Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 63–77

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 63–77

УДК 519.21

СТАЦІОНАРНІ ГРАНИЦІ ПРОЦЕСІВ ДРОБОВОГО ЕФЕКТУ

Г. К. ВЕРЬОВКІН, О. В. МАРИНИЧ

Анотація. У припущенні квадратичної інтегровності функції відповіді та існування дисперсії кроку випадкового блукання доводиться слабка збіжність центрованих процесів дробового ефекту до стаціонарного $\mathcal{L}_2$-процесу. Досліджено властивості граничного стаціонарного процесу.

Ключові слова і фрази. Випадкові процеси з імміграцією, $\mathcal{L}_2$-процеси, процеси дробового ефекту, стаціонарні випадкові процеси, стаціонарий процес відновлення, теорія відновлення.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60F05; Secondary 60K05.

1. Вступ та основні результати

Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних копій додатної випадкової величини (в. в.) ξ. Визначимо випадкове блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ (тут і надалі $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$), що стартує в нулі $S_0 := 0$ та має кроки $S_k - S_{k-1} = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Нехай h є дійснозначною, локально обмеженою, вимірною функцією на $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$. Покладемо

$$X(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де сума містить майже напевно (м. н.) лише скінченну кількість ненульових доданків. Випадковий процес $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ називається *процесом дробового ефекту, що побудований за процесом відновлення* або просто *процесом дробового ефекту.* Функція h називається *функцією відповіді.* Процеси дробового ефекту є підкласом *випадкових процесів з імміграцією в моменти відновлення,* які визначаються рівністю

$$Y(t) := \sum_{k=0}^{\infty} Z_{k+1}(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $(\xi_k, Z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ є послідовністю незалежних копій пари $(\xi, Z) \in (0,\infty)\times D(\mathbb{R}_+)$. У цій парі друга компонента є випадковим процесом із траєкторіями, які м. н. лежать у просторі Скорохода $D(\mathbb{R}_+)$, що складається з функцій, визначених та неперервних справа на $\mathbb{R}_+$ та зі скінченними границями зліва в усіх точках $(0,\infty)$.

Процеси дробового ефекту та випадкові процеси з імміграцією в моменти відновлення є математичною моделлю електричного струму у вакуумних трубках [19], затримок у врегулюванні страхових претензій [13], дробового ефекту в іонних каналах [14], сейсмічної активності регіону [22] та багатьох інших процесів у різних областях науки. Фактично, будь-який процес, який описує кумулятивний ефект однотипних імпульсів, що поступають у деяку систему у випадкові, але регулярно розподілені моменти часу, є випадковим процесом з імміграцією (якщо ефект імпульсу описується випадковим процесом) або процесом дробового ефекту (якщо ефект імпульсу є детермінованим). Подальші посилання на можливі застосування можна знайти, наприклад, у книзі [7] та в розділі 1.1 дисертації [16].

Одним з основних аспектів дослідження процесів дробового ефекту та випадкових процесів з імміграцією є доведення граничних теорем для таких процесів, при

$t \to \infty$. Цьому колу питань присвячено чимало робіт, опублікованих протягом останнього десятиліття. Детальний огляд літератури, а також доведення низки результатів можна знайти в розділах 1 та 2 дисертації [16]. Нижче ми наводимо короткий перелік результатів, найбільш релевантних для цієї роботи[1]:

(1) h не спадає та правильно змінюється на $+\infty$, функціональні граничні теореми для $(X(ut))_{u\ge 0}$, при $t \to \infty$, [6];
(2) $\mathbb{E}\xi < \infty$, h не зростає та правильно змінюється на $+\infty$, збіжність скінченновимірних розподілів $(X(ut))_{u\ge 0}$, при $t \to \infty$, [10];
(3) $\mathbb{E}\xi = \infty$, h не зростає та правильно змінюється на $+\infty$, функціональні граничні теореми для $(X(ut))_{u\ge 0}$, при $t \to \infty$, [9];
(4) $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, h не зростає та $h(t) \sim \mathrm{const}\cdot t^{-1/2}$ при $t \to \infty$, збіжність скінченновимірних розподілів $(X(t^u))_{u\ge 0}$, при $t \to \infty$, [8];
(5) $\mathbb{E}\xi < \infty$, $t \mapsto \mathbb{E}(|Z(t)| \wedge 1)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом, збіжність скінченновимірних розподілів $(Y(t+u))_{u\in\mathbb{R}}$, при $t \to \infty$, [11] та [15];
(6) $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim \frac{\mathrm{const}}{\log t}$, $t \mapsto h(e^t)$ правильно змінюється на $+\infty$, збіжність скінченновимірних розподілів $(X(e^{tu}))_{u\ge 0}$, при $t \to \infty$, [12].

Підкреслимо, що збіжність процесів дробового ефекту та випадкових процесів з імміграцією регулюється основним чином двома факторами: поведінкою хвоста $t \mapsto \mathbb{P}\{\xi > t\}$ при $t \to \infty$ та асимптотикою перших двох моментів процесу $(X(u))_{u\ge 0}$ при великих u.

У режимах (1), (2) та (3) процес дробового ефекту $(X(ut))_{u\ge 0}$, нормований деякою функцією, що правильно змінюється на нескінченності з додатним індексом та центрований за потреби, збігається у вказаному вище сенсі до самоподібного процесу вигляду

$$\int_{[0,\,u]} (u-y)^{\rho}\, d\mathcal{W}(y), \quad u \ge 0,$$

де $\rho \in \mathbb{R}$ та $(\mathcal{W}(y))_{y\ge 0}$ є або деяким стійким процесом (у режимах (1) та (2)), або оберненим стійким субординатором (у режимі (3)). У режимі (4) для отримання нетривіального граничного процесу для $(X(t^u))_{u\ge 0}$ все ще потрібне нормування, але виявляється, що в цьому режимі воно вже повільно змінюється на нескінченності. Граничний процес у режимі (4) є сумою броунівського руху та незалежного білого шуму. Нарешті, у випадку (5) збіжність випадкових процесів з імміграцією $(Y(t+u))_{u\in\mathbb{R}}$ справедлива без жодного центрування та/або нормування, а отже, як видно з адитивного шкалювання часу $u+t$, границею має бути деякий стаціонарний процес. Тобто,

$$(Y(t+u))_{u\in\mathbb{R}} \xrightarrow[t\to\infty]{f.d.d.} (Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}, \tag{2}$$

де випадковий процес $(Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ задовольняє

$$(Y^*(u+\tau))_{u\in\mathbb{R}} \overset{f.d.d.}{=} (Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

а $\xrightarrow{f.d.d.}$ (відповідно, $\overset{f.d.d.}{=}$) позначає збіжність (відповідно, рівність) скінченновимірних розподілів. Зауважимо, що збіжність скінченновимірних розподілів (2) можна посилити до збіжності у просторі Скорохода $D(\mathbb{R})$ за додаткових припущень про процес відповіді Z, див. теорему 1.1 у [15].

