Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 5–14

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 5–14

УДК 519.21

РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ ЗАКРІПЛЕНОЇ СТРУНИ, КЕРОВАНЕ ЗАГАЛЬНОЮ СТОХАСТИЧНОЮ МІРОЮ

І. М. БОДНАРЧУК, В. М. РАДЧЕНКО

Анотація. Досліджено існування м'якого розв'язку рівняння коливань однорідної струни із закріпленими кінцями, керованого загальною стохастичною мірою у трьох випадках: стохастична міра залежить від часової змінної, просторової змінної та сукупності змінних. Розглянуто принцип усереднення та оцінено швидкість збіжності до розв'язку усередненого рівняння.

Ключові слова і фрази. Стохастична міра, стохастичне хвильове рівняння, задача Коші, м'який розв'язок, принцип усереднення.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H15; Secondary 60G17, 60G57.

1. Вступ

Нехай X — довільна множина, $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ — σ-алгебра підмножин з X; $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — множина дійснозначних випадкових величин, визначених на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Збіжність в $\mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — це збіжність за ймовірністю. Нехай також μ — стохастична міра на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, тобто, σ-адитивне відображення

$$\mu : \mathcal{B}(\mathsf{X}) \to \mathsf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}).$$

Деякі приклади стохастичних мір наведено в розділі 2.

Розглядаємо задачу Коші для хвильового рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + F(t,x), \quad (t,x) \in D_T, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \end{cases} \tag{1}$$

яке описує коливання однорідної струни із закріпленими кінцями під впливом зовнішніх випадкових сил. Тут $D_\tau = (0,\tau] \times [0,\pi]$ та $T > 0$. Стохастичне збурення задається доданком, що має вигляд $F = \sigma\dot{\mu}$, де $\sigma : \bar{D}_T \to \mathbb{R}$ — деяка невипадкова функція, $\bar{D}_\tau$ — замикання множини D_τ, μ — стохастична міра, визначена на борелевих σ-алгебрах $\mathcal{B}([0,T])$, $\mathcal{B}([0,\pi])$ або $\mathcal{B}(\bar{D}_T)$. Ці випадки розглядаються відповідно у розділах 3, 4 та 5. Відмітимо, що позначення $\dot{\mu}$ має символічний характер, а його зміст розкрито, наприклад, у формулі (2).

Досліджуємо м'який розв'язок задачі (1) (див. формули (2), (9) та (12)). За допомогою рядів Фур'є будуємо м'який розв'язок та показуємо, що відповідний ряд збігається у просторі $\mathsf{L}_2((0,\pi], dx)$.

В [1] вивчалась аналогічна задача для рівняння, що описує коливання струни, яка перебуває під дією випадкових зовнішніх сил, які мають симетричний α-стійкий розподіл. Зокрема, із використанням рядів Фур'є в зазначеній роботі було побудовано узагальнений розв'язок та встановлено регулярність його траєкторій. Рівняння коливання струни із закріпленими кінцями з білим шумом розглянуто в [2], де показано існування розв'язку та його неперервність.

У моделях, розглянутих в цих роботах, інтегровність траєкторій розв'язків була очевидною, оскільки інтегровними були відповідні стохастичні інтегратори. У нашій моделі значення μ можуть не мати моментів, тому відповідна властивість траєкторій потребує певного обґрунтування. З іншого боку, досі не вдалося отримати результати про неперервність розв'язків.

Властивості м'яких розв'язків хвильових рівнянь із різними типами випадкових збурень досліджувались, наприклад, у роботах [3–8]. Так, для системи рівнянь із шумом Леві в [3] знайдено необхідні та достатні умови того, що нульова множина розв'язку є непорожньою, та пораховано розмірність Хаусдорфа цієї множини. У статтях [4, 5] досліджено неперервність за Гельдером розв'язків хвильових рівнянь в $\mathbb{R}^3$, керованих α-стійкими розподілами. Існування, єдиність та гельдеровість м'яких розв'язків рівнянь із загальними стохастичними мірами показано у випадках одновимірної [6], двовимірної [7] та тривимірної [8] просторових змінних.

