УДК 519.21

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ УКРУПНЕННЯ МНОЖИНИ ВУЗЛІВ У СТОХАСТИЧНИХ МЕРЕЖАХ

Є. О. ЛЕБЄДЄВ, Г. В. ЛІВІНСЬКА

Анотація. Для багатоканальних стохастичних мереж розглядається проблема асимптотичного укрупнення множини вузлів обслуговування. При критичному перевантаженні в мережі для багатовимірного процесу обслуговування доведена функціональна гранична теорема про його збіжність до гауссівського дифузійного процесу. В умовах асимптотичного укрупнення розмірність апроксимативного процесу зменшується, а його характеристики виписуються явно через параметри мережі.

Ключові слова і фрази. Багатоканальні мережі масового обслуговування, дифузійна апроксимація, перевантажений режим функціонування.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60K25, 90B15.

1. Вступ

Суттєвою проблемою при моделюванні реальних інформаційно-обчислювальних мереж, мереж передачі даних, мобільного зв'язку є велика розмірність і складність фазового простору стохастичної моделі. Як засіб подолання цієї проблеми у роботі, що пропонується, використовується метод асимптотичного укрупнення фазового простору. Вперше задача асимптотичного фазового укрупнення складних стохастичних систем була розглянута В. С. Королюком. Методологічні аспекти цієї проблеми містить його робота [4]. У подальшому, розв'язку задач фазового укрупнення присвячено багато робіт, серед яких виділимо [1, 3, 9, 11].

У цій роботі, на нашу думку, для стохастичних мереж метод асимптотичного укрупнення множини вузлів застосовується вперше, і при його використанні з'являються нові аспекти. По-перше, граничні теореми, що дають теоретичне обґрунтування методу, доводяться при критичному навантаженні в умовах гауссівської або дифузійної апроксимації процесу обслуговування. По-друге, укрупнюється розмірність процесу обслуговування. Разом із тим спостерігаються елементи класичної схеми фазового укрупнення. Велика кількість вузлів обслуговування служить позитивним фактором, на основі якого початкова модель замінюється мережею з меншою кількістю вузлів обслуговування. При цьому відбувається об'єднання («склеювання») певних стохастичних систем в одну систему такого ж типу. Апроксимативні процеси у схемі укрупнення мають простішу структуру порівняно з початковими процесами обслуговування.

2. Опис моделі та формулювання основного результату

Використовуючи систему кодування, прийняту в теорії масового обслуговування, головну модель, що розглядається в роботі, будемо позначати символом $[G|GI|\infty]^r$. Це означає, що стохастична мережа складається з r вузлів обслуговування. На кожен вузол іззовні надходить потік вимог, на структуру якого наперед не накладається жодних обмежень. Через $\nu_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, будемо позначати кількість вимог, що надійшли ззовні в i-й вузол мережі на проміжку часу $[0, t]$, $\nu(t)' = (\nu_1(t), \ldots, \nu_r(t))$. Кожен з r вузлів обслуговування представляє собою багатоканальну стохастичну систему. При надходженні вимоги у таку систему одразу починається її обслуговування. Розподіл часу обслуговування залежить від номера вузла, через $G_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, будемо позначати його функцію розподілу. Після обслуговування в i-му вузлі вимога з імовірністю $p(i, j)$ переходить для обслуговування в j-й вузол, $j = 1, 2, \ldots, r$, та з імовірністю $p(i, r+1) = 1 - \sum_{j=1}^{r} p(i, j)$ залишає мережу. $P = \|p(i, j)\|_1^r$ — матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол із номером $r + 1$ інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

Моделі систем та мереж типу $[G|GI|\infty]^r$ широко використовуються на практиці. Відзначимо їх застосування при аналізі інформаційно-комп'ютерних мереж [14], у фізиці та медицині [10, 15], актуарній математиці [8].

Процесом обслуговування вимог у $[G|GI|\infty]^r$-мережі будемо називати r-вимірний процес $Q(t) = (Q_1(t), \ldots, Q_r(t))'$, де $Q_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, — кількість зайнятих приладів в i-му вузлі мережі в момент часу $t \geq 0$, символ $'$ тут і надалі означає транспонування вектора або матриці.

Будемо припускати, що вхідний потік і матриця маршрутизації залежать від номера серії $n : \nu(t) = \nu^n(t)$, $P = P_n$. Сформулюємо умови, при виконанні яких для процесу обслуговування $Q(t) = Q^n(t)$ буде побудовано апроксимативний процес.

Умова 1. Існують константи $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r \neq 0$, такі, що

$$n^{-1/2}(\nu_1^n(nt) - \lambda_1 nt, \ldots, \nu_r^n(nt) - \lambda_r nt) \Rightarrow_{n\to\infty}^{U} W'(t) = (W_1(t), \ldots, W_r(t)),$$

де $W(t)$ — r-вимірний процес броунівського руху з нульовим вектором математичних сподівань $\mathbf{E}W_i(1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, та кореляційною матрицею $\mathbf{E}W(1)W'(1) = \sigma^2 = \|\sigma_{ij}\|_1^r$, символ $\Rightarrow_{n\to\infty}^{U}$ означає слабку збіжність у рівномірній топології.

