Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 49–62

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 49–62

УДК 519.21

ВЛАСТИВОСТІ СТРОГО φ-СУБГАУССОВИХ ПРОЦЕСІВ КВАЗІДРОБОВОГО ЕФЕКТУ

О. І. ВАСИЛИК

Анотація. У роботі досліджуються властивості строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, породженого випадковим процесом ξ та функцією відгуку g. Отримано умови належності таких випадкових процесів зваженим просторам неперервних функцій. Виведено оцінки для розподілів супремумів строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту.

Ключові слова і фрази. Дробовий шум, процеси дробового ефекту, розподіл супремуму процесу, φ-субгауссові процеси.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 60G07, 60G17, 60F10, 60H05, 60K40.

1. Вступ

Простори $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин і процесів, які є природним узагальненням просторів гауссових та субгауссових випадкових функцій, уперше розглядалися у 1985 році у статті Козаченка та Островського [9]. У монографії Булдигіна та Козаченка [1] наведено фундаментальні властивості випадкових величин та процесів із просторів $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Подальший розвиток теорії φ-субгауссових випадкових процесів представлено у роботах [7, 11, 13, 14, 16, 17]. Оскільки клас φ-субгауссових випадкових процесів є більш загальним, ніж класи гауссових та субгауссових процесів, то такі процеси зручно застосовувати для моделювання реальних випадкових процесів у теорії черг, фінансовій математиці, фізиці.

У цій статті деякі результати, отримані для φ-субгауссових процесів, застосовано до процесів дробового ефекту. Процеси дробового ефекту (або дробового шуму) є математичними моделями різних явищ і досліджуються від початку XX століття. Перші роботи щодо дробового шуму опубліковані Кемпбеллом [2] та Шотткі [24], але фундаметальні результати з'явилися через багато років у роботах [19–21]. Зараз процеси дробового ефекту застосовуються не тільки у фізиці, а й у страхуванні, фінансовій математиці, теорії телекомунікаційних мереж (наприклад, див. [8, 22, 23] та посилання у цих роботах).

У класичній моделі дробового ефекту припускається, що в деяку систему надходять імпульси згідно зі стандартним пуассонівським процесом, величини реакції (відгуку) на імпульс є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, незалежними від пуассонівського процесу надходження імпульсів, а після моменту імпульсу реакція «затухає» згідно з експоненціальним законом розподілу. Але із часом з'явилося дуже багато варіацій цієї моделі. У роботах [1, 3] розглянуто дійснозначний однорідний центрований випадковий процес із незалежними приростами $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$, визначений на стандартному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, та дійснозначна функція $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$, яка задовольняє умову $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du < \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, називається *процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g.* У роботах [4, 5] та монографіях [1, 3] досліджувалися властивості передгауссових процесів дробового ефекту.

У цій роботі розглядається випадок, коли $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ є таким дійснозначним центрованим процесом із некорельованими приростами, що $E(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Якщо ξ є строго φ-субгауссовим процесом, то породжений ним процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$ називатимемо строго φ-субгауссовим процесом квазідробового ефекту. У статті [25] отримано оцінки розподілів супремумів та умови вибіркової неперевності таких процесів, визначених на компакті. Тепер будемо досліджувати властивості строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту, визначених на всій дійсній осі. Зокрема, розглянемо умови, за яких строго φ-субгауссові процеси квазідробового ефекту належать зваженому простору $C_0(\mathbb{R}, q)$ неперервних функцій f таких, що $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} q(t)|f(t)| < \infty$ та $q(t)f(t) \;\to\; 0$ при $|t| \to \infty$, де $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ — деяка неперервна функція така, що $\forall t \in \mathbb{R}: \ 0 < q(t) < 1$.

Простір $C_0(\mathbb{R}, q)$ є сепарабельним банаховим простором, тому, зокрема, слабка збіжність у цьому просторі еквівалентна збіжності скінченновимірних розподілів і щільності деякої сім'ї випадкових процесів. Наприклад, властивості випадкових процесів у таких просторах використовувались у роботі [12] для дослідження моделі телетрафіку, в якій черга утворювалась гауссовим вхідним потоком, і завдання полягало в тому, щоб отримати оцінки розподілу довжини черги, імовірності переповнення буферу та умови, за яких сім'я процесів, що утворюють вхідний потік, задовольняє принцип великих відхилень.

Ця робота складається зі вступу та трьох розділів. У розділі 2 наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$. Розділ 3 містить інформацію про строго φ-субгауссові процеси квазідробового ефекту. Основні результати представлено у розділі 4, зокрема, отримано умови належності таких випадкових процесів зваженим просторам неперервних функцій та виведено оцінки для розподілів супремумів строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту.

2. Деякі відомості з теорії φ-субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведено основні поняття та деякі необхідні результати щодо випадкових величин та процесів із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ [1, 7].

2.1. **Простір** $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 2.1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається *N-функцією Орлича*, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ при $x \to 0$ та $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$.

Означення 2.2. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ — деяка N-функція Орлича. Функція φ^* така, що $\varphi^*(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$, $x \geq 0$, називається перетворенням Юнга–Фенхеля функції φ.

Приклад 2.1. Якщо $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 1$, то $\varphi^*(x) = \frac{|x|^q}{q}$, де q таке число, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Якщо $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi^*(x) = (|x| + 1)\ln(|x| + 1) - |x|$.

Умова Q. Для N-функції φ виконується *умова Q*, якщо

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = C > 0.$$

Можливо, що $C = +\infty$.