Також у розділі 6 розглядаємо принцип усереднення для рівняння вимушених коливань однорідної струни із закріпленими кінцями, керованого стохастичною мірою $d\mu(x)$, заданою на борелевій σ-алгебрі підмножин $[0, \pi]$. Схожі задачі досліджувались для системи двох рівнянь із частинними похідними, керованими взаємно незалежними вінерівськими процесами [9, глава 5], стохастичного рівняння Кортевега – де Фріза з вінерівським процесом [10], для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою [11] та диференціального рівняння із симетричним інтегралом від випадкової функції за стохастичною мірою [12].

2. Попередні відомості

Стохастична міра μ — це векторна міра зі значеннями в L_0. У роботі [13] така μ ще називається загальною стохастичною мірою, адже ми не накладаємо на неї жодних додаткових умов окрім σ-адитивності.

Для невипадкової вимірної функції $g : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, множини $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ та стохастичної міри μ в [13] визначено та досліджено інтеграл $\int_A g\, d\mu$. Зокрема, довільна обмежена вимірна функція g інтегровна за довільною стохастичною мірою μ.

Прикладом стохастичної міри на борелевих підмножинах $\mathbb{R}$ є інтеграл

$$\mu(A) = \int_0^T \mathbb{1}_A(t)\, dX_t\,,$$

де X_t — квадратично інтегровний мартингал, дробовий броунівський рух із індексом Хюрста $1/2 < H < 1$ (див., наприклад, [14, наслідок 1.9.4]) або субдробовий броунівський рух з параметром $k = H - 1/2$, при $1/2 < H < 1$ [15, формула (1.2), теорема 3.2 (ii) та зауваження 3.3 c)].

Ще один приклад стохастичної міри наступний. Нехай (ξ_n) — така послідовність випадкових величин, що $\sum_{n\ge 1} \xi_n$ збігається безумовно за ймовірністю та m_n — заряд на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, причому $\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathsf{X}) :\ |\mathsf{m}_n(A)| \le 1$. Тоді

$$\mu(A) = \sum_{n\ge 1} \xi_n \mathsf{m}_n(A)$$

є стохастичною мірою на $\mathcal{B}(\mathsf{X})$, адже ряд збігається в L_0 за [13, теорема A.1.1], і така границя послідовності стохастичних мір є стохастичною мірою за [16, теорема 8.6].

Більше прикладів стохастичних мір можна знайти у [13, розділ 7] та [11, 12, 17].

Для доведення основних результатів будемо використовувати такі твердження.

Лема 1 [17, лема 3.1]. *Нехай* $f_l :\ \mathsf{X} \to \mathbb{R},\ l \ge 1$ — *такі вимірні функції, що* $\bar{f}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} |f_l(x)|$ *інтегровна за* μ *на* X. *Тоді*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\int_{\mathsf{X}} f_l\, d\mu \right)^2 < \infty \quad \textit{м. н.}$$

Припущення A1. *Існує дійсна скінченна міра* m *на* $(\mathsf{X}, \mathcal{B}(\mathsf{X}))$ *із такою властивістю: якщо для вимірної функції* $g : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$ *виконується* $\int_{\mathsf{X}} g^2\, d\mathsf{m} < +\infty$*, то* g *інтегровна за* μ *на* X.

Ця умова виконується, наприклад, для стохастичних мір, породжених дробовим броунівським рухом $B^H(t)$ при $H > 1/2$, α-стійких мір із незалежними значеннями, заданих на σ-алгебрі, при $\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$, стохастичних мір з ортогональними значеннями, мартингалів із невипадковою квадратичною варіацією (див., наприклад, [14, 18]).