Умова 1 вказує на те, що для вхідного потоку $\nu^n(t)$, $t \geq 0$, справедлива функціональна центральна гранична теорема. У теорії масового обслуговування добре відомі та поширені випадки вхідних потоків, коли ця умова виконується і матриця σ^2 є діагональною (див., наприклад, [2, розділ 4]), а також коли Умова 1 виконується та σ^2 відмінна від діагональної [5].

Можливість асимптотичного укрупнення множини вузлів обумовлена наступною умовою на матрицю маршрутизації $P_n = \|p_n(i, j)\|_{i,j\in I}$, де $I = \{1, 2, \ldots, r\}$ — множина вузлів мережі.

Умова 2. Множина вузлів I розбивається на класи $I = I_1 \bigcup \cdots \bigcup I_{r_0}$, що не перетинаються, і матриця маршрутизації задовольняє такі властивості:

a) $\lim_{n\to\infty} p_n(i, j) = p^{(\alpha)}(i, j)$, $i, j \in I_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r_0$,

де $P^{(\alpha)} = \left\|p^{(\alpha)}(i, j)\right\|_{i,j\in I_\alpha}$ — нерозкладна стохастична матриця зі стаціонарним розподілом $\rho_i^{(\alpha)}$, $i \in I_\alpha$;

b) $\lim_{n\to\infty} np_n(i, j) = b_{ij}$, коли $i \in I_\alpha$, $j \in I_\beta$, $\alpha \neq \beta$, або коли $i \in I_\alpha, j = r+1$;

c) нехай $a_{\alpha\alpha} = -\sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{r_0+1} a_{\alpha\beta} \neq 0$, де $a_{\alpha\beta} = \rho^{(\alpha)'} B \cdot \mathbf{1}^{(\beta)}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r_0$, $\alpha \neq \beta$;

$$B = \begin{pmatrix} O_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1r_0} \\ B_{21} & O_{22} & \ldots & B_{2r_0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{r_0 1} & B_{r_0 2} & \ldots & O_{r_0 r_0} \end{pmatrix}$$

— матриця, складена із блоків $B_{\alpha\beta} = \|b_{ij}\|_{i\in I_\alpha, j\in I_\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r_0$, $\alpha \neq \beta$, $O_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, r_0$, — нульові матриці розміру $|I_\alpha| \times |I_\alpha|$; $\rho^{(\alpha)}$ — r-вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює $\rho_i^{(\alpha)}$, якщо $i \in I_\alpha$, і є нулем у протилежному випадку,

$\alpha = 1,\dots,r_0$; $\mathbf{1}^{(\beta)}$ — r-вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює 1, якщо $i \in I_\beta$, і є нулем у протилежному випадку, $\beta = 1,\dots,r_0$;

$$a_{\alpha r_0+1} = \rho^{(\alpha)'} b_{r+1}, \quad \alpha = 1,\dots,r_0,$$

де $b'_{r+1} = (b_{1r+1}, b_{2r+1},\dots,b_{rr+1})$;

Тоді будемо припускати, що спектральний радіус матриці

$$\widehat{P} = \left\| \frac{a_{\alpha\beta}}{-a_{\alpha\alpha}}(1-\delta_{\alpha\beta}) \right\|_1^{r_0}$$

сторого менший за 1.

Відносно часу обслуговування вимог у вузлах мережі будемо вимагати існування їх математичних сподівань.

Умова 3. Функція розподілу (ф. р.) часу обслуговування в i-му вузлі, $G_i(t)$, від параметра n не залежить і

$$\int_0^\infty t dG_i(t) = 1/\mu_i < \infty, \quad i = 1,2,\dots,r.$$

Відзначимо, що при виконанні Умов 1–3 $[G|GI|\infty]^r$-мережа функціонує у перевантаженому режимі.

Траєкторію вимоги в $[G|GI|\infty]^r$ -мережі від моменту надходження в мережу через m-й вузол, $m = 1,2,\dots,r$, і до моменту виходу з мережі можна описати напівмарковським процесом $x^{m,n}(t) \in \{1,2,\dots,r,r+1\}$, $t \ge 0$, який визначається напівмарковською матрицею $\|G_{ij}^n(t)\|_1^{r+1}$ вигляду

$$G_{ij}^n(t) = \begin{cases} p_n(ij)G_i(t), & i = 1,2,\dots,r, \quad j = 1,2,\dots,r,r+1; \\ \delta_{r+1j}G_{r+1}(t), & i = r+1, \quad j = 1,2,\dots,r,r+1; \end{cases}$$

$$G_{r+1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1; \\ 1, & t \ge 1, \end{cases}$$

і початковим розподілом $P\{x^{m,n}(0) = j\} = \delta_{mj}$, $j = 1,2,\dots,r,r+1$. Ф. р. часу перебування у початковому стані m збігається з $G_m(t)$.

За визначенням стан $r+1$ для напівмарковського процесу $x^{m,n}(t)$ є поглинаючим. Поглинання у стані $r+1$ інтерпретується як вихід вимоги з мережі. Зауважимо, що вигляд функції розподілу $G_{r+1}(t)$ часу перебування в поглинаючому стані не впливає на результати подальшого аналізу. Функція зі стрибком в 1 вибрана для визначеності.