У книзі [18] міститься детальна інформація щодо N-функцій Орлича та їх властивостей.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — це стандартний імовірнісний простір.

Означення 2.3. Нехай φ — N-функція Орлича, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ (простору φ-субгауссових випадкових величин), якщо $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp(\lambda\xi) \leq \exp(\varphi(a\lambda)).$$

Теорема 2.1 [1]. *Простір* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *є простором Банаха з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda\neq 0} \frac{\varphi^{-1}(\ln \mathsf{E}\exp(\lambda\xi))}{|\lambda|}$$

та для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\exp(\lambda\xi) &\leq \exp(\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))), \\ (\mathsf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} &\leq C\tau_\varphi(\xi), \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $C > 0$ *— деяка стала.*

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то простір $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega) = \mathrm{Sub}(\Omega)$ називається простором субгауссових випадкових величин.

Означення 2.4. Нехай (T, ρ) — деякий псевдометричний або метричний простір. Метричною ентропією (відносно псевдометрики/метрики ρ) називається функція

$$H(\varepsilon) := \ln N_{(T,\rho)}(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

де $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ — це метрична масивність множини T, тобто, кількість елементів у найменшому ε-покритті цієї множини.

Приклад 2.2. Якщо $T = [a, b]$ та ρ — це евклідова відстань, то

$$\ln\left(\max\left\{\frac{b-a}{2\varepsilon}, 1\right\}\right) \leq H_{(T,\rho)}(\varepsilon) \leq \ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon} + 1\right),\ \varepsilon > 0.$$

Означення 2.5. Випадковий процес $X = (X(t), t \in T)$ є φ-субгауссовим (тобто, належить простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$), якщо для всіх $t \in T$ випадкові величини $X(t) \in \mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, то такий процес називається субгауссовим.

Приклад 2.3. Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим.

2.2. **Строго φ-субгауссові випадкові процеси.**

Означення 2.6. Сім'я Δ випадкових величин із простору $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою (позначається як $\Delta \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$, та для довільних $\lambda_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(\mathsf{E}\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Стала C_Δ називається визначальною сталою сім'ї Δ.

Теорема 2.2 [17]. *Нехай* Δ *— строго* φ*-субгауссова сім'я випадкових величин. Тоді лінійне замикання сім'ї* Δ *у просторі* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *також є строго* φ*-субгауссовою сім'єю випадкових величин із тією ж визначальною сталою.*

Означення 2.7. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим (тобто, $X \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$), якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу X та позначається C_X.

2.3. **Необхідні результати щодо φ-субгауссових випадкових процесів.** Для того, щоб отримати основні результати цієї роботи, використовуються деякі властивості φ-субгауссових випадкових процесів, виведені у роботах [13] та [14].

Нехай (T,ρ) — сепарабельний псевдометричний простір, який можна розбити на зліченну кількість компактних множин, котрі позначимо через B_l, $l=\overline{1,\infty}$, тобто $T=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}B_l$.

Означення 2.8. Нехай $q=\{q(t),t\in T\}$ — така неперервна функція, що $q(t)>0$ для всіх $t\in T$. Простір $C(T,q)$ — це простір неперервних функцій f на T таких, що $\sup\limits_{t\in T}q(t)|f(t)|<\infty$. Простір $C_0(\mathbb{R},q)$ — це простір неперервних функцій f, для яких $\sup\limits_{t\in T}q(t)|f(t)|<\infty$ та $q(t)f(t)\ \to\ 0$ при $|t|\to\infty$.

Розглянемо сепарабельний φ-субгауссовий випадковий процес $X=\{X(t), t\in T\}$. Припустимо, що існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_l=\{\sigma_l(h),h>0\}$, що $\sigma_l(h)\to 0$, коли $h\to 0$, та для цих функцій виконуються такі нерівності
$$\sup_{\substack{\rho(t,s)\le h,\\ t,s\in B_l}}\tau_\varphi(X(t)-X(s))\le\sigma_l(h),\ l=\overline{1,\infty}. \tag{2.3}$$

Введемо такі позначення:

- $\alpha_l=\sigma_l\Big(\inf\limits_{t\in B_l}\sup\limits_{s\in B_l}\rho(t,s)\Big)$,
- $\beta=\inf\limits_{l=\overline{1,\infty}}\frac{\alpha_l}{\gamma_l}$,
- $\gamma_l=\sup\limits_{t\in B_l}\tau_\varphi(X(t))$,
- $\zeta_\varphi(v)=\frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$.

Наступні дві теореми випливають із леми 4.1, доведеної у роботі [13, с. 156], та леми 3.1 з роботи [14, с. 111] відповідно.