Лема 2 [19, лема 3.3]. *Нехай виконується припущення A1 та вимірні функції* $f_k : \mathsf{X} \to \mathbb{R}$, $k \geq 1$, *такі, що для вказаної* m

$$\int_{\mathsf{X}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \right) d\mathsf{m} < +\infty.$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\mathsf{X}} f_n \, d\mu \right)^2 < +\infty \quad \text{м. н.}$$

3. Стохастична міра залежить від часової змінної

У цьому розділі розглядаємо задачу Коші для хвильового рівняння (1), керованого стохастичною мірою μ_1, що задана на $\mathcal{B}([0,T])$, а саме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \sigma(t,x)\, \dot{\mu}_1(t), \quad (t,x) \in D_T, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \end{cases}$$

у такому м'якому сенсі (див., наприклад, [20, Section 5.3]):

$$u(t,x) = \int_{(0,t]} d\mu_1(s) \int_{[0,\pi]} \mathcal{S}(t-s,x,y) \sigma(s,y)\, dy\,, \tag{2}$$

де $\mathcal{S}$ — функція Гріна для даного рівняння.

Маємо (див., наприклад, [20, Section 5.3], [21, Section 2])

$$\mathcal{S}(t,x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin nt \sin nx \sin ny\,.$$

Тоді рівняння (2) набуває вигляду

$$u(t,x) = \int_{(0,t]} d\mu_1(s) \int_{[0,\pi]} \Big(\frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sin n(t-s) \sin nx \sin ny \Big) \sigma(s,y)\, dy\,. \tag{3}$$

Також будемо розглядати таке припущення.

Припущення A2. $\sigma : \bar{D}_T \to \mathbb{R}$ *вимірна та обмежена:* $|\sigma(s,y)| \leq C_\sigma$.

Покажемо, що випадкова функція u із (3) зображається як сума ряду зі стохастичними інтегралами. Оскільки для довільних k, z

$$\Big| \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sin nz \Big| \leq C,$$

де стала C не залежить від k, z (див., наприклад, [23, формула (30.8)]), та

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sin n(t-s) \sin nx \sin ny = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sin n(t-s) (\cos n(x-y) - \cos n(x+y)) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}(\sin n(t-s+x-y)+\sin n(t-s-x+y)-$$
$$-\sin n(t-s+x+y)-\sin n(t-s-x-y)),$$

то

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}\sin n(t-s)\sin nx\sin ny\right|\le C,$$

де C не залежить від x, t, y, s та k.

Тут і надалі за допомогою C позначаємо сталу, точне значення якої несуттєве.

Зауваження 1. Маємо (див., наприклад, [22, формула (2.8), розділ I])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nz=\frac{\pi-z}{2},\quad 0<z<2\pi, \tag{4}$$

де для інших z права частина продовжується за періодичністю (і буде непарною). У точках $z=2k\pi$ рівність (4) порушується, сума ряду є нулем. Нагадаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nz$ є рядом Фур'є функції $\frac{\pi-z}{2}$ на множині $[0,2\pi]$. Ряди Фур'є стохастичної міри μ розглянуто, наприклад, у [24].

Таким чином,

$$\mathcal{S}(t-s,x,y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\Big(\sin n(t-s+x-y)+\sin n(t-s-x+y)-$$
$$-\sin n(t-s+x+y)-\sin n(t-s-x-y)\Big). \tag{5}$$

Для випадку, коли всі аргументи лежать у $(0,2\pi)$, маємо

$$\mathcal{S}(t-s,x,y)=\frac{1}{4\pi}\Big(\pi-(t-s+x-y)+\pi-(t-s-x+y)-$$
$$-\pi+(t-s+x+y)-\pi+(t-s-x-y)\Big)=0\,.$$

Зокрема, $\mathcal{S}(t-s,x,y)$ є розривною в точках $t-s\pm x\pm y=2k\pi$.

Ми можемо використати теорему Лебега для інтеграла за dy та її аналог для стохастичного інтеграла [13, твердження 7.1.1] й отримаємо з урахуванням припущення A2 таке:

$$u(t,x)=\int_{(0,t]}d\mu_1(s)\int_{[0,\pi]}\Big(\frac{2}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\sin n(t-s)\sin nx\sin ny\Big)\sigma(s,y)\,dy=$$
$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\sin nx\int_{(0,t]}\sin n(t-s)d\mu_1(s)\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\sin ny\,dy. \tag{6}$$

Тут для кожних t, x маємо збіжність ряду за ймовірністю.

Нижче отримаємо ще один тип збіжності цього ряду.