Для одновимірних та двовимірних розподілів напівмарковського процесу $x^{m,n}(t)$ введемо такі позначення:

$$p_i^{m,n}(t) = P\{x^{m,n}(t) = i\}, \quad p_i^{m,n}(nt) = p_i^{m(n)}(t), \quad P^{(n)}(t) = \|p_i^{m(n)}(t)\|_{m,i=1}^r,$$

$$p_{ij}^{m,n}(t_1,t_2) = P\{x^{m,n}(t_1) = i, x^{m,n}(t_2) = j\}, \quad p_{ij}^{m,n}(nt_1,nt_2) = p_{ij}^{m(n)}(t_1,t_2),$$

$$P^{m(n)}(t_1,t_2) = \|p_{ij}^{m(n)}(t_1,t_2)\|_{i,j=1}^r.$$

За $x^{m,n}(t)$, $x^{m,n}(0) = m \in I_\alpha$, визначимо процес $\hat{x}^{\alpha,n}(t) \in \{1,2,\dots,r_0,r_0+1\}$, який набуває значення номера класу вузлів, у якому в момент часу t міститься вимога

$$\hat{x}^{\alpha,n}(t) = \begin{cases} \beta, & \text{якщо } x^{m,n}(t) \in I_\beta, \ \beta = 1,\dots,r_0; \\ r_0+1, & \text{якщо } x^{m,n}(t) = r+1, \end{cases} \qquad \hat{x}^{\alpha,n}(0) = \alpha.$$

Відомо (див., наприклад, [3, с. 126]), що при виконанні Умов 2–3 скінченновимірні розподіли $\hat{x}^{\alpha,n}(nt)$ збігаються до скінченновимірних розподілів ланцюга Маркова з неперервним часом $\hat{x}^\alpha(t) \in \{1,\dots,r_0,r_0+1\}$, для якого

$$\hat{p}_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{-a_{\alpha\alpha}}, \quad \alpha = 1,\dots,r_0, \quad \beta = 1,\dots,r_0,r_0+1, \quad \alpha \ne \beta,$$

$$\hat{p}_{r_0+1\beta} = \delta_{r_0+1\beta}, \quad \beta = 1, \ldots, r_0, r_0+1,$$

є ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова, а час перебування у стані α, $\alpha = 1, \ldots, r_0$, розподілений за показниковим законом розподілу з параметром $(-\hat{\mu}_\alpha a_{\alpha\alpha})$, де $\hat{\mu}_\alpha = \left[\rho^{(\alpha)'}(1/\mu)\right]^{-1}$ — усереднена за стаціонарним розподілом інтенсивність обслуговування вимог у класі I_α, $(1/\mu)' = (1/\mu_1, \ldots, 1/\mu_r)$. Стан r_0+1 для ланцюга $\hat{x}^\alpha(t)$, $t \geq 0$, є поглинаючим.

Через $\hat{p}^\alpha_\beta(t)$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, r_0$, будемо позначати перехідні ймовірності $\hat{x}^\alpha(t)$, $\hat{P}(t) = \left\|\hat{p}^\alpha_\beta(t)\right\|_1^{r_0}$.

Процес $\hat{x}^\alpha(t)$ апроксимує траєкторію вимоги у $[G|GI|\infty]^r$ -мережі, якщо при граничному переході при $n \to \infty$ об'єднати вузли класу I_α, $\alpha = 1, \ldots, r_0$, в один вузол обслуговування вимог. Зазначимо, що при виконанні Умов 1–3 нормований процес обслуговування вимог у $[G|GI|\infty]^r$ -мережі можна апроксимувати r_0-вимірним гауссівським дифузійним процесом, розподіл якого виписується явно через характеристики $\hat{x}^\alpha(t)$ і вхідного потоку.

Перейдемо до деталей. Нормованим процесом обслуговування вимог у $[G|GI|\infty]^r$-мережі будемо називати випадковий процес

$$\xi^{n'}(t) = \left(\xi_1^n(t), \ldots, \xi_{r_0}^n(t)\right) = n^{-1/2}\left(\widehat{Q}^{n'}(nt) - n\hat{q}^{(n)'}(t)\right), \quad n \geq 0,$$

де

$$\widehat{Q}^{n'}(nt) = \left(\widehat{Q}_1^n(nt), \ldots, \widehat{Q}_{r_0}^n(nt)\right),$$

$$\widehat{Q}_\alpha^n(nt) = \mathbf{1}^{(\alpha)'} \cdot Q^n(nt), \quad \alpha = 1, \ldots, r_0,$$

$$\hat{q}^{(n)'}(t) = \left(\hat{q}_1^{(n)}(t), \ldots, \hat{q}_{r_0}^{(n)}(t)\right),$$

$$\hat{q}_\alpha^{(n)}(t) = \lambda' \cdot \left(\int_0^t P^{(n)}(u)du\right) \cdot \mathbf{1}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, \ldots, r_0, \quad \lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r).$$

Нарешті треба визначитись із початковим навантаженням вузлів мережі. Будемо припускати, що у початковий момент часу $t = 0$ вузли обслуговування $[G|GI|\infty]^r$-мережі вільні.

