Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 78–92

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 78–92

УДК 519.21

ОЦІНКИ СТІЙКОСТІ ПЕРЕХІДНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА ЗА УМОВИ РІВНОМІРНОЇ МІНОРИЗАЦІЇ

В. В. ГОЛОМОЗИЙ

Анотація. Отримано оцінки стійкості перехідних імовірностей для двох неоднорідних за часом ланцюгів Маркова у дискретному часі із загальним простором станів. Оцінки отримано за двох умов: міноризації на всьому просторі та умови близькості перехідних імовірностей. У роботі одержано різні оцінки стійкості для різних умов близькості.

Ключові слова і фрази. Метод склеювання, неоднорідні ланцюги Маркова, стійкість перехідних імовірностей, міноризація на всьому просторі.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60J45; Secondary 60A05, 60K05.

1. Вступ

Роботу присвячено вивченню стійкості перехідних імовірностей за n кроків для двох різних, незалежних, неоднорідних за часом ланцюгів Маркова зі значеннями у загальному фазовому просторі.

Питання стійкості перехідних імовірностей є важливим як із теоретичної, так і з практичної точок зору. Так, стійкості однорідних ланцюгів Маркова присвячено монографію [2]. У роботах [8–10] отримано результати щодо стійкості ланцюга Маркова відносно різних початкових розподілів в однорідному та в неоднорідному випадках. У роботах [17] та [20] показано, як оцінки стійкості можуть бути застосовані в актуарній математиці в моделі страхування “пенсія вдівця”.

Основним інструментом дослідження в цій роботі є метод склеювання. Базові відомості про метод склеювання можна знайти у класичних книгах [4] та [7]. Вважається, що вперше метод склеювання було викладено в роботі Дьобліна [1]. Використанню методу склеювання в теорії відновлення присвячено роботи [3, 5, 6, 18, 21, 22, 24].

У роботах [13–16] отримано оцінки стійкості для перехідних імовірностей, скінченновимірних розподілів та стійкості у V-нормі для двох різних ланцюгів Маркова зі значеннями у дискретному фазовому просторі. Для побудови оцінок у цих роботах використано метод максимального склеювання та робилися припущення рівномірного перемішування та рівномірної близькості ланцюгів.

У цій статті ми розглядаємо умову рівномірної міноризації, з якої випливає умова рівномірного перемішування, і розглядаємо різні умови близькості, не обмежуючись випадком рівномірної близькості перехідних імовірностей за один крок.

Стійкість неоднорідних ланцюгів Маркова, перехідні імовірності яких зображуються у вигляді $P_{it}(x, A) = (1-\varepsilon)Q(x, A)+\varepsilon R_t(x, A)$, за умови рівномірної мінорizації, також розглядається в роботі [11]. Ці результати узагальнено в даній роботі на випадок двох довільних ланцюгів Маркова, перехідні імовірністі за один крок яких задовольняють певні умови близькості.

У роботі [12] вивчався випадок міноризації на множині $C \in \mathcal{E}$ (тут $(E, \mathcal{E})$ — фазовий простір), тобто умова вигляду $P_t(x, A) \ge \alpha\nu(A)$, $\forall x \in C$.

2. Основні позначення

Розглянемо два неоднорідні, незалежні ланцюги Маркова $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$, задані на спільному імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ зі значеннями у деякому вимірному просторі $(E, \mathcal{E})$.

У цій роботі будемо використовувати позначення

$$\mu K(A) = \int_E \mu(dx) K(x, A),$$

де μ — деяка міра на $(E, \mathcal{E})$, а $K\colon E \times \mathcal{E} \to [0, \infty)$ — деяке ядро. Для випадкової величини ξ та міри μ, позначення

$$\xi \sim \mu$$

буде означати, що ξ має розподіл μ.

Перехідні імовірності за один крок будемо позначати так:

$$P_{it}(x, A) = \mathcal{P}\{X_{t+1}^{(i)} \in A | X_t^{(i)} = x\}.$$

Тут $t \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $\mathbb{N}$ — це множина натуральних чисел, $i \in \{1, 2\}$. У цій роботі ми розглядаємо лише дискретну множину індексів, тож у подальшому вирази вигляду $t \geq 0$ або $n \geq k$, $k \geq 0$ в контексті індексу ланцюга Маркова, слід розуміти як цілі числа більші або рівні 0 або k відповідно.