Теорема 1. *1) Нехай виконуються A1 та A2. Тоді для кожного фіксованого t ряд* (6) *збігається в $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ з імовірністю 1, а u має модифікацію таку, що $u(t,\cdot)\in\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ м. н.*

2) Нехай справджується A2, та $\forall s\in[0,T],\ y',y''\in[0,\pi]$ виконується умова

$$|\sigma(s,y')-\sigma(s,y'')|\le L|y'-y''|^{\beta},\quad \beta>0 \tag{7}$$

(де L не залежить від s). Тоді для кожного фіксованого t ряд (6) *збігається в $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ з імовірністю 1, а u має модифікацію таку, що $u(t,\cdot)\in\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ м. н.*

3) Нехай справджується A2, за змінною y $\sigma(s,y)$ неперервна та має рівномірно обмежену варіацію: $\mathbb{V}(\sigma(s,\cdot),[0,\pi])\le C$, де C не залежить від s. Тоді для кожного фіксованого t ряд (6) *збігається в* $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ *з імовірністю 1, а u має модифікацію таку, що $u(t,\cdot)\in\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ м. н.*

Доведення. Оскільки для фіксованих $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ сума (6) є рядом Фур'є розкладу функції за ортонормованою системою $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ в $\mathsf{L}_2([0,\pi],dx)$, досить перевірити, що

$$\sum_{n\ge1}\Big(\frac{1}{n}\int_{(0,t]}\sin n(t-s)d\mu_1(s)\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\sin ny\,dy\Big)^2<\infty \text{ м. н.,} \tag{8}$$

і як модифікацію u взяти суму відповідного ряду Фур'є. Тут ми маємо суму вигляду $\sum_{n\ge1}\Big(\int_{(0,t]}f_n(s)d\mu_1(s)\Big)^2$, де

$$f_n(s)=\frac{1}{n}\sin n(t-s)\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\sin ny\,dy.$$

1) Для обмеженої σ маємо

$$\sum_{n\ge1}f_n^2(s)\le C\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Тому, при виконанні умови A1, із леми 2 отримуємо (8).

2) Нехай c_n — коефіцієнти Фур'є розкладу функції σ за ортогональною системою $\{\sin nx\}$ на $[0,\pi]$, тобто,

$$c_n=\frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\sin ny\,dy\,.$$

Також для функції $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ покладемо

$$\omega(\delta,g)=\sup_{y_1,y_2:|y_1-y_2|\le\delta}|g(y_1)-g(y_2)|$$

– модуль неперервності функції g. Тоді за нерівністю (II.4.1) із [22] маємо, що

$$|c_n|\le\frac{1}{2}\omega(\pi/n,\sigma)\,,$$

і, враховуючи умову (7), отримаємо

$$\Big|\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\sin ny\,dy\Big|\le\frac{\pi}{4}\sup_{y_1,y_2:|y_1-y_2|\le\pi/n}|\sigma(s,y_1)-\sigma(s,y_2)|\le\frac{\pi}{4}L\Big(\frac{\pi}{n}\Big)^{\beta}=\frac{C}{n^{\beta}}\,.$$

Тоді

$$|f_n(s)|\le\frac{C}{n^{1+\beta}}$$

та

$$\sum_{n\ge1}|f_n(s)|\le C\,.$$

Отже, функція $\sum_{n\ge1}|f_n(s)|$ інтегровна за μ_1 на $[0,t]$, і з леми 1 слідує виконання (8).

3) Маємо

$$\begin{aligned}f_n(s)&=-\frac{1}{n^2}\sin n(t-s)\int_{[0,\pi]}\sigma(s,y)\,d\cos ny=\\&=-\frac{1}{n^2}\sin n(t-s)\bigg(\sigma(s,y)\cos ny\Big|_0^{\pi}-\int_{[0,\pi]}\cos ny\,d\sigma(s,y)\bigg)\,,\end{aligned}$$

тому

$$|f_n(s)|\le\frac{1}{n^2}\big(2C_\sigma+\mathbb{V}(\sigma(s,\cdot),[0,\pi])\big)\le\frac{C}{n^2}.$$