Теорема 2.3. *Нехай для сепарабельного φ-субгауссового випадкового процесу $X=\{X(t),t\in T\}$ виконується умова (2.3) та для розбиття $T=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}B_l$ і деякої неперервної функції $q=\{q(t),t\in T\}$ такої, що $\forall t\in T:\ 0<q(t)<1$, виконуються умови:*
$$d=\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\gamma_l<\infty, \tag{2.4}$$
$$\int_0^{\beta}\zeta_\varphi\Big(H_{B_l}\Big(\sigma_l^{(-1)}(u)\Big)\Big)\,du<\infty,\ \ l=\overline{1,\infty}, \tag{2.5}$$
$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\Bigg(\gamma_l\zeta_\varphi\Big(H_{B_l}\Big(\sigma_l^{(-1)}(p\beta\gamma_l)\Big)\Big)+ \\ +\frac{1}{(1-p)p}\int_0^{\beta\gamma_l p^2}\zeta_\varphi\Big(H_{B_l}\Big(\sigma_l^{(-1)}(u)\Big)\Big)\,du\Bigg)<\infty,\quad p\in(0,1), \tag{2.6}$$
де $\delta_l:=\sup\limits_{t\in B_l}q(t)$, $l=\overline{1,\infty}$. Тоді для довільного $x>L$ справедлива така нерівність:
$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in T}q(t)|X(t)|>x\Big\}\le 2\exp\big\{-Z^*_{p,d,d\beta}(x-L)\big\}, \tag{2.7}$$

де

$$L = L(p, \delta_l, \beta, \gamma_l) = 2\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \left(\gamma_l \zeta_\varphi \left(H_{B_l} \left(\sigma_l^{(-1)}(p\beta\gamma_l) \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-p)p} \int_0^{\beta\gamma_l p^2} \zeta_\varphi \left(H_{B_l} \left(\sigma_l^{(-1)}(u) \right) \right) du \right),$$

$Z^*_{p,d,d\beta}(x)$, $x > 0$, — *перетворення Юнга – Фенхеля функції* $Z_{p,d,d\beta}(\lambda)$:

$$Z_{p,d,d\beta}(\lambda) = \varphi\left(\frac{\lambda d}{1-p}\right)(1-p) + \varphi\left(\frac{\lambda d\beta}{1-p}\right)p, \ \lambda > 0.$$

Теорема 2.4. *Нехай для сепарабельного φ-субгауссового випадкового процесу* $X = \{X(t), t \in T\}$ *виконується умова (2.3) та існують такі точки* $w_l \in B_l$, $l = \overline{1,\infty}$, *і неперервна функція* $q = \{q(t), t \in T\}$, $0 < q(t) < 1$ $\forall t \in T$, *що виконуються умови:*

$$d_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty, \tag{2.8}$$

$$\int_0^{\varkappa_l} \zeta_\varphi \left(H_{B_l} \left(\sigma_l^{(-1)}(u) \right) \right) du < \infty, \quad l = 1, 2, \ldots, \tag{2.9}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \left(\int_0^{\varkappa_l} \zeta_\varphi \left(H_{B_l} \left(\sigma_l^{(-1)}(u) \right) \right) \right) du < \infty, \tag{2.10}$$

та $\sup\limits_l \frac{\varkappa_l}{z_l} < \infty$, *де* $z_l = \tau_\varphi(X(w_l))$, $\varkappa_l = \sigma_l\left(\sup\limits_{t\in B_l} \rho(t, w_l)\right)$, $\delta_l = \sup\limits_{t \in B_l} q(t)$, $l = \overline{1,\infty}$. *Тоді для довільних* $\varepsilon > B$, $p \in (0,1)$, *де*

$$B = \frac{2}{p(1-p)} \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l \int_0^{p\varkappa_l} \zeta_\varphi \left(H_{B_l} \left(\sigma_l^{(-1)}(u) \right) \right) du,$$

справедлива нерівність

$$\mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in T} q(t)|X(t)| \geq \varepsilon \right\} \leq 2\exp\{-Q^*(\varepsilon - B)\}, \tag{2.11}$$

де $Q^*(u)$, $u > 0$, — *перетворення Юнга – Фенхеля функції*

$$Q(\lambda) = \varphi\left(\frac{\lambda d_2}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\delta_l z_l}{d_2} \varphi\left(\frac{\lambda d_2 \varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p, \ \lambda > 0.$$

Наслідок 2.1. *Якщо φ-субгауссовий випадковий процес* X *є неперервним та задовольняє умови теореми 2.3 або теореми 2.4, то він належить простору* $C(T, q)$ *з імовірністю 1, де* $q = \{q(t), t \in T\}$ — *така неперервна додатна «вагова» функція, що* $q(t) < 1$, $t \in T$. *(Щодо умов неперервності φ-субгауссових випадкових процесів див. [15, 25]).*

Зауваження 2.1. В умовах (2.5)–(2.6) теореми 2.3 та (2.9)–(2.10) теореми 2.4 відповідні інтеграли мають особливість у точці 0, тобто, виконання цих умов залежить від властивостей функцій σ_l, які, у свою чергу, пов'язані із супремумами норм приростів процесу X на відповідних множинах розбиття простору T. Тому точки $w_l \in B_l$, $l = \overline{1,\infty}$, можна обирати, керуючись міркуваннями точності результуючих оцінок та/або зручності обчислень.

3. Строго φ-субгауссові процеси квазідробового ефекту

Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — дійснозначний центрований випадковий процес з некорельованими приростами, визначений на стандартному ймовірнісному просторі, та

$$\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s, \quad t > s \in \mathbb{R}.$$

Нехай $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$ — дійснозначна функція, яка задовольняє умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Означення 3.1. Будемо називати процес

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

процесом дробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g, де інтеграл у (3.2) визначений у середньому квадратичному.

Зауваження 3.1. У деяких джерелах процеси дробового ефекту також називають дробовими процесами [1, 3].

Коваріаційна функція процесу X має вигляд

$$\mathsf{E}X(t)X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)g(s,u)du, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Наступна лема, доведена у роботі [25], дає нам можливість розглядати строго φ-субгауссові процеси вигляду (3.2).