У випадку процесів дробового ефекту збіжність (2) виконується, якщо функція $t \mapsto |h(t)| \wedge 1$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $\mathbb{R}_+$. Основною метою цієї роботи є вивчення питання про те, наскільки ця умова інтегровності може бути послаблена, але так, щоб зберігалась збіжність до стаціонарного граничного процесу. Наш основний результат демонструє, що за припущення про інтегровність $t \mapsto h^2(t)$

[1] Результати пунктів (4), (5) та (6) наведено не в повній загальності.

та скінченність другого моменту ξ така збіжність справджується, але вже із центруванням, яким не можна знехтувати. За припущення $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ вказаний режим є в деякому сенсі проміжним між режимами (4) та (5).

Теорема 1. *Припустимо, що* $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty$, *а розподіл* ξ *є таким, що* S_k *має для деякого* $k \in \mathbb{N}$ *абсолютно неперервну складову*[2]. *Нехай* $t \mapsto h(t)$ *є вимірною та обмеженою на* $\mathbb{R}_+$ *функцією такою, що* $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$, *та існує невласний інтеграл Рімана*

$$\int_0^\infty h^2(y)\,dy < \infty.$$

Покладемо $\mu := \mathbb{E}\xi$. *Тоді для довільного* $m \in \mathbb{N}$ *та довільних* $-\infty < u_1 < u_2 < \cdots < < u_m < \infty$ *справджується збіжність*

$$\left(X(t+u) - \frac{1}{\mu}\int_0^{t+u} h(y)\,dy\right)_{u\in\mathbb{R}} \xrightarrow[t\to\infty]{f.d.d.} (X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}, \tag{3}$$

де стаціонарний граничний процес $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ *визначений рівністю* (12), *наведеною нижче. Стаціонарний граничний процес є процесом зі скінченним другим моментом та виконується збіжність моментів другого порядку.*

Властивості граничного стаціонарного процесу $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ та, зокрема, формула для його коваріації наведені нижче у твердженні 6.

Зауваження 2. За додаткового припущення про монотонність функції h для великих значень аргументу *одновимірна* збіжність (до деякого граничного розподілу) в теоремі 1 була доведена у статті [10]. Проте, явна конструкція граничного процесу $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$, яка наведена нижче у твердженні 6, уперше отримана в цій роботі. Іншою перевагою нашого підходу порівняно з технікою, використаною в [10], є те, що він по-перше, не вимагає монотонності функції h, а по-друге, дає змогу отримати збіжність скінченновимірних розподілів.

Наша стаття має таку структуру. У підрозділі 2.1 ми опишемо відому конструкцію стаціонарного процесу відновлення $(\nu^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$, яка знадобиться в підрозділі 2.3 для означення стаціонарного процесу дробового ефекту $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$. У підрозділах 2.2 та 2.3 ми дослідимо коваріаційну структуру процесів $(\nu^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ та $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$. Доведення теореми 1 наведено в розділі 3.

2. Стаціонарний процес відновлення та стаціонарний процес дробового ефекту

2.1. **Стаціонарний процес відновлення.** Припустимо, що $\mu < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний, тобто не зосереджений на ґратці вигляду $d\mathbb{Z}$ для деякого $d > 0$. Зауважимо, якщо розподіл ξ є таким, що S_k має абсолютно неперервну складову для деякого $k \in \mathbb{N}$, то розподіл ξ неарифметичний. Припустимо, що на ймовірнісному просторі, де задана послідовність $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, визначені такі об'єкти:

- незалежна копія $(\xi_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ послідовності $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
- в. в. ξ_0, яка не залежить від $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ та має розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi_0 \le x\} = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,x]} y\mathbb{P}\{\xi \in dy\}, \quad x \ge 0; \tag{4}$$

- в. в. U, яка не залежить від $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ та має рівномірний розподіл на $[0, 1]$.

[2] В англомовній літературі такі розподіли носять назву «spread out distributions».

Покладемо
$$S_{-k} := -(\xi_{-1} + \cdots + \xi_{-k}), \quad k \in \mathbb{N},$$
та
$$S_0^* := U\xi_0, \quad S_{-1}^* := -(1-U)\xi_0, \quad S_k^* := S_0^* + S_k, \quad S_{-k-1}^* := S_{-1}^* + S_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Точковий процес $\mathcal{R} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{S_n^*}$ (тут і надалі δ_x позначає міру Дірака в точці x) називається *стаціонарним точковим процесом відновлення. Стаціонарним процесом відновлення* $(\nu^*(t))_{t\in\mathbb{R}}$ називається процес, що визначений рівністю
$$\nu^*(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\mathbb{1}_{\{S_{k-1}^* \le t < S_k^*\}} = \inf\{k \in \mathbb{Z} : S_k^* > t\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$
тобто $\nu^*(t)$ є індексом першого атома точкового процесу $\mathcal{R}$, який потрапив у (t, ∞). Зауважимо, що справедливе представлення
$$\nu^*(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}}, & t \ge 0, \\ -\sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{\{S_{-k}^* > t\}}, & t < 0. \end{cases}$$
Відомо, див. розділ 3.10 у [17], що випадкові величини S_0^* та $-S_{-1}^*$ мають один і той самий розподіл
$$\mathbb{P}\{S_0^* \in dx\} = \mathbb{P}\{-S_{-1}^* \in dx\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)dx.$$
Із теореми 4.1 розділу 8 книги [21] випливає, що точковий процес $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}$ є інваріантним відносно зсувів, тобто $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}$ має той самий розподіл, що й $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*+\tau}$ для кожного $\tau \in \mathbb{R}$. Зокрема, міра інтенсивності цього процесу з точністю до мультиплікативної константи є мірою Лебега, а сама мультиплікативна константа μ^{-1} визначається з елементарної теореми відновлення. Таким чином,
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}(dx)\Big] = \frac{dx}{\mu}, \quad x \in \mathbb{R},$$
а тому
$$U^*(t) := \mathbb{E}\nu^*(t) = \frac{t}{\mu} = \begin{cases} \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{S_k^* \le t\}, & t \ge 0, \\ -\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\{S_{-k}^* > t\}, & t < 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$
У подальшому ми будемо використовувати U для позначення функції відновлення звичайного випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$:
$$U(t) = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{P}\{S_k \le t\}, \quad t \ge 0. \tag{7}$$
Підкреслимо, що з інваріантності стаціонарного точкового процесу відновлення відносно зсувів випливає, що стаціонарний процес відновлення $(\nu^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ має стаціонарні прирости, тобто
$$(\nu^*(u+\tau) - \nu^*(\tau))_{u\in\mathbb{R}} \overset{f.d.d.}{=} (\nu^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$$
для кожного $\tau \in \mathbb{R}$.