Надалі для набору перехідних ядер $P_{it}(x, A)$, $i \in \{1, 2\}$, $t \geq 0$, уведемо позначення:

$$P_i^{t,n}(x, A) := \left(\prod_{k=t}^{t+n-1} P_{it} \right)(x, A).$$

Таким чином у наших позначеннях

$$P_1^{t,n}(x, A) = \mathcal{P}\{X_{t+n}^{(1)} \in A | X_t^{(1)} = x\}.$$

Для дослідження стійкості необхідно розглядати ланцюги, що є близькими у деякому сенсі. Ми припустимо, що виконується таке зображення:

$$P_{it}(x, A) = Q_t(x, A) + (1 - Q_t(x, E)) R_{it}(x, A). \tag{1}$$

Тут $Q_t(x, A)$ деякий субстохастичний оператор (тобто $0 \leq Q_t(x, E) \leq 1$).

У цій схемі $Q_t(x, A)$ грає роль «спільної частини» двох ланцюгів. Чим вона «більша», тим більш подібними є ланцюги. Як і раніше позначимо

$$Q^{t,n}(x, A) := \left(\prod_{k=t}^{t+n-1} Q_k \right)(x, A).$$

Введемо позначення для міри близькості ланцюгів:

$$\varepsilon_t(x) = 1 - Q_t(x, E), \ \ \varepsilon_t(x) \in [0, 1]. \tag{2}$$

У подальшому ми будемо накладати різні умови на $\varepsilon_t(x)$. Найпростішою є умова рівномірної близькості: $\sup_{t,x} \varepsilon_t(x) < 1$.

Розглянемо декілька прикладів того, як може виглядати ядро Q_t.

Ядро мінімуму. Як $Q_t(x, A)$ можна вибрати мінімум $P_{it}(x, A)$ по $i \in \{1, 2\}$. Нехай перехідні імовірності $P_{it}(x, A)$ мають щільності відносно деякої σ-скінченної міри λ:

$$P_{it}(x, A) = \int_A f_{it}(x, y) \lambda(dy).$$

Тоді можна визначити

$$Q_t(x, A) = \int_A f_{1t}(x, dy) \wedge f_{2t}(x, dy) \lambda(dy).$$

У цьому випадку $R_{it}(x,A) = \frac{P_{it}(x,A)-Q_t(x,A)}{1-Q_t(x,E)}$, якщо $Q_t(x,E) < 1$, та $R_{it}(x,A) = 0$, якщо $Q_t(x,E) = 1$.

Збурені ланцюги. У деяких задачах ланцюги можна зобразити у вигляді

$$P_{it}(x,A) = (1-\varepsilon_t)Q(x,A) + \varepsilon_t R_{it}(x,A).$$

Тобто обидва ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ є збуреними версіями деякого однорідного ланцюга з перехідним ядром $Q(x,A)$.

Умова мінoризації на всьому просторі. Розглянемо умову

$$P_{it}(x,A) \geq \alpha\nu(A), \quad \forall x \in E, \tag{3}$$

де $\alpha \in (0,1)$, ν — деяка імовірнісна міра на $(E,\mathcal{E})$.

Зауважимо, що у випадку коли простір E дискретний, з умови мінoризації на всьому просторі випливає умова рівномірного перемішування [13, 14, 19, 25]:

$$\frac{1}{2}\sup_{i\neq j}\sum_{k\in E}|P_{1t}(i,k) - P_{2t}(j,k)| \leq \rho < 1.$$

Дійсно,

$$\sum_{k\in E}|P_{1t}(i,k) - P_{2t}(j,k)| = \sum_{k\in E}P_{1t}(i,k) + P_{2t}(j,k) - 2P_{1t}(i,k)\wedge P_{2t}(j,k) \leq$$

$$\leq 2 - \alpha\sum_{k\in E}2\nu(k) = 2(1-\alpha),$$

тобто ρ в умові рівномірного перемішування, та α в умові мінoризації пов'язані співвідношенням $\rho = 1-\alpha$.