Лема 3.1. *Нехай $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R})$ — строго φ-субгауссовий випадковий процес із некорельованими приростами та $\mathsf{E}(\xi(t) - \xi(s))^2 = t - s$, $t > s \in \mathbb{R}$. Тоді процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, теж є строго φ-субгауссовим процесом та для довільних $t, s \in \mathbb{R}$*

$$\tau_\varphi(X(t)) \le c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du \right)^{1/2}, \tag{3.3}$$

$$\tau_\varphi(X(t) - X(s)) \le c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t,u) - g(s,u))^2 du \right)^{1/2}, \tag{3.4}$$

де c_ξ — визначальна стала процесу ξ.

Приклад 3.1. Як відомо [6, 10], вінерівський процес $W(t)$, $t \ge 0$, має незалежні прирости, $\mathsf{E}(W(t) - W(s))^2 = t - s$, $t > s \ge 0$, та для $t \in [0,1]$ його можна зобразити у вигляді випадкового ряду

$$W(t) = t\eta_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \eta_k, \tag{3.5}$$

де η_k, $k \ge 0$, — незалежні стандартні гауссові випадкові величини.

Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\pi)^2} < \infty$, то ряд у зображенні (3.5) збіжний у середньому квадратичному. Якщо замість η_k, $k \ge 0$, у цей розклад підставити незалежні строго φ-субгауссові випадкові величини $\{\xi_k, k \ge 0\}$ такі, що $\mathsf{E}\xi_k^2 = 1 \, \forall k \ge 0$, то випадковий процес

$$\xi(t) = t\xi_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi t}{k\pi} \xi_k, \; t \in [0,1],$$

буде строго φ-субгауссовим випадковим процесом із тією ж визначальною сталою, що й для сім'ї $\{\xi_k,\ k \geq 0\}$ (див. [17, приклад 2.4, с. 37]).

При цьому $\mathsf{E}(\xi(t)-\xi(s))^2 = t-s,\ t>s\in[0,1]$.

Означення 3.2. Будемо називати процес $X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$ *строго φ-субгауссовим процесом квазідробового ефекту*, якщо ξ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом.

4. Основні результати

Нехай $T \equiv \mathbb{R}$ та $\rho(t,s) = |t-s|,\ t,s\in\mathbb{R}$. Розіб'ємо $\mathbb{R}$ на зліченну кількість неперетинних множин: $\mathbb{R}=\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$, де $B_l=[b_l,b_{l+1})$, $b_l<b_{l+1}$, $l=\overline{1,\infty}$.

Теорема 4.1. *Нехай для сепарабельного строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t\in\mathbb{R}$, існують такі функції $r_l=(r_l(h),\ h\geq 0)$, $l=\overline{1,\infty}$, та $k=(k(u), u\in\mathbb{R})$, що для функції відгуку g виконуються нерівності:*

$$|g(t,u)-g(s,u)| \leq r_l(|t-s|)k(u), \quad t,s\in B_l,\ l=\overline{1,\infty},\ u\in\mathbb{R}, \tag{4.1}$$

причому r_l є такими невід'ємними неперервними монотонно зростаючими функціями, що $r_l(h)\to 0$ при $h\to 0$, а функція k є невід'ємною неперервною і задовольняє умову $\int_{\mathbb{R}} k^2(u)du<\infty$.

Нехай виконуються такі умови:

$$d_1=\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\gamma_l<\infty, \tag{4.2}$$

$$\int_0^{\beta}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du<\infty,\quad l=\overline{1,\infty}, \tag{4.3}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\left(\gamma_l\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cp\beta\gamma_l)}+1\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-p)p}\int_0^{\beta\gamma_l p^2}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right)<\infty,\quad p\in(0,1), \tag{4.4}$$

де $c=\left(c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac12}\right)^{-1}$, $\delta_l=\sup\limits_{t\in[b_l,b_{l+1})} q(t)$, та $q=\{q(t),t\in\mathbb{R}\}$ — деяка неперервна функція така, що $\forall t\in\mathbb{R}:\ 0<q(t)<1$.

Тоді для довільного $x>L_1$ справедлива така нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)|>x\right\}\leq 2\exp\left\{-Z^*_{p,d_1,d_1\beta}(x-L_1)\right\}, \tag{4.5}$$

де

$$L_1=2\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\left(\gamma_l\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cp\beta\gamma_l)}+1\right)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(1-p)p}\int_0^{\beta\gamma_l p^2}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right),$$

$Z^*_{p,d_1,d_1\beta}(x)$, $x>0$, — *перетворення Юнга – Фенхеля функції*

$$Z_{p,d_1,d_1\beta}(\lambda)=\varphi\left(\frac{\lambda d_1}{1-p}\right)(1-p)+\varphi\left(\frac{\lambda d_1\beta}{1-p}\right)p,\ \lambda>0.$$

Доведення. Якщо виконується умова (4.1), то з того, що X є строго φ-субгауссовим процесом, випливає, що

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h,\\ t,s\in B_l}}\tau_\varphi(X(t)-X(s))\le \sup_{\substack{|t-s|\le h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(g(t,u)-g(s,u))^2du\right)^{\frac12}\le$$

$$\le \sup_{\substack{|t-s|\le h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(r_l(|t-s|)k(u))^2du\right)^{\frac12}=\sup_{\substack{|t-s|\le h,\\ t,s\in B_l}} c_\xi r_l(|t-s|)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac12}\le$$

$$\le c_\xi r_l(h)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac12}=:\sigma_l(h),\quad h\ge 0. \tag{4.6}$$