2.2. **Коваріація стаціонарного процесу відновлення.** У подальшому нам знадобиться формула для коваріації процесу ν^*. Нам не вдалось знайти цю формулу в наведеній загальності в літературі, хоча її окремий випадок наведено (в дещо ускладненному вигляді) у теоремі 7.2.4 книги [23][3].

[3] У формулі (2.13) згаданої теореми неправильний множник λ^3 має бути замінений на λ.

Твердження 3. *При* $t, s \geq 0$ *або* $t, s \leq 0$ *маємо*

$$\mathbb{E}\nu^*(t)\nu^*(s) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\min(|t|,|s|)} (U(|t|-y) + U(|s|-y) - 1)dy, \tag{8}$$

та

$$r^*(t,s) := \operatorname{Cov}(\nu^*(t), \nu^*(s)) =$$
$$= F(\max(|t|,|s|)) + F(\min(|t|,|s|)) - F(||t|-|s||) - \frac{1}{\mu}\min(|t|,|s|), \tag{9}$$

де

$$F(x) := \frac{1}{\mu}\int_0^x U(z)dz - \frac{x^2}{2\mu^2} = \frac{1}{\mu}\int_0^x \left(U(z) - \frac{z}{\mu}\right)dz, \quad x \geq 0. \tag{10}$$

Доведення. Припустимо спочатку, що $s, t \geq 0$. Скористаємось зображенням

$$\nu^*(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_k^* \leq u\}}, \quad u \geq 0.$$

Для $t \geq s \geq 0$ запишемо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\nu^*(s)\nu^*(t) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_i^* \leq s\}}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_j^* \leq t\}}\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \mathbb{P}\{S_i^* \leq s, S_j^* \leq t\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{i-1} \mathbb{P}\{S_i^* \leq s, S_j^* \leq t\} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \mathbb{P}\{S_i^* \leq s, S_j^* \leq t\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \mathbb{P}\{S_i^* \leq s, S_i^* + \xi_{i+1} + \cdots + \xi_j \leq t\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} \int_{[0,\,s]} \mathbb{P}\{S_{j-i} \leq t - z\}\mathbb{P}\{S_i^* \in dz\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \int_{[0,\,s]} \mathbb{P}\{S_j \leq t - z\}\mathbb{P}\{S_i^* \in dz\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} + \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,s]} U(t-z)dz,
\end{aligned}$$

де на останньому кроці ми використали означення функції відновлення (7) та формулу (6). Для підрахунку першої суми запишемо

$$\begin{aligned}
G(s) := \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} &= \frac{s}{\mu} - \mathbb{P}\{S_0^* \leq s\} + \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\mathbb{P}\{S_i^* \leq s\} = \\
&= \frac{s}{\mu} - \frac{1}{\mu}\int_0^s \mathbb{P}\{\xi > y\}dy + \sum_{i=1}^{\infty}(i-1)\mathbb{P}\{S_{i-1}^* + \xi_i \leq s\} = \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^s \mathbb{P}\{\xi \leq y\}dy + \int_{[0,\,s]} G(s-z)\mathbb{P}\{\xi \in dz\}.
\end{aligned}$$

Це рівняння відновлення має єдиний розв'язок

$$G(s) = \int_{[0,\,s]} \left(\frac{1}{\mu}\int_0^{s-z} \mathbb{P}\{\xi \leq y\}dy\right)dU(z),$$

див. лему на с. 359 параграфа 1 розділу XI книги [4]. Вигляд функції G можна спростити так:

$$G(s) = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,s]}(s-z)dU(z) - \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,s]}\left(\int_0^{s-z}\mathbb{P}\{\xi > y\}dy\right)dU(z) =$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^s U(s-y)dy - \sum_{k=0}^{\infty}\int_{[0,\,s]}\mathbb{P}\{S_0^* \le s-z\}\mathbb{P}\{S_k \in dz\} =$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^s U(s-y)dy - \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\{S_k^* \le s\} = \frac{1}{\mu}\int_0^s U(s-y)dy - \frac{s}{\mu}.$$

Поєднуючи отримані формули, бачимо, що формула (8) виконується з верхньою границею інтегрування s. Оскільки підінтегральний вираз симетричний відносно змінних s, t, отримуємо формулу (8) для довільних невід'ємних t, s. Якщо $t, s \le 0$, то скористаємось співвідношенням

$$(\nu^*(t))_{t\le 0} \overset{f.d.d.}{=} (-\nu^*(-t))_{t\le 0} = (-\nu^*(|t|))_{t\le 0},$$

з якого випливає

$$\mathbb{E}\nu^*(t)\nu^*(s) = \mathbb{E}\nu^*(|t|)\nu^*(|s|), \quad t, s \le 0.$$

Доведення формули (8) завершено. Формула (9) випливає з елементарних перетворень із використанням зображення

$$ts = \frac{\max(|t|,|s|)^2 + \min(|t|,|s|)^2 - ||t|-|s||^2}{2},$$

яке справедливе при $t, s \ge 0$ або $t, s \le 0$. □

Зауваження 4. При $s < 0 \le t$ маємо зображення

$$\mathbb{E}\nu^*(s)\nu^*(t) = \mathbb{E}U(t - S_0^*)U(|s| + S_{-1}^*),$$

яке можна надалі спростити, використавши відому формулу, див. вправу 10 на с. 386 розділу XI книги [4],

$$\mathbb{P}\{S_0^* > u, -S_{-1}^* > v\} = \frac{1}{\mu}\int_{u+v}^{\infty}\mathbb{P}\{\xi > z\}dz, \quad u, v \ge 0.$$

Проте у випадку $s < 0 \le t$ точна формула для коваріації $\mathbb{E}\nu^*(s)\nu^*(t)$ нам не потрібна.