Таким чином, $\sum_{n\ge1}|f_n(s)|\le C$, і з леми 1 отримуємо (8). □

4. Стохастична міра залежить від просторової змінної

У цьому розділі розглядаємо задачу Коші для хвильового рівняння (1), керованого стохастичною мірою μ_2, що задана на $\mathcal{B}([0,\pi])$, а саме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}_2(x), \quad (t,x)\in D_T, \\ u(0,x)=0, \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0, \quad x\in[0,\pi], \\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, \quad t\in[0,T], \end{cases}$$

у м'якому сенсі:

$$u(t,x)=\int_{(0,\pi]} d\mu_2(y)\int_{[0,t]}\mathcal{S}(t-s,x,y)\sigma(s,y)\,ds =$$
$$=\int_{(0,\pi]} d\mu_2(y)\int_{[0,t]}\Big(\frac{2}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\sin n(t-s)\sin nx\sin ny\Big)\sigma(s,y)\,ds\,. \tag{9}$$

Так само, як і в попередньому розділі, використовуємо теорему Лебега для інтеграла за ds та її аналог для $d\mu_2(y)$ й отримуємо

$$u(t,x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n\ge1}\frac{1}{n}\sin nx\int_{(0,\pi]}\sin ny\,d\mu_2(y)\int_{[0,t]}\sigma(s,y)\sin n(t-s)\,ds. \tag{10}$$

Тут для кожних t,x маємо збіжність ряду за ймовірністю. Крім того, справедлива така теорема.

Теорема 2. *1) Нехай виконуються A1 та A2. Тоді для кожного фіксованого t ряд (10) збігається в $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ з імовірністю 1, а u має модифікацію таку, що $u(t,\cdot)\in\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ м. н.*

2) Нехай справджується A2, за змінною s функція $\sigma(s,y)$ неперервна та має рівномірно обмежену варіацію: $\mathbb{V}(\sigma(\cdot,y),[0,T])\le C$, де C не залежить від y. Тоді для кожного фіксованого t ряд (10) збігається в $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ з імовірністю 1, а u має модифікацію таку, що $u(t,\cdot)\in\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ м. н.

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1, оскільки для фіксованих $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ сума (10) є рядом Фур'є в $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$, досить перевірити, що

$$\sum_{n\ge1}\Big(\frac{1}{n}\int_{(0,\pi]}\sin ny\,d\mu_2(y)\int_{[0,t]}\sigma(s,y)\sin n(t-s)\,ds\Big)^2<\infty \text{ м. н.}, \tag{11}$$

і як модифікацію u взяти суму відповідного ряду Фур'є.

Тут ми маємо суму вигляду $\sum_{n\ge1}\Big(\int_{(0,\pi]}f_n(y)d\mu_2(y)\Big)^2$, де

$$f_n(y)=\frac{1}{n}\sin ny\int_{[0,t]}\sigma(s,y)\sin n(t-s)\,ds.$$

1) За припущенням A2 функція σ обмежена, тому

$$\sum_{n\ge1}f_n^2(y)\le C\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}<\infty\,.$$

Тоді з A1 та леми 2 отримуємо (11).

2) Маємо

$$f_n(y)=\frac{1}{n^2}\sin ny\int_{[0,t]}\sigma(s,y)\,d\cos n(t-s)=$$

$$= \frac{1}{n^2} \sin ny \Big(\sigma(s,y) \cos n(t-s) \Big|_0^t - \int_{[0,t]} \cos n(t-s)\, d\sigma(s,y) \Big)$$

та

$$|f_n(y)| \le \frac{1}{n^2}(2C_\sigma + \mathbb{V}(\sigma(\cdot,y),[0,T])) \le \frac{C}{n^2}.$$

Отже, $\sum_{n\ge1} |f_n(s)| \le C$, і з леми 1 отримуємо (11). □

5. Стохастична міра залежить від часової та просторової змінних

У цьому розділі розглядаємо задачу Коші для хвильового рівняння (1), керованого стохастичною мірою μ_3, що задана на $\mathcal{B}(\bar{D}_T)$, а саме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \sigma(t,x)\,\dot{\mu}_3(t,x), \quad (t,x) \in D_T, \\ u(0,x) = 0, \quad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \end{cases}$$