Позначимо $c:=\left(c_\xi\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k^2(u)du\right)^{\frac12}\right)^{-1}$. Тоді $\sigma_l(h)=c^{-1}r_l(h)$, $h\ge0$, та $\sigma_l^{(-1)}(u)=$ $=r_l^{(-1)}(cu)$, $u\ge0$. Відповідно, коли $B_l=[b_l,b_{l+1})$, $b_l<b_{l+1}$, $l=\overline{1,\infty}$, функцію $H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)$, $u\ge0$, можна оцінити так:

$$H_{B_l}\left(\sigma_l^{(-1)}(u)\right)\le\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2\sigma_l^{(-1)}(u)}+1\right)=\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right),\ l=1,2,\ldots \tag{4.7}$$

Оскільки $\zeta_\varphi(v)=\frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)}$ — неперервна монотонно зростаюча функція, то зі збіжності інтеграла $\int_0^\beta\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du$ в умові (4.3) випливає збіжність інтеграла $\int_0^\beta\zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,\mathrm{d}u$ в умові (2.5) теореми 2.3. Аналогічно, збіжність ряду в умові (4.4) забезпечує виконання умови (2.6). Отже, якщо сепарабельний φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту X задовольняє умови (4.1)–(4.4), то для нього виконуються всі умови теореми 2.3 і, відповідно, виконується оцінка (2.7). Звідси, використовуючи наведені вище міркування та властивості функцій $Z^*_{p,d_1,d_1\beta}$ і $Z_{p,d_1,d_1\beta}$ (які, до речі, є N-функціями Орлича), отримуємо, що для $p\in(0,1)$ та для довільного $x>L_1\ge L$ справедливі такі нерівності:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}q(t)|X(t)|>x\right\}\le 2\exp\left\{-Z^*_{p,d_1,d_1\beta}(x-L)\right\}\le 2\exp\left\{-Z^*_{p,d_1,d_1\beta}(x-L_1)\right\},$$

де

$$L\le 2\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l\left(\gamma_l\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cp\beta\gamma_l)}+1\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1-p)p}\int\limits_0^{\beta\gamma_l p^2}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right):=L_1,$$

що і треба було довести. □

Зауваження 4.1. Для розбиття $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} B_l$, де $B_l = [b_l, b_{l+1})$, $b_l < b_{l+1}$, $l = \overline{1,\infty}$, та функцій $\sigma_l(h) = c_\xi r_l(h)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}}$, $h \geq 0$, можна відразу записати у більш явному вигляді параметри $\{\alpha_l, l = \overline{1,\infty}\}$:

$$\alpha_l = \sigma_l\Big(\inf_{t\in B_l}\sup_{s\in B_l}|t-s|\Big) = \sigma_l\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2}\right) = c_\xi r_l\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 4.2. *Нехай для сепарабельного строго φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, виконується (4.1) та існують такі точки $w_l \in [b_l, b_{l+1})$, $l = \overline{1,\infty}$, і неперервна функція $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$, $0 < q(t) < 1$ $\forall t \in T$, що виконуються такі умови:*

$$d_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l z_l < \infty, \tag{4.8}$$

$$\int\limits_0^{\varkappa_l} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du < \infty, \quad l = 1,2,\ldots, \tag{4.9}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{\varkappa_l} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du < \infty, \tag{4.10}$$

та $\sup\limits_l \frac{\varkappa_l}{z_l} < \infty$, *де* $\delta_l = \sup\limits_{t\in[b_l,b_{l+1})} q(t)$, $z_l = \tau_\varphi(X(w_l))$, $\varkappa_l = \sigma_l\Big(\sup\limits_{t\in[b_l,b_{l+1})} \rho(t,w_l)\Big)$, $l = \overline{1,\infty}$. *Тоді при будь-яких $p \in (0,1)$ та $\varepsilon > B^*$, де*

$$B^* = \frac{2}{p(1-p)}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du$$

справедлива нерівність

$$\mathbf{P}\Big\{\sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)| \geq \varepsilon\Big\} \leq 2\exp\{-Q^*(\varepsilon - B^*)\}, \tag{4.11}$$

де $Q^*(u)$, $u > 0$, — перетворення Юнга – Фенхеля функції

$$Q(\lambda) = \varphi\left(\frac{\lambda d_2}{1-p}\right)(1-p) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\delta_l z_l}{d_2}\varphi\left(\frac{\lambda d_2 \varkappa_l}{z_l(1-p)p}\right)p, \ \lambda > 0.$$

Доведення. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 4.1.

Якщо для сепарабельного φ-субгауссового процесу квазідробового ефекту X виконуються умови (4.1), (4.8)–(4.10), то він задовольняє умови теореми 2.4. Використовуючи оцінки (4.6) та (4.7), отримуємо твердження теореми 4.2, а саме, при будь-якому $\varepsilon > B^* \geq B$, де

$$B = \frac{2}{p(1-p)}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l} \zeta_\varphi(H_{B_l}(\sigma_l^{(-1)}(u)))\,du \leq$$

$$\leq \frac{2}{p(1-p)}\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l \int\limits_0^{p\varkappa_l} \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du := B^*,$$

виконується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}} q(t)|X(t)| \geq \varepsilon\right\} \leq 2\exp\{-Q^*(\varepsilon - B)\} \leq 2\exp\{-Q^*(\varepsilon - B^*)\},$$