У подальшому нам знадобиться також ряд фактів про функцію F, що визначена формулою (10).

Твердження 5. *Функція F, що визначена формулою* (10), *є неперервною та не спадає на $\mathbb{R}_+$. Якщо $\sigma^2 < \infty$ та розподіл ξ неарифметичний, то*

$$F(x) \sim \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^3}x, \quad x \to \infty.$$

Доведення. Неперервність випливає з локальної обмеженості U. Монотонність випливає з оцінки $U(z) \ge z/\mu$, $z \ge 0$, а асимптотичне співвідношення – з формули

$$\lim_{z\to+\infty}\left(U(z) - \frac{z}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu^2}. \tag{11}$$

Згадані оцінка і формула (11) наведені у формулі (3.1) розділу XI книги [4]. □

2.3. **Стаціонарний процес дробового ефекту.** Доведемо таке твердження.

Твердження 6. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді для довільного фіксованого $u \in \mathbb{R}$ стохастичний інтеграл Рімана – Стілтьєса*

$$X^*(u) := \int_{[-u,\,\infty)} h(u+y)d\left(\nu^*(y) - \frac{y}{\mu}\right) \tag{12}$$

існує в середньому квадратичному, тобто існує границя в середньому квадратичному відповідної інтегральної суми. Випадковий процес $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є стаціонарним, $\mathbb{E}X^*(u) = 0$ при $u \in \mathbb{R}$, та

$$\mathrm{Cov}(X^*(\tau), X^*(0)) = \frac{2}{\mu}\int_{[\tau,\,\infty)} h(-\tau+t)h(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt -$$
$$- \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,\infty)}\left(\int_\tau^\infty h(-\tau+t)\big(h(t-s)\mathbb{1}_{\{s\le t\}} + h(t+s)\big)dt\right)d\left(U(s) - \frac{s}{\mu}\right)$$

при $\tau \ge 0$. Процес $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є неперервним у середньому квадратичному.

Доведення. Якщо $u > 0$ то

$$\int_{[-u,\,0)} h(u+y)d\left(\nu^*(y) - \frac{y}{\mu}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(u+S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\in[-u,0)\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^u h(y)dy.$$

Перша сума має скінченний другий момент у силу оцінки

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(u+S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\in[-u,0)\}}\right)^2 \le \sup_{y\in[0,u]} |h(y)|^2\mathbb{E}(\nu^*(-u))^2 =$$
$$= \sup_{y\in[0,u]} |h(y)|^2\mathbb{E}(\nu^*(u))^2 < \infty.$$

Залишається перевірити, що інтеграл

$$\int_{[0,\,\infty)} h(u+y)d\left(\nu^*(y) - \frac{y}{\mu}\right)$$

існує в середньому квадратичному. Для цього скористаємось твердженням на с. 86 розділу 5.3 книги [3]. Помітимо, що функція r^*, яка визначена формулою (9), має локально обмежену варіацію, оскільки функція F не спадає. Тому, згідно з указаним твердженням, достатньо перевірити, що існує невласний інтеграл Рімана – Стілтьєса

$$\int_{[0,\,\infty)}\int_{[0,\,\infty)} h(u+t)h(u+s)d_{t,s}\mathrm{Cov}(\nu^*(t), \nu^*(s)). \tag{13}$$

Припустимо, що ми довели існування інтеграла (13). Тоді процес $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є стаціонарним. Дійсно, для довільних фіксованих $u_1, u_2, \ldots, u_m$ та $\tau \in \mathbb{R}$ маємо

$$(X^*(u_i+\tau))_{i=1,\ldots,m} = \left(\int_{[-u_i-\tau,\,\infty)} h(u_i+\tau+y)d\left(\nu^*(y) - \frac{y}{\mu}\right)\right)_{i=1,\ldots,m} \overset{f.d.d.}{=}$$
$$\overset{f.d.d.}{=} \left(\int_{[-u_i,\,\infty)} h(u_i+y)d\left(\nu^*(y) - \frac{y}{\mu}\right)\right)_{i=1,\ldots,m} = (X^*(u_i))_{i=1,\ldots,m},$$

де використано факт, що випадковий процес $(\nu^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ має стаціонарні прирости.

Із формули (5.3.9) на с. 88 книги [3] випливає формула для підрахунку коваріації стаціонарного процесу $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$: при $\tau \ge 0$ маємо

$$C(\tau) := \mathrm{Cov}(X^*(\tau), X^*(0)) = \mathrm{Cov}(X^*(-\tau), X^*(0)) =$$
$$= \int_{[\tau,\,\infty)}\int_{[0,\,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}\mathrm{Cov}(\nu^*(t), \nu^*(s)).$$

Замість того, щоб перевіряти існування інтеграла (13), ми обчислимо точно функцію $C(\tau)$. Із цього обчислення стане зрозуміло, як обчислити інтеграл (13), і зокрема, буде випливати його існування та скінченність. Отже, згідно з формулою (9)

$$\begin{aligned} C(\tau) = \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} & h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(\max(t,s)) + \\ &+ \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}\left(F(\min(t,s)) - \frac{1}{\mu}\min(t,s)\right) - \\ &- \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(|t-s|). \end{aligned}$$

Функція F не спадає на $\mathbb{R}_+$, див. твердження 5, тому можна визначити міри на $[\tau,\infty)\times[0,\infty)$ рівностями

$$\mu_1([0,a)\times[0,b)) = F(\max(a,b)), \quad \mu_2([0,a)\times[0,b)) = F(\min(a,b)),$$
$$\mu_3([0,a)\times[0,b)) = \min(a,b).$$