3. Конструкція склеювання

Побудуємо склеювання для ланцюгів $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ за умови мінoризації на всьому просторі.

Визначимо спочатку оператор «несклеювання»:

$$T_t(x_1,x_2;A,B) = \frac{P_{1t}(x_1,A)-\alpha\nu(A)}{1-\alpha}\frac{P_{2t}(x_2,B)-\alpha\nu(B)}{1-\alpha}. \tag{4}$$

Зауважимо, що T_t — це стохастичний оператор:

$$T_t(x_1,x_2;E,E) = 1.$$

Окрім того,

$$T_t(x_1,x_2;A,E) = \frac{P_{1t}(x_1,A)-\alpha\nu(A)}{1-\alpha},\ T_t(x_1,x_2;E,A) = \frac{P_{2t}(x_2,A)-\alpha\nu(A)}{1-\alpha}.$$

Для побудови склеювання розглянемо фазовий простір $(E\times E\times\{0,1,2\})$, на якому задано неоднорідний ланцюг Маркова $Z_n = (Z_{1n}, Z_{2n}, d_n)$, $n \geq 0$, із такими перехідними ймовірностями:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_t(x,y,0;A\times B\times\{0\}) = (1-\alpha)T_t(x,y,A,B),\\
&\mathbb{P}_t(x,y,0;A\times B\times\{1\}) = \alpha\nu(A\cap B),\\
&\mathbb{P}_t(x,y,0;A\times B\times\{2\}) = 0,\\
&\mathbb{P}_t(x,x,1;A\times B\times\{0\}) = (1-Q_t(x,E))R_{1t}(x,A)R_{2t}(y,B),\\
&\mathbb{P}_t(x,x,1;A\times B\times\{1\}) = 0,\\
&\mathbb{P}_t(x,x,2;A\times B\times\{2\}) = Q_t(x,A\cap B),\\
&\mathbb{P}_t(x,y,2;A\times B\times\{i\}) = \mathbb{P}_t(x,y,1;A\times B\times\{i\}),
\end{aligned} \tag{5}$$

тут $Q_t, R_{1t}R_{2t}$ визначено в (1), а T_t в (4).

Через $\mathbb{P}^{(t)}_{xyd}$ будемо позначати імовірність на канонічному імовірнісному просторі, породженому ланцюгом Z_n із перехідними імовірностями $\mathbb{P}_t$, що стартує з моменту t та зі стану $Z_t = (x, y, d)$, $x, y \in E$, $d \in \{0, 1, 2\}$. Символом $\mathbb{E}^{(t)}_{xyd}$ позначатимемо математичне сподівання, що відповідає мірі $\mathbb{P}^{(t)}_{xyd}$.

Визначимо також імовірнісну міру $\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}(\cdot) := \int_E \nu(dx)\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}(\cdot)$, і відповідне математичне сподівання позначимо $\mathbb{E}^{(t)}_{\nu 1}$. Легко бачити, що маргінальні імовірності ланцюга Z_n збігаються з перехідними імовірностями ланцюгів $X^{(1)}_n$ та $X^{(2)}_n$.

Дану конструкцію склеювання можна інтерпретувати таким чином. Якщо ланцюги в момент t не склеєні, то проводимо незалежне випробування, що склеює ланцюги з імовірністю α (незалежно від поточного стану ланцюгів), і не склеює з імовірністю $1 - \alpha$, у цьому випадку ланцюги продовжують рухатись із перехідною імовірністю T_t. Якщо ланцюги не склеєні в момент часу t, то $d_t = 0$.

Якщо склеювання відбулось у момент t, то $Z^{(1)}_t = Z^{(2)}_t \sim \nu$, $d_t = 1$. Якщо ланцюги склеєні в момент t і перебувають у стані x, то проводимо незалежне випробування, що розклеює ланцюги з імовірністю $1 - Q_t(x, E)$ і залишає їх склеєними з імовірністю $Q_t(x, E)$. Якщо ланцюги залишаються склеєними, то $Z^{(1)}_{t+1} = Z^{(2)}_{t+1} \sim$ $\sim Q_t(x, \cdot)/Q_t(x, E)$, $d_{t+1} = 2$, якщо ланцюг склеєний у момент часу $t + 1$ і був склеєним у момент часу t.