що і треба було довести. □

Наслідок 4.1. *Якщо строго φ-субгауссовий процес квазідробового ефекту $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є неперервним та задовольняє умови теореми 4.1 або теореми 4.2, то з імовірністю 1 він належить зваженому простору неперервних функцій $C(\mathbb{R}, q)$, де $q = \{q(t), t \in \mathbb{R}\}$ – така неперервна додатна «вагова» функція, що $q(t) < 1$, $t \in \mathbb{R}$.*

Приклад 4.1. Розглянемо строго φ-субгауссовий сепарабельний випадковий процес $\xi = (\xi(t), t \in \mathbb{R}) \in \mathrm{SSub}_\varphi(\Omega)$ із некорельованими приростами у випадку $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Тобто, ξ є строго субгауссовим процесом, $\mathsf{E}\xi^2(t) = \tau^2(\xi(t))$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $\tau(\cdot) = \tau_\varphi(\cdot)$ — це норма у просторі субгауссових випадкових величин $\mathrm{Sub}(\Omega)$ [1]. Тоді визначальна стала $c_\xi = 1$, обернена функція $\varphi^{(-1)}(v) = \sqrt{2v}$, $v \geq 0$, та $\zeta_\varphi(v) = \frac{v}{\varphi^{(-1)}(v)} = \frac{v}{\sqrt{2v}} = \sqrt{\frac{v}{2}}$.

Нехай дійснозначна функція $g = (g(t,u), t, u \in \mathbb{R})$ має вигляд

$$g(t,u) = \frac{\sin(tu)}{|u|^\delta + 1}, \quad t, u \in \mathbb{R}, \quad \delta > 1.$$

Вона задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(tu)}{(|u|^\delta + 1)^2}du < \infty, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, процес $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, є коректно визначеним строго субгауссовим процесом квазідробового ефекту, породженим процесом ξ та функцією відгуку g.

Для функції g маємо

$$|g(t,u) - g(s,u)| = \frac{|\sin(tu) - \sin(su)|}{|u|^\delta + 1} = \frac{\left|2\sin\frac{u(t-s)}{2}\cos\frac{u(t-s)}{2}\right|}{|u|^\delta + 1} \leq$$
$$\leq 2\left|\frac{u(t-s)}{2}\right|^\alpha \frac{1}{|u|^\delta + 1} = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha|t-s|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = |t-s|^\alpha \cdot \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1} = r(t-s)k(u),$$

де

$$r(t-s) = |t-s|^\alpha, \quad k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta + 1}, \quad t, s, u \in \mathbb{R}, \delta > 1, \alpha = \min(1, \delta - 1) \in (0, 1].$$

Функція $r(h) = |h|^\alpha$, $h \in \mathbb{R}$, є саме такою, як потрібно, тобто вона невід'ємна неперервна монотонно зростаюча і така, що $r(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Функція $k(u) = \frac{2^{1-\alpha}|u|^\alpha}{|u|^\delta+1}$, $u \in \mathbb{R}$, невід'ємна неперервна і

$$\int_{\mathbb{R}} k^2(u)du = \int_{\mathbb{R}} \frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta + 1)^2}du < \infty.$$

Отже, функція g задовольняє умову (4.1).

Розглянемо процес X на інтервалі $[0, +\infty)$.

Розбиття $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{l=0}^{\infty} [b_l, b_{l+1})$ обиратимемо так, щоб послідовність $\{b_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots\}$ була монотонно зростаючою, $b_0 = 0$ та $\sup_{l\geq 0} \frac{b_l}{b_{l+1}} = b < 1$.

Для γ_l, $l=\overline{0,\infty}$, використаємо оцінку (3.3) та властивості функції g:

$$\gamma_l = \sup_{t\in[b_l;b_{l+1})} \tau_\varphi(X(t)) \le \sup_{t\in[b_l;b_{l+1})} c_\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t,u)du\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{t\in[b_l;b_{l+1})} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(tu)}{(|u|^\delta+1)^2}du\right)^{1/2} \le \sup_{t\in[b_l;b_{l+1})} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|tu|^{2\alpha}}{(|u|^\delta+1)^2}du\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{t\in[b_l;b_{l+1})} t^\alpha \left(\frac{1}{2^{2-2\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2^{2-2\alpha}|u|^{2\alpha}}{(|u|^\delta+1)^2}du\right)^{1/2} = \frac{b_{l+1}^\alpha}{2^{1-\alpha}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{1/2},$$

де $\alpha=\min(1,\delta-1)\in(0,1]$.

Використаємо позначення $c=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Тоді $\gamma_l=\frac{b_{l+1}^\alpha}{2^{1-\alpha}c}$, $l=\overline{0,\infty}$. Бачимо, що умова (4.2) тепер еквівалентна умові

$$\sum_{l=0}^{\infty}\delta_l b_{l+1}^\alpha<\infty.$$

Для $\{\alpha_l,\, l=\overline{0,\infty}\}$ маємо

$$\alpha_l = c_\xi r_l\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2}\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(b_{l+1}-b_l)^\alpha}{2^\alpha c}.$$

Для $\beta=\inf\limits_{l=\overline{0,\infty}}\frac{\alpha_l}{\gamma_l}$ отримуємо

$$\beta = \inf_{l=\overline{0,\infty}}\frac{\alpha_l}{\gamma_l} = \inf_{l=\overline{0,\infty}} 2^{1-2\alpha}\left(1-\frac{b_l}{b_l+1}\right)^\alpha = 2^{1-2\alpha}(1-b)^\alpha.$$

Тепер перевіримо, коли буде виконуватися умова (4.3):

$$\int\limits_0^\beta \zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du = \int\limits_0^\beta\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}du,$$

і цей інтеграл буде збіжний, якщо $\alpha>\frac{1}{2}$.