Умова 4. $Q_i^n(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, r.$

При виконанні Умови 4 нормований процес обслуговування вимог $\xi^n(t)$, $t \geq 0$, перебуває у перехідному режимі, і щоб побудувати для нього апроксимативний процес, розглянемо два незалежні r-вимірні гауссівські процеси $\xi^{(1)}(t)$ і $\xi^{(2)}(t)$, $t \geq 0$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається нульовими середніми значеннями $\mathbf{E}\xi_i^{(1)}(t) = 0$, $i = 1, \ldots, r_0$, та кореляційними матрицями

$$\hat{R}^{(1)}(t) = E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)'}(t) - E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)'}(t) = \int_0^t \hat{P}'(u)\hat{\sigma}^2\hat{P}(u)du,$$

$$\hat{R}^{(1)}(s,t) = E\hat{\xi}^{(1)}(s)\hat{\xi}^{(1)'}(t) - E\hat{\xi}^{(1)}(s)E\hat{\xi}^{(1)'}(t) = \hat{R}^{(1)}(s)\hat{P}(t-s), \quad s < t,$$

де $\hat{\sigma}^2 = \|\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\|_1^{r_0}$, $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \sum_{i \in I_\alpha, j \in I_\beta} \sigma_{ij}$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$\mathbf{E}\xi_i^{(2)}(t) = 0, \quad i = 1, \ldots, r_0,$$

$$\hat{R}^{(2)}(t) = \Delta\left(\hat{\lambda}' \int_0^t \hat{P}(u)du\right) - \int_0^t \hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)du,$$

$$\hat{R}^{(2)}(s,t) = \hat{R}^{(2)}(s)\hat{P}(t-s), \quad s < t,$$

де $\hat{\lambda}' = \left(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_{r_0}\right)$, $\hat{\lambda}_\alpha = \mathbf{1}^{(\alpha)'} \cdot \lambda$ — інтенсивність загального потоку, який надходить іззовні у клас вузлів I_α, $\alpha = 1, \ldots, r_0$. Тут і надалі для будь-якого вектора

$x' = (x_1, \dots, x_{r_0})$ $\Delta(x) = \|x_i \delta_{ij}\|_1^{r_0}$ — діагональна матриця з вектором x на головній діагоналі.

Для послідовності випадкових процесів $\xi^n(t)$, $n \geq 1$, справедливий такий результат.

Теорема 1. *Якщо для стохастичної мережі типу* $[G|GI|\infty]^r$ *виконуються Умови 1–4, то на будь-якому скінченному проміжку* $[0, T]$ *послідовність випадкових процесів* $\xi^{(n)}(t)$, $n \geq 1$, *слабко збігається у рівномірній топології до процесу* $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Перед тим, як доводити теорему, наведемо допоміжні результати технічного характеру.

3. Допоміжні результати

Складова $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу має подання у вигляді стохастичного інтеграла.

Лема 1 [7]. *Скінченновимірні розподіли* $\int_0^t d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t-u)$ *збігаються зі скінченновимірними розподілами гауссівського процесу* $\xi^{(1)}(t)$, *де* $\widehat{W}(t) = \Big(\widehat{W}_1(t), \dots, \widehat{W}_{r_0}(t)\Big)'$ — *процес броунівського руху з нульовим вектором математичних сподівань* $\mathbf{E}\widehat{W}_i(1) = 0$, $i = 1, \dots, r_0$, *і кореляційною матрицею* $\mathbf{E}\widehat{W}(1)\widehat{W}'(1) = \hat{\sigma}^2 = \|\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\|_1^{r_0}$.

Пов'яжемо з напівмарковським процесом $x^{m,n}(t)$, $t \geq 0$, r-вимірний процес індикаторного типу $\chi^{m,n}(t) = (\chi_1^{m,n}(t), \dots, \chi_r^{m,n}(t))'$, $t \geq 0$, таким чином:

$$\chi^{m,n}(t) = \begin{cases} e_j, & x^{m,n}(t) = j, \qquad j = 1, 2, \dots, r; \\ e_0, & x^{m,n}(t) = r + 1, \end{cases}$$

де e_j — r-вимірний вектор, j-та компонента якого дорівнює 1, а інші компоненти дорівнюють 0, e_0 — r-вимірний вектор, що складається з нулів.

Для довільного натурального N та $z'(i) = (z_1(i), \dots, z_r(i))$, $i = 1, 2, \dots, N$, $|z(i)| \leq 1$, через

$$\Phi^{m,n} = \Phi^{m,n}(t_1, \dots, t_N, z(1), \dots, z(N))$$

позначимо сумісну генератрису векторів $\chi^{m,n}(t_1), \dots, \chi^{m,n}(t_N)$, $0 < t_1 < \dots < t_N$.

Цю генератрису можна подати наступним чином.

Лема 2. *Для довільних* $N = 1, 2, \dots$ *та* $0 < t_1 < \dots < t_N$

$$\Phi^{m,n}(t_1, \dots, t_N, z(1), \dots, z(N)) = 1 + \\ + \sum_{k=1}^{N} \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{r} P\{x^{m,n}(t_1) = i_1, \dots, x^{m,n}(t_k) = i_k\} z_{i_1}(1) \dots z_{i_{k-1}}(k-1)[z_{i_k}(k) - 1]. \tag{1}$$

Доведення (1) можна отримати методом математичної індукції за параметром N.