Кожна із цих мір зосереджена на діагоналі $s=t$, $s\ge\tau\ge0$, оскільки міра кожного прямокутника, що не перетинає діагональ, дорівнює нулю. Отже,

$$\begin{aligned} C(\tau) &= 2\int_{[\tau,\infty)} h(-\tau+t)h(t)dF(t) - \frac{1}{\mu}\int_{[\tau,\infty)} h(-\tau+t)h(t)dt - \\ &\quad - \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(|t-s|) = \\ &= \frac{2}{\mu}\int_{[\tau,\infty)} h(-\tau+t)h(t)\left(U(t)-\frac{t}{\mu}\right)dt - \frac{1}{\mu}\int_{[\tau,\infty)} h(-\tau+t)h(t)dt - \\ &\quad - \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(|t-s|). \end{aligned}$$

Другий інтеграл у правій частині існує як невласний інтеграл Рімана з огляду на нерівність Коші – Буняковського та припущення про інтегровність h^2, а перший — у силу тієї ж нерівності, збіжності (11) та неперервності $t\mapsto U(t)-\frac{t}{\mu}$ майже всюди. Обчислимо третій інтеграл:

$$\begin{aligned} &\int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(|t-s|) = \\ &\quad = \int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,t)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(t-s) + \\ &\qquad\qquad + \int_{[\tau,\infty)}\int_{[t,\infty)} h(-\tau+t)h(s)d_{t,s}F(s-t) = \\ &\quad = \frac{1}{\mu}\int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(t-s)\mathbb{1}_{\{s\le t\}}d\left(U(s)-\frac{s}{\mu}\right)dt + \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{\mu}\int_{[\tau,\infty)}\int_{[0,\infty)} h(-\tau+t)h(t+s)d\left(U(s)-\frac{s}{\mu}\right)dt =: \\ &\quad =: \frac{1}{\mu}\int_{[0,\infty)} H(\tau,s)d\left(U(s)-\frac{s}{\mu}\right), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} H(\tau,s) &= \int_\tau^\infty h(-\tau+t)\big(h(t-s)\mathbb{1}_{\{s\le t\}} + h(t+s)\big)dt = \\ &= \int_{\max(\tau,s)}^\infty h(t-\tau)h(t-s)dt + \int_\tau^\infty h(t-\tau)h(t+s)dt =: H_1(\tau,s)+H_2(\tau,s). \end{aligned}$$

Покажемо, що для кожного фіксованого $\tau \geq 0$ функція $s \mapsto H_2(\tau, s)$ є неперервною та обмеженою на $\mathbb{R}_+$. Обмеженість випливає з нерівності Коші – Буняковського

$$|H_2(\tau, s)| \leq \left(\int_\tau^\infty h^2(t-\tau)dt\right)^{1/2} \left(\int_\tau^\infty h^2(t+s)dt\right)^{1/2} \leq \int_0^\infty h^2(y)dy < \infty.$$

Неперервність функції $s \mapsto H_2(\tau, s)$ випливає з нерівності

$$\begin{aligned}|H_2(\tau, s_1) - H_2(\tau, s_2)| &= \left|\int_\tau^\infty h(t-\tau)(h(t+s_1) - h(t+s_2))dt\right| \leq \\ &\leq \left(\int_\tau^\infty h^2(t-\tau)dt\right)^{1/2} \left(\int_\tau^\infty (h(t+s_1) - h(t+s_2))^2 dt\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\int_\tau^\infty h^2(t-\tau)dt\right)^{1/2} \|S_{s_1}(h) - S_{s_2}(h)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)}\end{aligned}$$

та відомого факту, що напівгрупа операторів зсуву $(S_s)_{s\geq 0}$ є сильно неперервною в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+)$. Обмеженість та неперервність функції $s \mapsto H_1(\tau, s)$ на $\mathbb{R}_+$ випливає з аналогічних міркувань. Зауважимо також, що аналогічними міркуваннями доводиться неперервність функції $\tau \mapsto H(\tau, s)$ для довільного фіксованого $s \geq 0$.

Залишається скористатись твердженням, див. теорему 8 в роботі [20], що функція $s \mapsto U(s) - \frac{s}{\mu}$ має обмежену варіацію на $\mathbb{R}_+$. Отже, інтеграл

$$\int_{[0,\infty)} H(\tau, s) d\left(U(s) - \frac{s}{\mu}\right)$$

існує в сенсі Рімана – Стілтьєса. Перевіримо, що процес $(X^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є неперервним у середньому квадратичному. Для цього достатньо показати, що функція $\tau \mapsto C(\tau)$ є неперервною в нулі справа. Неперервність функції

$$\tau \mapsto \int_\tau^\infty h(-\tau+t)h(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt, \quad \tau \geq 0,$$

перевіряється так само, як неперервність функції H_2, та випливає з нерівностей

$$\begin{aligned}&\left|\int_\tau^\infty h(-\tau+t)h(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt - \int_0^\infty h^2(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt\right| \leq \\ &\quad\leq \left|\int_\tau^\infty h(-\tau+t)h(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt - \int_\tau^\infty h^2(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt\right| + \\ &\qquad\qquad + \left|\int_0^\tau h^2(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt\right| \leq \\ &\quad\leq \left(\int_0^\infty h^2(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_\tau^\infty (h(t) - h(t-\tau))^2 dt\right)^{1/2} + \\ &\qquad\qquad + \left|\int_0^\tau h^2(t)\left(U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{2}\right)dt\right|,\end{aligned}$$

де останній перехід випливає з нерівності Коші – Буняковського. Права частина цієї нерівності прямує до нуля при $\tau \to 0$ в силу (11), локальної обмеженості h та вже згаданої сильної неперервності напівгрупи операторів зсуву.