Тобто, для того, щоб виконувалася умова (4.3), необхідно обирати δ у виразі для функції відгуку g так, щоб $\alpha=\min(1,\delta-1)\in(\frac{1}{2},1]$.

Далі, із того, що $\beta<1$ та

$$\gamma_l\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cp\beta\gamma_l)}+1\right)\right) = \gamma_l\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cp\beta\gamma_l)^{1/\alpha}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\beta p(1-p)}\int\limits_{\beta\gamma_l p^2}^{\beta\gamma_l p}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2(cu)^{1/\alpha}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}du,$$

випливає, що доданки в умові (4.4) можна оцінити так:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\delta_l\left(\gamma_l\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cp\beta\gamma_l)}+1\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1-p)p}\int\limits_0^{\beta\gamma_l p^2}\zeta_\varphi\left(\ln\left(\frac{b_{l+1}-b_l}{2r_l^{(-1)}(cu)}+1\right)\right)du\right) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l \left(\gamma_l \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cp\beta\gamma_l)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-p)p} \int_0^{\beta\gamma_l p^2} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} du \right) \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l}{\beta p(1-p)} \int_0^{\beta\gamma_l p} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{b_{l+1} - b_l}{2(cu)^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} du =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l (b_{l+1} - b_l)^\alpha}{2^\alpha c\beta p(1-p)} \int_0^{\frac{2^\alpha c\beta\gamma_l p}{(b_{l+1}-b_l)^\alpha}} \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{v^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dv =: S_1.$$

Розглянемо верхню межу інтеграла у виразі для S_1:

$$\frac{2^\alpha c\beta\gamma_l p}{(b_{l+1} - b_l)^\alpha} = \frac{2^\alpha c\beta p}{(b_{l+1} - b_l)^\alpha} \frac{b_{l+1}^\alpha}{2^{1-\alpha} c} = \frac{\beta p}{2^{1-2\alpha}(1 - \frac{b_l}{b_{l+1}})^\alpha} \le \frac{\beta p}{2^{1-2\alpha}(1-b)^\alpha} = p.$$

Звідси маємо

$$S_1 \le \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l (b_{l+1} - b_l)^\alpha}{2^\alpha c\beta p(1-p)} \int_0^p \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{v^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dv \le$$

$$\le \frac{1}{2^\alpha c\beta p(1-p)} \int_0^p \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{v^{1/\alpha}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dv \sum_{l=0}^{\infty} \delta_l b_{l+1}^\alpha.$$

Отже, умова (4.4) теж буде виконуватися тоді, коли $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \delta_l b_{l+1}^\alpha < \infty$, як і умова (4.2).

Тепер оберемо послідовність $\{b_l,\, l = 0, 1, 2, \ldots\}$ так: $b_0 = 0$, $b_l = e^l$, $l = 1, 2, \ldots$

У випадку такого розбиття існує щонайменше одна неперервна функція $q = \{q(t), t \in [0, +\infty)\}$: $q(t) \in (0,1)\, \forall t \in [0, +\infty)$, яка дає нам можливість забезпечити виконання умов (4.2) та (4.4):

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\alpha+\varepsilon}}, t \in [0, e), \\ \frac{1}{t^{\alpha+\varepsilon}}, t \in [e, +\infty), \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Для цієї функції $\delta_0 = e^{-(\alpha+\varepsilon)}$, $\delta_l = e^{-(\alpha+\varepsilon)l}$, $l = 1, 2, \ldots$, та

$$\sum_{l=0}^{\infty} \delta_l b_{l+1}^\alpha = \frac{e^\alpha}{e^{\alpha+\varepsilon}} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha(l+1)}}{e^{(\alpha+\varepsilon)l}} = \frac{1}{e^\varepsilon} + e^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\varepsilon l}} = \frac{e^{\alpha+\varepsilon} + e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon(e^\varepsilon - 1)} =: \hat{d}_1 < \infty. \quad (4.12)$$

Це означає, що для строго субгауссового процесу квазідробового ефекту X виконуються всі умови теореми 4.1.

У нашому випадку

$$Z_{p,\hat{d}_1,\hat{d}_1\beta}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda \hat{d}_1}{1-p} \right)^2 (1-p) + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda \hat{d}_1 \beta}{1-p} \right)^2 p = \hat{c}\lambda^2,\ \lambda > 0;$$

$$Z^*_{p,\hat{d}_1,\hat{d}_1\beta}(x) = \frac{x^2}{4\hat{c}},\ x > 0; \quad \hat{c} = \frac{\hat{d}_1^{\,2}(1-p) + \hat{d}_1^{\,2}\beta^2 p}{2(1-p)^2}.$$

Отже, враховуючи наведене вище, для довільного $x > \hat{L_1}$ справедлива така нерівність:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0,+\infty)} q(t)|X(t)| > x\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(x-\hat{L_1})^2}{4\hat{c}}\right\},$$

де

$$\hat{L_1} = \frac{2\hat{d}_1}{2^{\alpha}c\beta p(1-p)}\int\limits_0^p \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{v^{1/\alpha}}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}} dv.$$

Якщо при цьому процес квазідробового ефекту X є неперервним, то з імовірністю 1 він належить зваженому простору неперервних функцій $C_0(\mathbb{R}^+, q)$.