При доведенні основної граничної теореми треба обумовлювати заміну характеристик напівмарковського процесу $x^{m,n}(t)$, $m = 1, \dots, r$, на відповідні характеристики ланцюга Маркова $\hat{x}^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, \dots, r_0$, який є результатом асимптотичного укрупнення станів $x^{m,n}(t)$. У зв'язку із цим будемо використовувати таке твердження, яке є наслідком роботи [3, с. 126–130].

Лема 3. *Якщо виконуються Умови 2, 3, то для довільних* t, $\Delta t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t P^{(n)}(u)du = \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{r_0}\int_0^t \hat{p}_\beta^\alpha(u)du\right)\mathbf{1}^{(\alpha)}\cdot\hat{\rho}^{(\beta)\prime}, \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t P^{m(n)}(u,u+\Delta t)du =$$

$$= \Delta\left[\int_0^t\left(\sum_{\beta=1}^{r_0}\hat{p}_\beta^{\alpha(m)}(u)\hat{\rho}^{(\beta)}\right)du\right]\left[\sum_{\alpha_1,\beta_1=1}^{r_0}\hat{p}_{\beta_1}^{\alpha_1}(\Delta t)\cdot\mathbf{1}^{(\alpha_1)}\cdot\hat{\rho}^{(\beta_1)\prime}\right], \quad (3)$$

де $\alpha(m)$ — *номер того класу вузлів, до якого належить вузол* m, $m\in I_{\alpha(m)}$, $\hat{\rho}^{(\beta)}$ — r*-вимірний вектор,* i*-та компонента якого дорівнює* $\frac{\rho_i^{(\beta)}/\mu_i}{1/\hat{\mu}_\beta}$, *якщо* $i\in I_\beta$, *і є нулем у протилежному випадку.*

Тепер перейдемо до доведення основного результату.

4. Доведення граничної теореми

Нехай

$$\varphi^n(s) = \mathbf{E}\exp\Big\{i\xi^{n\prime}(t)s\Big\} = \exp\Big\{-in^{1/2}\hat{q}^{(n)\prime}(t)s\Big\}\mathbf{E}\exp\Big\{in^{-1/2}\hat{Q}^{n\prime}(nt)s\Big\},$$

$$s' = (s_1,\dots,s_{r_0})\in\mathbb{R}^{r_0}(\text{дійсний } r_0\text{-вимірний простір}),$$

— характеристична функція $\xi^n(t)$.

Для пошуку границі $\varphi^n(s)$ при $n\to\infty$ використаємо подання процесу обслуговування як суми векторів індикаторного типу на вхідному потоці. Нехай $\chi^{m,n,k}(t)$, $k=1,2,\dots,$ — незалежні випадкові процеси, скінченновимірні розподіли яких збігаються з $\chi^{m,n}(t)$. Тоді при фіксованій траєкторії вхідного потоку $\nu^n(t)=(\nu_1^n(t),\dots,\nu_r^n(t))'$ розподіл $Q^n(t)$ збігається з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^n(t)}\chi^{m,n,k}(t-\tau_k^{m,n}), \qquad (4)$$

де $\tau_k^{m,n}$ — момент надходження k-ї вимоги в m-й вузол.

Позначимо через $\tilde{s}'=(\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_r)$ r-вимірний вектор, що дорівнює $\tilde{s}=\sum\limits_{\alpha=1}^{r_0}s_\alpha\mathbf{1}^{(\alpha)}$. Тоді

$$\hat{Q}^{n\prime}(nt)s = Q^{n\prime}(nt)\tilde{s},$$

і використовуючи подання (1) для $N=1$, а також (4), знаходимо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(s) = \lim_{n\to\infty}\exp\Big\{-in^{1/2}\hat{q}^{(n)\prime}(t)s\Big\}\times$$

$$\times\mathbf{E}\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^n(nt)}\ln\left[1+p_m^{(n)\prime}\left(t-\frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\left(e^{i\tilde{s}/\sqrt{n}}-\mathbf{1}\right)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\Big\{-in^{1/2}\hat{q}^{(n)\prime}(t)s\Big\}\times$$

$$\times\mathbf{E}\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^n(nt)}\left[in^{-1/2}p_m^{(n)\prime}\left(t-\frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\tilde{s}-\frac{1}{2}n^{-1}p_m^{(n)\prime}\left(t-\frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\tilde{s}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{1}{2}n^{-1}\tilde{s}'p_m^{(n)}\left(t-\frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)p_m^{(n)\prime}\left(t-\frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\tilde{s}\right]\right\},$$

де $p_m^{(n)}(t)$ — m-й рядок матриці $P^{(n)}(t)$, $\left(e^{i\tilde{s}/\sqrt{n}}\right)' = \left(e^{i\tilde{s}_1/\sqrt{n}}, \dots, e^{i\tilde{s}_r/\sqrt{n}}\right)$, $\mathbf{1}$ — r-вимірний вектор, складений з одиниць, $(\tilde{s}^2)' = (\tilde{s}_1^2, \dots, \tilde{s}_r^2)$.