Неперервність справа функції

$$\tau \mapsto \int_{[0,\infty)} H(\tau, s) d\left(U(s) - \frac{s}{\mu}\right)$$

в нулі випливає з теореми Лебега про мажоровану збіжність, враховуючи неперервність функції $\tau \mapsto H(\tau, s)$, оцінку

$$\sup_{\tau \geq 0} |H(\tau, s)| \leq \sup_{\tau \geq 0} |H_1(\tau, s)| + \sup_{\tau \geq 0} |H_2(\tau, s)| \leq 2 \int_0^\infty h^2(y) dy$$

та обмежену варіацію функції $s \mapsto U(s) - \frac{s}{\mu}$ на $\mathbb{R}_+$. □

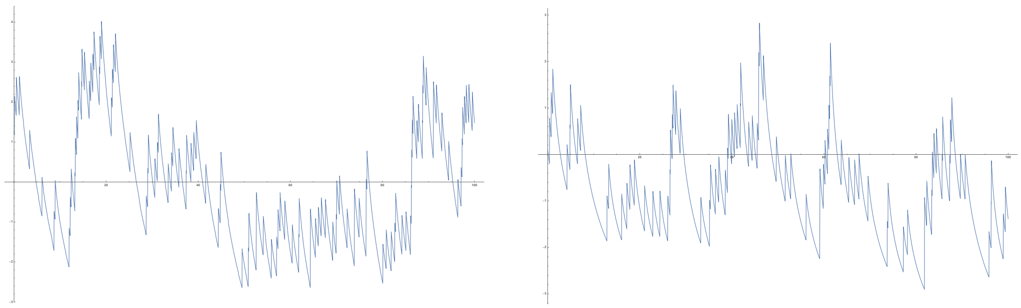

Рис. 1. Траєкторії процесу $(X^*(u))_{u \in [0,\,100]}$ для ξ, що має стандартний показниковий розподіл, та функцій відповіді $h(y) = (1+y)^{-0.55}$ (зліва) і $h(y) = (1+y)^{-0.8}$ (справа).

На рис. 1 представлені траєкторії процесу $(X^*(u))_{u \in [0,\,100]}$ для двох різних функцій відповіді та ξ, що має стандартний показниковий розподіл.

3. Доведення теореми 1

Для довільного фіксованого $t > 0$ визначимо (знакозмінну) міру

$$m_t(A) := \sum_{k \geq 0} \delta_{t - S_k}(A) - \frac{1}{\mu} \lambda(A),$$

де $A \subset \mathbb{R}$ є довільною борелівською множиною, а λ — стандартною мірою Лебега на $\mathbb{R}$. Покладемо також

$$m^*(A) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}(A) - \frac{1}{\mu} \lambda(A) = \nu^*(A) - \frac{1}{\mu} \lambda(A).$$

Маємо для довільних $u, t \in \mathbb{R}$ зображення

$$X(t+u) - \frac{1}{\mu} \int_0^{t+u} h(y) dy = \int_{[0,\, t+u]} h(z) m_{t+u}(dz) = \int_{[-u,\, t]} h(u+z) m_t(dz)$$

та

$$X^*(u) = \int_{[-u,\, \infty)} h(u+z) m^*(dz).$$

Для доведення збіжності скінченновимірних розподілів скористаємось прийомом Крамера – Уолда. Достатньо показати, що для довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{[-u_i,\, t]} h(u_i + z) m_t(dz) \xrightarrow[t \to \infty]{d} \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{[-u_i,\, \infty)} h(u_i + z) m^*(dz). \tag{14}$$

Покладемо $\tilde{h}(x) := \sum_{i=1}^m \alpha_i h(u_i + x - u_m) \mathbb{1}_{\{u_i + x - u_m \geq 0\}}$, тоді (14) можна переписати так:

$$\int_{[-u_m,\, t]} \tilde{h}(u_m + z) m_t(dz) \xrightarrow[t \to \infty]{d} \int_{[-u_m,\, \infty)} \tilde{h}(u_m + z) m^*(dz). \tag{15}$$

Оскільки функція $\tilde{h}$ задовольняє всі умови теореми 1, а отже й твердження 6, то стохастичний інтеграл у правій частині (15) має скінченний другий момент, та, зокрема, є м. н. скінченним.

Зафіксуємо $T > 0$ і перевіримо виконання трьох умов:

$$\int_{[-u_m,\,T]} \tilde{h}(u_m + z) m_t(dz) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \int_{[-u_m,\,T]} \tilde{h}(u_m + z) m^*(dz), \tag{16}$$

$$\lim_{T\to\infty} \left\| \int_{[T,\,\infty)} \tilde{h}(u_m + z) m^*(dz) \right\|_2 = 0, \tag{17}$$

та

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \left\| \int_{[T,\,t]} \tilde{h}(u_m + z) m_t(dz) \right\|_2 = 0. \tag{18}$$

З огляду на теорему 4.2 в [2] та нерівність Маркова ці умови гарантують збіжність (15). Крім того, якщо ми також покажемо, що у формулі (16) справджується збіжність других моментів, це продемонструє збіжність других моментів у формулі (15).

Формула (17) одразу випливає із твердження 6. Із леми 5.1 роботи [11] випливає, що виконується слабка збіжність

$$m_t \Longrightarrow m^*, \quad t \to \infty,$$

у просторі локально-скінченних (знакозмінних) мір на $\mathbb{R}$ із грубою топологією. Із цієї збіжності отримуємо (16), оскільки функція $z \mapsto \tilde{h}(u_m + z)\mathbb{1}_{\{z\in[-u_m,\,T]\}}$ має компактний носій. Для перевірки збіжності других моментів у (16) достатньо показати, що

$$\sup_{t\geq t_0} \mathbb{E}\left(\int_{[-u_m,\,T]} \tilde{h}(u_m + z) m_t(dz)\right)^4 < \infty$$

для деякого $t_0 > 0$. У силу локальної обмеженості h, це є наслідком ланцюжка оцінок

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\geq t_0} \mathbb{E}\left(\int_{[-u_m,\,T]} \tilde{h}(u_m + z) m_t(dz)\right)^4 \leq \\
&\quad\leq \left(\sup_{z\in[0,\,u_m+T]} \tilde{h}^4(z)\right) \sup_{t\geq t_0} \mathbb{E}\left(\int_{[-u_m,\,T]} |m_t(dz)|\right)^4 \leq \\
&\quad\leq \left(\sup_{z\in[0,\,u_m+T]} \tilde{h}^4(z)\right) \sup_{t\geq t_0} \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{t-S_k\in[-u_m,\,T]\}} + \frac{1}{\mu}\int_{[-u_m,\,T]} dz\right)^4 \leq \\
&\quad\leq 8\left(\sup_{z\in[0,\,u_m+T]} \tilde{h}^4(z)\right) \sup_{t\geq t_0} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{t-S_k\in[-u_m,\,T]\}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\mu}\int_{[-u_m,\,T]} dz\right)^4\right)
\end{aligned}$$