5. Висновки

У роботі досліджено деякі властивості строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту, визначених на сепарабельному метричному просторі $(\mathbb{R}, \rho)$, де ρ — евклідова відстань. Отримано умови належності таких випадкових процесів зваженим просторам неперервних функцій $C(\mathbb{R}, q)$. Виведено оцінки для розподілів супремумів строго φ-субгауссових процесів квазідробового ефекту.

Подяка

Автор надзвичайно вдячна рецензентам за цінні зауваження та пропозиції щодо покращення цієї статті.

Список літератури

1. V. V. Buldygin, and Yu. V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes*, American Mathematical Society, Providence, RI, 257 p., 2000.
2. N. Campbell, *The study of discontinuous phenomena*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 15, 117–136; *Discontinuities in light emission*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15**, 310–328, 1909.
3. I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko, and M.M. Perestyuk, *Stochastic processes from Orlicz spaces*, Chernivtsi: "Zoloti lytavry", 212 p., 2011. (In Ukrainian)
4. I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko, *Some properties of pre-Gaussian shot noise processes*, Stochastic Analysis and Random Dynamics. International Conference. Abstracts, Lviv, Ukraine, 57–59, 2009.
5. I. V. Dariychuk, Yu. V. Kozachenko, *The distribution of the supremum of Θ-pre-Gaussian shot noise processes*, Theory of Probability and Mathematical Statistics), no. 80, 85–100, 2010.
6. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, M.: Nauka, 570p., 1977.
7. R. Giuliano Antonini, Yu. V. Kozachenko, T. Nikitina, *Space of φ-sub-Gaussian random variables*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5) **27**, 92–124, 2003.
8. D. T. Koops, O. J. Boxma, and M. R. H. Mandjes, *Networks of $\cdot/G/\infty$ Queues with Shot-Noise-Driven Arrival Intensities*, Queueing Systems, August 2016, DOI: 10.1007/s11134-017-9520-7.
9. Yu. V. Kozachenko, E. I. Ostrovsky, *Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, no. 32, 42–53, 1985.
10. Yu. Kozachenko, A. Pashko, *Accuracy and Reliability of Simulation of Random Processes and Fields in Uniform Metrics*, Kyiv, 216 p., 2016. (In Ukrainian)
11. Yu. V. Kozachenko, M. M. Perestyuk, O. I. Vasylyk, *On Uniform Convergence of Wavelet Expansions of φ-sub-Gaussian Random Process*, Random Operators and Stochastic Equations, **14**, no.3, 209–232, 2006.
12. Yu. Kozachenko, O. Vasylyk, T. Sottinen, *Path space large deviations of a large buffer with Gaussian input traffic*, Queueing Systems Theory Appl. **42**, 113–129, 2002.
13. Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik, *On the distribution of suprema of* $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ *random processes*, Theory of Stochastic Processes, **4(20)**, issue 1–2, 147–160, 1998.
14. Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasilik, *Stochastic processes of the classes* $V(\varphi,\psi)$, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **63**, 109-121, 2001.

15. Yu. V. Kozachenko, O. I. Vasylyk, *Sample pathes continuity and estimates of distributions of the increments of separable stochastic processes from the class $V(\varphi, \psi)$, defined on a compact set*, Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics and Mathematics, issue 2, 45–50, 2004. (In Ukrainian)
16. Yu. Kozachenko, R. Yamnenko, O. Vasylyk, *Upper estimate of overrunning by* $\mathrm{Sub}_\varphi(\Omega)$ *random process the level specified by continuous function*, Random Oper. Stoch. Equ., **13**, no. 2, 111–128, 2005.
17. Yu. V. Kozachenko, R. E.Yamnenko, O. I. Vasylyk, *φ-sub-Gaussian random process*, Kyiv: Vydavnycho-Poligrafichnyi Tsentr "Kyivskyi Universytet", 231 p., 2008. (In Ukrainian)
18. M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow, 1958 (in Russian). English translation: P.Noordhoff Ltd, Groningen, 249p., 1961.
19. S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, The Bell System Technical Journal, **23**, 282–332, 1944.
20. S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise*, The Bell System Technical Journal, **24**, 46–156, 1945.
21. J. Rice, *On generalized shot noise*, Advances in Applied Probability, **9**, 553–565, 1977.
22. T. Schmidt, *Catastrophe insurance modeled by shot-noise processes*, Risks, ISSN 2227-9091, MDPI, Basel, **2**, Iss. 1, 3–24, 2014, http://dx.doi.org/10.3390/risks2010003.
23. T. Schmidt, *Shot-noise processes in finance*, arXiv:1612.06616v1, 2016.
24. W. Schottky, *Uber spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitatsleitern*, Annalen der Physik, **362(23)**, 541–567, 1918.
25. O. I. Vasylyk, *Strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes*, Statistics, Optimization and Information Computing, **5**, 109–120, 2017.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: ovasylyk@univ.kiev.ua

Стаття надійшла до редколегії 31.08.2019

PROPERTIES OF STRICTLY φ-SUB-GAUSSIAN QUASI SHOT NOISE PROCESSES

O. I. VASYLYK

Abstract. In this paper, there are studied properties of a strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise process $X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t,u)d\xi(u)$, $t \in \mathbb{R}$, generated by the process ξ and the response function g. There are obtained conditions, under which such random processes belong to some weighted spaces of continuous functions. Estimates for distributions of suprema of strictly φ-sub-Gaussian quasi shot noise processes are derived.