у м'якому сенсі:

$$u(t,x) = \int_{D_t} \mathcal{S}(t-s,x,y)\sigma(s,y)d\mu_3(s,y) =$$
$$= \int_{D_t} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n\ge1} \frac{1}{n} \sin n(t-s) \sin nx \sin ny \right) \sigma(s,y) d\mu_3(s,y)\,. \tag{12}$$

За аналогом теореми Лебега для стохастичного інтеграла отримуємо

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n\ge1} \frac{1}{n} \sin nx \int_{D_t} \sigma(s,y) \sin n(t-s) \sin ny \, d\mu_3(s,y). \tag{13}$$

Тут для кожних t, x маємо збіжність ряду за ймовірністю, а також справджується така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються A1 та A2. Тоді для кожного фіксованого* $t \in [0,T]$ *ряд* (13) *збігається в* $\mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ *з імовірністю 1, а* u *має модифікацію таку, що* $u(t,\cdot) \in \mathsf{L}_2((0,\pi],dx)$ *м. н.*

Доведення. Аналогічно до доведення теорем 1 та 2, досить показати, що для фіксованих $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ маємо

$$\sum_{n\ge1} \Big(\frac{1}{n} \int_{D_t} \sigma(s,y) \sin n(t-s) \sin ny \, d\mu_3(s,y) \Big)^2 < \infty \text{ м. н.}, \tag{14}$$

і як модифікацію u взяти суму відповідного ряду Фур'є.

Тут ми маємо суму вигляду $\sum_{n\ge1} \Big(\int_{D_t} f_n(s,y)\, d\mu_3(s,y) \Big)^2$, де

$$f_n(s,y) = \frac{1}{n} \sigma(s,y) \sin n(t-s) \sin ny\,.$$

Оскільки за A2 функція σ обмежена, то

$$\sum_{n\ge1} f_n^2(s,y) \le C \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

та із припущення A1 і леми 2 отримуємо (14). □

6. Принцип усереднення для рівняння коливань струни

Розглядаємо випадок, коли стохастична міра μ задана на $\mathcal{B}([0,\pi])$, а саме, задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} + \sigma(t/\varepsilon,x)\,\dot\mu(x), \quad (t,x)\in D_T, \\ u_\varepsilon(0,x)=0, \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon(0,x)}{\partial t}=0, \quad x\in[0,\pi], \\ u_\varepsilon(t,0)=u_\varepsilon(t,\pi)=0, \quad t\in[0,T], \end{cases}$$

у м'якому сенсі:

$$u_\varepsilon(t,x)=\int_{(0,\pi]} d\mu(y)\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)\sigma(s/\varepsilon,y)\,ds. \tag{15}$$

Зауважимо, що в цьому розділі ми розглядаємо функцію σ, визначену на множині $\mathbb{R}_+\times[0,\pi]$. На цю функцію будемо накладати таку умову.

Припущення A2*. $\sigma:\mathbb{R}_+\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$ *вимірна та обмежена:* $|\sigma(s,y)|\le C_\sigma$.

Припустимо, що існує така границя:

$$\bar\sigma(y)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sigma(s,y)\,ds.$$

Легко бачити, що, якщо припущення A2* виконується для σ, то функція $\bar\sigma$ теж задовольняє A2*. Крім того, у цьому випадку функція $H_\sigma(r,y)=\sigma(r,y)-\bar\sigma(y)$, $r\in\mathbb{R}_+,\ y\in[0,\pi]$ також обмежена.

Покажемо, що при $\varepsilon\to 0+$ розв'язок рівняння (15) прямує до розв'язку усередненого рівняння

$$\bar u(t,x)=\int_{(0,\pi]} d\mu(y)\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)\bar\sigma(y)\,ds. \tag{16}$$

Будемо розглядати наступне припущення.

Припущення A 3. *Функція* $G_\sigma(r,y)=\int_0^r(\sigma(s,y)-\bar\sigma(y))\,ds$, $r\in\mathbb{R}_+$, $y\in[0,\pi]$, *обмежена.*

Це виконується, наприклад, якщо $\sigma(s,y)$ періодична за s для кожного фіксованого y, та множина значень мінімального періоду обмежена.