та спостереження

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{t-S_k\in[-u_m,\,T]\}}\right)^4 \leq \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{t-S_k\in[-u_m,\,T+1)\}}\right)^4 = \\
&\qquad = \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k\in(t-T-1,\,t+u_m]\}}\right)^4 \leq \mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k\leq(u_m+T+1)_+\}}\right)^4 < \infty,
\end{aligned}$$

яке у свою чергу є наслідком субадитивності за розподілом процесу відновлення:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq x+y\}}-\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq x\}}\leq a\right\}\leq \mathbb{P}\left\{\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq y\}}\leq a\right\},\quad x,y,a\in\mathbb{R},$$

див. формулу (5.7) на с. 58 книги [5].

Залишається перевірити співвідношення (18). Помітимо спочатку, що

$$\mathbb{E}\sum_{k\geq 0}\tilde{h}(u_m+t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t-T\}}=\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)dU(y)$$

та

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\geq 0}\tilde{h}(u_m+t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t-T\}}\right)^2=\mathbb{E}\sum_{k\geq 0}\tilde{h}^2(u_m+t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t-T\}}+$$
$$+2\mathbb{E}\sum_{0\leq i<j}\tilde{h}(u_m+t-S_i)\tilde{h}(u_m+t-S_j)\mathbb{1}_{\{S_j\leq t-T\}},$$

а також

$$2\mathbb{E}\sum_{0\leq i<j}\tilde{h}(u_m+t-S_i)\tilde{h}(u_m+t-S_j)\mathbb{1}_{\{S_j\leq t-T\}}=$$
$$=2\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)\left(\int_{(0,\,t-T-y]}\tilde{h}(u_m+t-y-z)dU(z)\right)dU(y)=$$
$$=2\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)\left(\int_{(0,\,t-T-y]}\tilde{h}(u_m+t-y-z)d\left(U(z)-\frac{z}{\mu}\right)\right)dU(y)+$$
$$+\frac{2}{\mu}\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)\left(\int_{(0,\,t-T-y]}\tilde{h}(u_m+t-y-z)dz\right)dU(y).$$

Поєднуючи наведені формули, отримуємо

$$\left\|\int_{[T,\,t]}\tilde{h}(u_m+z)m_t(dz)\right\|_2=\int_{[0,\,t]}W(t-y)dU(y)+$$
$$+\frac{2}{\mu}\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)\left(\int_{(0,\,t-T-y]}\tilde{h}(u_m+t-y-z)dz\right)dU(y)-$$
$$-\frac{2}{\mu}\left(\int_T^t\tilde{h}(u_m+z)dz\right)\left(\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}(u_m+t-y)dU(y)\right)+\frac{1}{\mu^2}\left(\int_T^t\tilde{h}(u_m+z)dz\right)^2,$$

де ми поклали, для $y\geq 0$,

$$W(y):=\left(\tilde{h}^2(u_m+y)+2\tilde{h}(u_m+y)\int_{(0,y-T]}\tilde{h}(u_m+y-z)d\left(U(z)-\frac{z}{\mu}\right)\right)\mathbb{1}_{\{t\geq T\}}.\tag{19}$$

Помітимо, що W є вимірною, обмеженою на $\mathbb{R}_+$ та $\lim_{y\to\infty}W(y)=0$ в силу скінченної варіації $z\mapsto U(z)-\frac{z}{\mu}$, обмеженості h та припущення $\lim_{y\to\infty}h(y)=0$. За варіантом ключової теореми відновлення, див. наслідок 1.3 на с. 187 книги [1],

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[0,\,t]}W(t-y)dU(y)=\frac{1}{\mu}\int_T^\infty W(y)dy=$$
$$=\frac{1}{\mu}\int_T^\infty\left(\tilde{h}^2(u_m+y)+2\tilde{h}(u_m+y)\int_{(0,y-T]}\tilde{h}(u_m+y-z)d\left(U(z)-\frac{z}{\mu}\right)\right)dy=$$
$$=\frac{1}{\mu}\int_T^\infty\tilde{h}^2(u_m+y)dy+\frac{2}{\mu}\int_{(0,\,\infty)}\left(\int_{z+T}^\infty\tilde{h}(u_m+y)\tilde{h}(u_m+y-z)dy\right)d\left(U(z)-\frac{z}{\mu}\right).$$

Вираз у правій частині наведеної формули прямує до нуля при $T \to \infty$ з огляду на обмежену варіацію на $\mathbb{R}_+$ функції $z \mapsto U(z) - \frac{z}{\mu}$, теореми Лебега про мажоровану збіжність та оцінки

$$\left|\int_{z+T}^{\infty} \tilde{h}(u_m + y)\tilde{h}(u_m + y - z)dy\right| \le \int_0^{\infty} \tilde{h}^2(u_m + y)dy < \infty,$$

яка випливає з нерівності Коші – Буняковського. Помітимо, що

$$\frac{2}{\mu}\int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{(0,\, t-T-y]} \tilde{h}(u_m + t - y - z)dz\right)dU(y) -$$
$$- \frac{2}{\mu}\left(\int_T^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)\left(\int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)dU(y)\right) + \frac{1}{\mu^2}\left(\int_T^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)^2 =$$
$$= -\frac{2}{\mu}\int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)dU(y) + \frac{1}{\mu^2}\left(\int_T^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)^2 =$$
$$= -\frac{2}{\mu}\int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)d\left(U(y) - \frac{y}{\mu}\right).$$

Для довільної борелівської множини $A \subset \mathbb{R}_+$ покладемо

$$F_2(A) := \frac{1}{\mu}\int_A \int_x^{\infty} \mathbb{P}\{\xi > y\}dy\, dx$$

і запишемо

$$\int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)d\left(U(y) - \frac{y}{\mu}\right) =$$
$$= \int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)d\left(U(y) - \frac{y}{\mu} - \frac{1}{\mu}F_2(y)\right) +$$
$$+ \int_{[0,\, t-T]} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)dF_2(y) =: I_1(t, T) + I_2(t, T).$$

З огляду на обмеженість функції $\tilde{h}$ маємо

$$\left|\tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right)\right| \le C_1 y, \quad y \in [0, t], \quad t \ge 0,$$

для деякої константи $C_1 > 0$. Також

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{h}(u_m + t - y)\left(\int_{t-y}^t \tilde{h}(u_m + z)dz\right) = 0, \quad y \in [0,\, t]. \tag{20}$$

Оскільки

$$\int_{[0,\infty)} y\left|d\left(U(y) - \frac{y}{\mu} - \frac{1}{\mu}F_2(y)\right)\right| < \infty,$$

див. передостанню центровану формулу на с. 675 роботи [18][4], то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\lim_{t\to\infty} I_1(t, T) = 0$$

в силу співвідношення (20).