При виконанні Умов 2, 3

$$\lim_{n\to\infty} \lambda' P^{(n)}(t)\tilde{s}^2 = s'\Delta\Big(\hat{\lambda}'\hat{P}(t)\Big)s, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{s}' P^{(n)'}(t)\Delta(\lambda)P^{(n)}(t)\tilde{s} = s'\hat{P}'(t)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(t)s. \tag{6}$$

Враховуючи (5), (6), будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(s) = \exp\left\{-\frac{1}{2}s'\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\int_0^t \hat{P}(u)du\right) - \int_0^t \hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)du\right]s\right\} \times \\ \times \mathbf{E}\exp\left\{i\int_0^t d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t-u)s\right\}.$$

Таким чином, збіжність одновимірних розподілів доведено.

Розглянемо сумісну характеристичну функцію $\varphi^n(s(1), s(2))$, $s(1) = (s_1(1), \dots, s_{r_0}(1))$, $s(2) = (s_1(2), \dots, s_{r_0}(2)) \in \mathbb{R}^{r_0}$ векторів $\xi^n(t_1)$, $\xi^n(t_2)$, $t_1 < t_2$. Для будь-яких $t_1, t_2 > 0$, $t_1 < t_2$, при фіксованій траєкторії вхідного потоку $\nu^n(t)$ розподіл $(Q^n(t_1), Q^n(t_2))'$ збігається з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{\nu_m^n(t_1)} \chi^{m,n,k}(t_1 - \tau_k^{m,n}),\ \sum_{k=1}^{\nu_m^n(t_1)} \chi^{m,n,k}(t_2 - \tau_k^{m,n}) + \right. \\ \left. + \sum_{k=\nu_m^n(t_1)+1}^{\nu_m^n(t_2)} \chi^{m,n,k}(t_2 - \tau_k^{m,n})\right). \tag{7}$$

Наслідком (7) та (1) для $N = 2$ є подання

$$\begin{aligned}\varphi^n(s(1), s(2)) &= \mathbf{E}\exp\Big\{i\xi^{n'}(t_1)s(1) + i\xi^{n'}(t_2)s(2)\Big\} = \\ &= \exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^{t_1} P^{(n)}(u)du\tilde{s}(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^{t_2} P^{(n)}(u)du\tilde{s}(2)\right\} \times \\ &\quad \times \mathbf{E}\exp\left\{iQ^{n'}(nt_1)\frac{\tilde{s}(1)}{\sqrt{n}} + iQ^{n'}(nt_2)\frac{\tilde{s}(2)}{\sqrt{n}}\right\} = \\ &= \exp\left\{-i\sqrt{n}\lambda'\int_0^{t_1} P^{(n)}(u)du\tilde{s}(1) - i\sqrt{n}\lambda'\int_0^{t_2} P^{(n)}(u)du\tilde{s}(2)\right\} \times \\ &\quad \times \mathbf{E}\exp\left\{\sum_{m=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{\nu_m^n(nt_1)} \ln\left[1 + p_m^{(n)'}\left(t_1 - \frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\left(e^{i\tilde{s}(1)/\sqrt{n}} - \mathbf{1}\right) + \right.\right.\right. \\ &\quad + \left.\left(e^{i\tilde{s}(1)/\sqrt{n}}\right)' P^{m(n)}\left(t_1 - \frac{\tau_k^{m,n}}{n}, t_2 - \frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\left(e^{i\tilde{s}(2)/\sqrt{n}} - \mathbf{1}\right)\right] + \\ &\quad + \left.\left.\left.\sum_{k=\nu_m^n(nt_1)+1}^{\nu_m^n(nt_2)} \ln\left[1 + p_m^{(n)'}\left(t_2 - \frac{\tau_k^{m,n}}{n}\right)\left(e^{i\tilde{s}(2)/\sqrt{n}} - \mathbf{1}\right)\right]\right\}\right\},\end{aligned} \tag{8}$$

де $\tilde{s}(j) = \sum_{\alpha=1}^{r_0} s_\alpha(j)\mathbf{1}^{(\alpha)}$, $\left(e^{i\tilde{s}(j)/\sqrt{n}}\right)' = \left(e^{i\tilde{s}_1(j)/\sqrt{n}}, \dots, e^{i\tilde{s}_r(j)/\sqrt{n}}\right)$, $j = 1, 2$.

Граничним переходом при $n \to \infty$ з (8) знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(s(1), s(2)) =$$