Лема 3. *Нехай виконуються A2* і A3. Тоді* $\forall t\in[0,T]$, $x,y\in[0,\pi]$, $\varepsilon>0$ *виконується*

$$\left|\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(y))\,ds\right|\le C\varepsilon, \tag{17}$$

де константа C *не залежить від* t,x,y.

Доведення. Враховуючи зауваження 1, можна вибрати таку функцію $\mathcal{S}_1(t-s,x,y)$, що є неперервною справа за s, та $\mathcal{S}_1(t-s,x,y)=\mathcal{S}(t-s,x,y)$ для майже всіх $s\in[0,T]$ за мірою Лебега (точніше, окрім не більше, ніж $\left[\frac{T}{2\pi}\right]+2$ точок). Таким чином,

$$\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(y))\,ds=\int_0^t \mathcal{S}_1(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(y))\,ds=$$

$$=\int_0^t \mathcal{S}_1(t-s,x,y)\varepsilon\,dG_\sigma(s/\varepsilon,y)=$$

$$=\varepsilon\Big(\mathcal{S}_1(t-s,x,y)G_\sigma(s/\varepsilon,y)\Big|_0^t-\int_0^t G_\sigma(s/\varepsilon,y)\,d\mathcal{S}_1(t-s,x,y)\Big)=$$

$$\overset{G_\sigma(0,y)=\mathcal{S}_1(0,x,y)=0}{=} -\varepsilon\int_0^t G_\sigma(s/\varepsilon,y)\,d\mathcal{S}_1(t-s,x,y).$$

Тому

$$\left|\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(y))\,ds\right| \le \varepsilon\sup|G_\sigma|\mathbb{V}(\mathcal{S}_1,[0,t]) \overset{A3}{\le} C\varepsilon,$$

де $\mathbb{V}(\mathcal{S}_1,[0,t])$ позначає варіацію вказаної функції за аргументом r на $[0,t]$.

Пояснимо скінченність указаної варіації. Із зображення (5) та зауваження 1 випливає, що сума кожного ряду вигляду $\sum_{n\ge1}\dfrac{1}{n}\sin n(t-s\pm x\pm y)$ має на відрізку $s\in[0,t]$ не більше ніж $\left[\frac{t}{2\pi}\right]+1$ інтервалів лінійності, і тому $\mathcal{S}_1$ має варіацію на $[0,t]$ не більшу за $4\pi\left(\left[\frac{t}{2\pi}\right]+1\right)\le 2T+4\pi$.

Так ми отримаємо (17). □

Нагадаємо, що множина випадкових величин $\{\xi_\alpha\}$ називається обмеженою за ймовірністю, якщо $\sup_\alpha \mathsf{P}\{|\xi_\alpha|\ge c\}\to 0$, $c\to\infty$.

Маємо такі результати про прямування u_ε до $\bar u$ при $\varepsilon\to 0+$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови A2* та A3. Тоді для u_ε з (15) та $\bar u$ з (16) набір випадкових величин*

$$\left\{\frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon(t,x)-\bar u(t,x)|,\ \ \varepsilon>0,\ \ (t,x)\in[0,T]\times[0,\pi]\right\}$$

обмежений за ймовірністю.

Доведення. Маємо, що

$$\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon(t,x)-\bar u(t,x)) = \int_{(0,\pi]} d\mu(y)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(t,x))\,ds.$$

Із (17) випливає, що функції

$$g_{t,x}(y)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mathcal{S}(t-s,x,y)(\sigma(s/\varepsilon,y)-\bar\sigma(t,x))\,ds$$

рівномірно обмежені. Тоді відповідні значення інтегралів за $d\mu$ обмежені за ймовірністю (це випливає, наприклад, із [13, твердження 7.1.1 (iv)]). □

Із цієї теореми легко отримуємо наслідок.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови A2* та A3. Тоді для u_ε з (15) та $\bar u$ з (16), $(t,x)\in[0,T]\times[0,\pi]$ і для кожного $\alpha<1$ виконується*

$$\frac{1}{\varepsilon^\alpha}|u_\varepsilon(t,x)-\bar u(t,x)| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,\quad \varepsilon\to 0+.$$

7. Подяка

Автори щиро вдячні рецензентам за слушні зауваження та поради, які допомогли покращити текст статті.