Доданок $I_2(t, T)$ оцінюється так: для деякої константи $C_2 > 0$ маємо

$$|I_2(t, T)| \le \frac{1}{\mu}\int_{[0,\, t-T]} |\tilde{h}(u_m + t - y)|\left(\int_{t-y}^t |\tilde{h}(u_m + z)|dz\right)\left(\int_y^{\infty} \mathbb{P}\{\xi > u\}du\right)dy \le$$

[4] Той факт, що умова (6) цитованої роботи еквівалентна припущенню про наявність у S_k для деякого $k \in \mathbb{N}$ абсолютно неперервної складової, доведено в розділі 5 на с. 678–679 статті [18].

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,t-T]}|\tilde{h}(u_m+t-y)|\sqrt{y}\Big(\int_{t-y}^{t}\tilde{h}^2(u_m+z)dz\Big)^{1/2}\Big(\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du\Big)dy \leq\\
&\leq C_2\int_{[0,\,t-T]}|\tilde{h}(u_m+t-y)|\sqrt{y}\Big(\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du\Big)dy \leq\\
&\leq C_2\Big(\int_{[0,\,t-T]}\tilde{h}^2(u_m+t-y)dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{[0,\,t-T]}y\Big(\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du\Big)^2dy\Big)^{1/2} \leq\\
&\leq C_2\Big(\int_T^\infty \tilde{h}^2(u_m+y)dy\Big)^{1/2}\Big(\int_0^\infty y\Big(\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du\Big)^2dy\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

де ми використали нерівність Коші – Буняковського у другій і четвертій нерівностях. Залишається помітити, що

$$\int_0^\infty y\Big(\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du\Big)^2dy<\infty,$$

у силу співвідношень

$$\lim_{y\to\infty} y\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}du=0 \quad \text{та} \quad \int_0^\infty\int_y^\infty \mathbb{P}\{\xi>u\}dudy<\infty,$$

які є наслідком припущення $\mathbb{E}\xi^2<\infty$. Отже,

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{t\geq T}|I_2(t,T)|=0.$$

Доведення теореми 1 завершено.

Список літератури

1. S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Springer, 2003.
2. P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons, Inc., 1968.
3. H. Cramér, M. R. Leadbetter, *Stationary and Related Stochastic Processes: Sample Function Properties and Their Applications*, Dover Publications, 2013.
4. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2*, John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1971.
5. A. Gut, *Stopped random walks. Limit theorems and applications*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York, 2nd edition, 2009.
6. A. Iksanov, *Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions*, Stoch. Process. Appl., **123** (2013), no. 6, 1987–2010.
7. A. Iksanov, *Renewal Theory for Perturbed Random Walks and Similar Processes*, Probability and its Applications, Birkhäuser, 2016.
8. A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, *Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization*, Statist. Probab. Lett., **114** (2016), 67–77.
9. A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, G. Shevchenko, *Fractionally integrated inverse stable subordinators*, Stoch. Process. Appl., **127** (2017), no. 1, 80–106.
10. A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners, *Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions*, Stoch. Process. Appl., **124** (2014), no. 6, 2132–2170.
11. A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners, *Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity*, Bernoulli, **23** (2017), no. 2, 1279–1298.
12. Z. Kabluchko, A. Marynych, *Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails*, Theory Stoch. Process., **21(37)** (2016), no. 2, 14–21.
13. C. Klüppelberg, T. Mikosch, *Delay in claim settlement and ruin probability approximations*, Scand. Actuar. J., **2** (1995), 154–168.
14. P. Läuger, *Shot noise in ion channels*, Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Biomembranes, **413** (1975), no. 1, 1–10.
15. A. Marynych, *A note on convergence to stationarity of random processes with immigration*, Theory Stoch. Process., **20(36)** (2015), no. 1, 84–100.

16. A. Marynych, *Limit theorems for random processes with regeneration*, Habilitation, Kyiv, 2017. Available at `http://do.unicyb.kiev.ua/marynych/wp-content/uploads/2017/04/final_with_hyperrefs.pdf` (In Ukrainian)
17. S. Resnick, *Adventures in stochastic processes*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 4th edition, 2005.
18. B. A. Rogozin, *Asymptotics of Renewal Functions*, Theory Probab. Appl., **21** (1977), no. 4, 669–686.
19. W. Schottky, *Spontaneous current fluctuations in electron streams*, Ann. Physics, **57** (1918), 541–567.
20. W. Smith, *Asymptotic Renewal Theorems. II*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A: Mathematics, **64** (1953), no. 1, 9–48.
21. H. Thorisson, *Coupling, stationarity, and regeneration*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, New York, 2000.
22. D. Vere-Jones, *Stochastic models for earthquake occurrence*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, **32** (1970), 1–62.
23. W. Whitt, *Stochastic-process limits: An introduction to stochastic-process limits and their application to queues*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2002.

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: `marynych@unicyb.kiev.ua`

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: `glebverov@gmail.com`

Стаття надійшла до редколегії 08.08.2019

STATIONARY LIMITS OF RENEWAL SHOT NOISE PROCESSES

G. K. VEROVKIN, A. V. MARYNYCH

Abstract. Assuming that the response function is square integrable and the step of the underlying random walk has finite variance we prove weak convergence of centered renewal shot noise processes to a stationary $\mathcal{L}_2$-process. We also establish some properties of the limiting stationary process.