$$= \mathbf{E}\exp\left\{i\int_0^{t_1} d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t_1-u)s(1) + i\int_0^{t_2} d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t_2-u)s(2)\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}s'(1)\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\int_0^{t_1}\hat{P}(u)du\right) - \int_0^{t_1}\hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)du\right]s(1) -\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}s'(2)\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\int_0^{t_2}\hat{P}(u)du\right) - \int_0^{t_2}\hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)du\right]s(2)\right\}\times$$
$$\times\lim_{n\to\infty}\exp\left\{-\sum_{m=1}^{r}\lambda_m\tilde{s}'(1)\left[\int_0^{t_1}P^{m(n)}(u,u+\Delta t_2)du -\right.\right.$$
$$\left.\left. -\int_0^{t_2}p_m^{(n)}(u)p_m^{(n)'}(u+\Delta t_2)du\right]\tilde{s}(2)\right\},\quad \Delta t_2 = t_2 - t_1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{s}'(1)\left[\sum_{m=1}^{r}\lambda_m\int_0^{t_1}P^{m(n)}(u,u+\Delta t_2)du\right]\tilde{s}(2) =$$
$$= s'(1)\Delta\left(\hat{\lambda}'\int_0^{t_1}\hat{P}(u)du\right)\hat{P}(\Delta t_2)s(2),$$
$$\lim_{n\to\infty}\tilde{s}'(1)\left[\sum_{m=1}^{r}\lambda_m\int_0^{t_1}p_m^{(n)}(u)p_m^{(n)'}(u+\Delta t_2)du\right]\tilde{s}(2) =$$
$$= s'(1)\left[\int_0^{t_1}\hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)du\right]\hat{P}(\Delta t_2)s(2),$$

то остаточно маємо

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(s(1),s(2)) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}s'(1)\int_0^{t_1}\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\hat{P}(u)\right) - \hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)\right]du\cdot s(1) -\right.$$
$$-\frac{1}{2}s'(2)\int_0^{t_2}\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\hat{P}(u)\right) - \hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)\right]du\cdot s(2) -$$
$$\left. - s'(1)\int_0^{t_1}\left[\Delta\left(\hat{\lambda}'\hat{P}(u)\right) - \hat{P}'(u)\Delta(\hat{\lambda})\hat{P}(u)\right]du\cdot\hat{P}(\Delta t_2)s(2)\right\}\times$$
$$\times\mathbf{E}\exp\left\{i\int_0^{t_1} d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t_1-u)s(1) + i\int_0^{t_2} d\widehat{W}'(u)\hat{P}(t_2-u)s(2)\right\}.$$

Отримана границя є характеристичною функцією двовимірного розподілу процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$. Аналогічно перевіряється збіжність N-вимірних розподілів для $N > 2$.

Збіжність скінченновимірних розподілів посилюється до збіжності функціоналів, неперервних у рівномірній метриці так само, як це було зроблено в теоремі 1 з роботи [6]. Теорему доведено.

5. Граничний процес як дифузія

Граничний процес $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$ задовольняє умови теореми 2 ([6]), і як наслідок ми маємо апроксимацію r-вимірного процесу обслуговування у $[G|GI|\infty]^r$-мережі r_0-вимірним дифузійним процесом.

Нехай $\hat{\theta}' = \left(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_{r_0}\right)$ — розв'язок рівняння балансу

$$\hat{\theta}_\alpha = \hat{\lambda}_\alpha + \sum_{\beta=1}^{r_0}\hat{\theta}_\beta\hat{p}_{\beta\alpha},\quad \alpha = 1,\ldots,r_0,$$

для укрупненої стохастичної мережі, де вузлами є класи I_α, $\alpha = 1, \dots, r_0$. Інтенсивність обслуговування вимог у вузлі укрупненої мережі, що відповідає класу I_α, дорівнює $\hat{\mu}_\alpha(-a_{\alpha\alpha})$, $\alpha = 1, \dots, r_0$. Через $\hat{\mu}a$, $\hat{\theta}/\hat{\mu}a$ будемо позначати r_0-вимірні вектори $(\hat{\mu}_1 a_{11}, \dots, \hat{\mu}_{r_0} a_{r_0 r_0})'$, $\left(\hat{\theta}_1/\hat{\mu}_1 a_{11}, \dots, \hat{\theta}_{r_0}/\hat{\mu}_{r_0} a_{r_0 r_0}\right)'$ відповідно. Справедливий такий результат.

Наслідок 1. *Якщо для стохастичної мережі типу* $[G|GI|\infty]^r$ *виконуються умови теореми 1, то на будь-якому скінченному проміжку* $[0, T]$ *послідовність випадкових процесів* $\xi^n(t)$, $n \geq 1$, *слабко збігається у рівномірній топології до* r_0*-вимірного дифузійного процесу* $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) *із вектором перенесення* $\hat{A}(x) = \hat{A}'x$ *і матрицею дифузії*

$$\hat{B}(t) = \Delta[\hat{q}'(t)\hat{A}] - \hat{A}'\Delta[\hat{q}(t)] - \Delta[\hat{q}(t)]\hat{A} + \hat{\sigma}^2,$$

де $\hat{A} = \Delta(\hat{\mu}a)(I - \hat{P})$, $\hat{P} = \|\hat{p}_{\alpha\beta}\|_1^{r_0}$, $\hat{q}'(t) = (\hat{q}_1(t), \dots, \hat{q}_{r_0}(t)) = \left(\hat{\theta}/\hat{\mu}a\right)'\left(\hat{P}(t) - I\right)$.

Зазначимо, що у представленні граничного процесу як гауссівського вигляду $\xi(t) = \xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ складова $\xi^{(1)}(t)$ пов'язана із флуктуаціями вхідного потоку, а $\xi^{(2)}(t)$ — із флуктуаціями часу обслуговування. Подання $\xi(t)$ у наслідку 1 як багатовимірної дифузії є привабливим у тому, що дифузійний процес визначається тільки своїми локальними характеристиками і для аналізу функціоналів від нього можна застосовувати розвинутий апарат марковських дифузійних процесів. Однак є і втрати, оскільки тепер граничний процес не відображає в деталях структуру дограничного процесу обслуговування.