Список літератури

1. L. I. Rusaniuk, G. M. Shevchenko, *Wave equation for a homogeneous string with fixed ends driven by a stable random noise*, Theory Probab. Math. Statist., **98** (2019), 171–181.
2. E. Orsingher, *Randomly forced vibrations of a string*, Annales de l'I. H. P., section B, **18** (1982), no. 4, 367–394.
3. D. Khoshnevisan, E. Nualart, *Level sets of the stochastic wave equationdriven by a symmetric Lévy noise*, Bernoulli, **14** (2008), no. 4, 899–925.

4. L. Pryhara, G. Shevchenko, *Wave equation with a coloured stable noise*, Random Operators and Stochastic Equations, **25** (2017), no. 4, 249–260.
5. L. I. Rusaniuk, G. M. Shevchenko, *Wave equation with stable noise*, Theory Probab. Math. Statist., **96** (2018), no. 1, 145–157.
6. I. M. Bodnarchuk, *Wave equation with a stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **94** (2017), 1–16.
7. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko *Wave equation in a plane driven by a general stochastic measure*, Theory Probab. Math. Statist., **98** (2019), 73–90.
8. I. M. Bodnarchuk, V. M. Radchenko *Wave equation in three-dimensional space driven by a general stochastic measure*, Teor. Imovir. Matem. Statist., **100** (2019), 43–59. (Ukrainian)
9. J. Duan, W. Wang, *Effective Dynamics of Stochastic Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 1992.
10. P. Gao, *Averaging principle for stochastic Korteweg-de Vries equation*, J. Differential Equations, In Press, https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.07.012
11. V. M. Radchenko *Averaging principle for heat equation driven by general stochastic measure*, Statist. Probab. Lett., **146** (2019), 224–230.
12. V. Radchenko, *Averaging principle for equation driven by a stochastic measure*, Stochastics, **91** (2019), no. 6, 905–915.
13. S. Kwapień, W. A. Woyczyński, *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, Boston, 1992.
14. Y. Mishura, *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Topics*, Lecture Notes in Mathematics, **1929**. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
15. C. Tudor, *On the Wiener integral with respect to a sub-fractional Brownian motion on an interval*, J. Math. Anal. Appl., **351** (2009), 456–468.
16. L. Drewnowski, *Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III*, Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys., **20** (1972), 439–445.
17. V. Radchenko, *Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure*, Studia Math., **194** (2009), no. 3, 231–251.
18. G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapmen & Hall, Boca Raton, 1994.
19. V. N. Radchenko *Sample functions of stochastic measures and Besov spaces*, Theory Probab. Appl., **54** (2010), no. 1, 160–168.
20. P. L. Chow, *Stochastic partial differential equations*, Chapman and Hall/CRC, 2014.
21. H. Fu, L. Wan, J. Liu, *Strong convergence in averaging principle for stochastic hyperbolic–parabolic equations with two time-scales*, Stoch. Proc. Appl., **125** (2015), no. 8, 3255–3279.
22. A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, 2002.
23. N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series. Vol. 1*, Pergamon Press, Oxford–New York, 1964.
24. V. M. Radchenko, N. O. Stefans'ka, *Fourier and Fourier-Haar series for stochastic measures*, Theory Probab. Math. Statist., **96** (2018), 159–167.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

Кафедра математичного аналізу, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: vradchenko@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 14.08.2019

EQUATION FOR VIBRATIONS OF A FIXED STRING DRIVEN BY A GENERAL STOCHASTIC MEASURE

I. M. BODNARCHUK, V. M. RADCHENKO

Abstract. Equation for vibrations of a string with fixed ends driven by a general stochastic measure is investigated in three cases: the stochastic measure depends on time variable, on space variable and on the set of both variables. Averaging principle is considered and the rate of convergence to the solution of the averaged equation is evaluated.