6. Висновки

У роботі розглянуто моделі стохастичних мереж типу $[G|GI|\infty]^r$. Це доволі загальний клас моделей, який часто використовується для вивчення реальних мереж. Для класу таких мереж застосовано метод асимптотичного укрупнення множини вузлів обслуговування. За сформульованих умов перевантаженого режиму функціонування мережі доведено збіжність багатовимірного процесу обслуговування вимог до гауссівського процесу, характеристики якого виписано в явному вигляді через параметри мережі. За умов асимптотичного укрупнення розмірність граничного процесу зменшується до кількості класів вузлів обслуговування. Наведено також представлення апроксимативного процесу як дифузійного процесу, яке має певні переваги.

Головна властивість граничного гауссівського процесу в тому, що він є сумою двох незалежних гауссівських процесів. Перший із них обумовлений флуктуаціями вхідного потоку вимог, другий — флуктуаціями часів обслуговування.

Отримані результати можуть знайти застосування для розв'язування практичних задач, пов'язаних з управлінням складними технологічними процесами, створенням та експлуатацією мобільних мереж зв'язку та інформаційно-обчислювальних систем. Апроксимативні процеси можна використовувати для підрахунку функціоналів якості роботи стохастичних мереж, розв'язування оптимізаційних задач вибору пропускних здатностей, розподілу потоків, вибору топології мережі (див., наприклад, [12]). Кореляційні характеристики апроксимативних гауссівських процесів $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ можна знайти, наприклад, за допомогою сучасних програмних засобів на мові програмування Python.

Список літератури

1. V. V. Anisimov, *Limit Theorems for Stochastic Processes and Their Application for Discrete Schemes of Summation*, Vyshcha Shcola, Kyiv, 1976.
2. V. V. Anisimov, E. A. Lebedev, *Stochastic Queueing Networks. Markov Models*, Lybid, Kyiv, 1992.

3. V. S. Korolyuk, A. F. Turbin, *Semi-Markov Processes and Their Applications*, Naukova Dumka, Kyiv, 1976.
4. V. S. Korolyuk, *Enlarging of Complex Systems*, Cybernetics (1977), no. 1, 129–132.
5. E. O. Lebedev, *Stationary Regime and Binomial Moments for networks of* $[SM|GI|\infty]^r$*-Type*, Ukrainian Math. Journal, **54** (2002), no. 10, 1371–1380.
6. E. O. Lebedev, *A Limit Theorem for Stochastic Networks and its Application*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **68** (2003), 81–92.
7. E. O. Lebedev, O. A. Chechelnitskyi, H. V. Livinska, *Multichannel Networks with Interdependent Input Flows in Heavy Traffic*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **97** (2017), 109–119.
8. I. Sinyakova, S. Moiseeva, *Mathematical Model of Insurance Company as a Queueing System* $M|M|\infty$, Proceedings of International Conference "Modern Probabilistic Methods of Analysis, Design and Optimization of Networks of Information and Telecommunication", Minsk, 2013, 154–159.
9. V. V. Anisimov, *Switching processes in Queueing Models*, ISTE Ltd, 2008.
10. A. Dvurečenskij, L. A. Kulyukina, G. A. Ososkov, *Estimations of track ionization chambers*, Transactions of United Nuclear Research Institute, Dubna, (1981), no. 5-81-362.
11. V. Korolyuk, A. Turbin, *Mathematical Foundation of the State Lumping of Large Systems*, Springer, Kluver, Dordrecht, 1993.
12. E. Lebedev, I. Makushenko, *Profit Maximization and Risk Minimization in Semi-Markovian Networks*, Cybernetics and Systems Analysis, **43** (2007), no. 2, 213–224.
13. E. Lebedev, G. Livinska, *Gaussian approximation of multi-channel networks in heavy traffic*, Communications in Computer and Information Science, **356** (2013), 122–130.
14. W. A. Massey, W. Whitt, *A stochastic model to capture space and time dynamics in wire less communication systems*, Prob. Eng. Inf. Sci. (1994), no. 8, 541–569.
15. J. H. Matis, T. E. Wehrly, *Generalized stochastic compartmental models with Erlang transit times*, Journal Pharmacokin. Bioharm. (1990), no. 18, 589–607.

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: leb@unicyb.kiev.ua

Кафедра прикладної статистики, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: livinskaav@gmail.com

Стаття надійшла до редколегії 26.08.2019

ON ASYMPTOTIC MERGING OF NODES' SET IN STOCHASTIC NETWORKS

E. A. LEBEDEV, H. V. LIVINSKA

Abstract. For multichannel stochastic networks the problem of asymptotic merging of the queueing nodes' set is considered. Under heavy traffic conditions in the network, a functional limit theorem for a multidimensional service process is proved. The statement of the theorem concerns to the convergence of the service process to a Gaussian diffusion process. Under the asymptotic merging condition, the dimension of the approximating process is reduced, and its characteristics can be written via network parameters in explicit form.