Якщо склеєні ланцюги, що перебувають у момент часу t у стані x, розклеїлись, то $Z^{(1)}_{t+1} \sim R_{1,t+1}(x, \cdot)$, $Z^{(2)}_{t+1} \sim R_{2,t+1}(x, \cdot)$, $d_{t+1} = 0$.

Для імовірностей, пов'язаних зі склеюванням, зручно ввести окремі позначення:

$$\begin{aligned} r^{(t)}_k(dx, dy) &= \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1, k-1}, Z_{t+k} = (dx, dy, 0)\}, \\ r^{(t)}_k(x_0, dx, dy) &= \mathbb{P}^{(t)}_{x_0 x_0 2}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1, k-1}, Z_{t+k} = (dx, dy, 0)\}, \end{aligned} \tag{6}$$

$t \geq 0$, $k \geq 1$. Тут $r^{(t)}_k(dx, dy)$ — це імовірність того, що ланцюг, що склеївся в момент t перебував у склеєному стані $k - 1$ кроків, і розклеївся в момент k, причому перша і друга компонента потрапили у стани dx, dy відповідно.

Розглянемо такі ймовірності:

$$\begin{aligned} g^{(t)}_n(x) &= \mathbb{P}^{(t)}_{xx2}\{d_{n+t} = 1, d_i \neq 1, i = \overline{t, n+t-1}\}, \\ g^{(t)}_n &= \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{n+t} = 1, d_i \neq 1, i = \overline{t+1, n+t-1}\}, \end{aligned} \tag{7}$$

$t, n \geq 0$.

Зауважимо, що

$$g^{(t)}_0 = g^{(t)}_1 = g^{(t)}_0(x) = g^{(t)}_1(x) = 0.$$

Визначимо також імовірності «не склеювання»:

$$h^{(t)}_n(x, y) = \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+k} = 0, k = \overline{1, n}\}. \tag{8}$$

Введемо позначення для ймовіностей потрапляння d_n у стан 1.

$$\begin{aligned} u^{(t)}_n &= \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{n+t} = 1\} = \sum_{k=0}^{n} u^{(t)}_k g^{(t+k)}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} g^{(t)}_k u^{(t+k)}_{n-k}, \\ u^{(t)}_n(x) &= \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t} = 1\} = \sum_{k=0}^{n} u^{(t)}_k(x) g^{(t+k)}_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} g^{(t)}_k(x) u^{(t+k)}_{n-k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Зауважимо, що $u^{(t)}_0 = u^{(t)}_0(x) = 1$, $u^{(t)}_1 = u^{(t)}_1(x) = 0$.

Лема 3.1. *Імовірність $h^{(t)}_n(x, y)$ того, що розклеєний ланцюг, який перебуває у момент $t \geq 0$ у стані $(x, y) \in E \times E$, не склеїться за n кроків, дорівнює $(1 - \alpha)^n$.*

Доведення. Згідно з формулами (5) та означенням (8) справедливі вирази:

$$h_n^{(t)}(x,y) = \mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_k = 0, 1 \le k \le n\} = (1-\alpha)^n T^{t,n}(x,y,E,E) = (1-\alpha)^n,$$

оскільки кожен $T_t(x,y,A,B)$ — це стохастичний оператор.

□

Лема 3.2. *Для довільних $t \ge 0$, $k \ge 1$, $x_0 \in E$ виконуються такі вирази:*

$$\begin{aligned} r_k^{(t)}(dx,dy) &= \int_E \nu Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t+k}(z,dx)R_{2t+k}(z,dy), \\ r_k^{(t)}(x_0,dx,dy) &= \int_E \delta_{x_0} Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t}(z,dx)R_{2t}(z,dy), \\ r_k^{(t)}(E,E) &\le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x), \\ r_k^{(t)}(x_0,E,E) &\le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Величину $\varepsilon_{t+k}(x)$ визначено у (2). У формулах (10) важаємо, що $\prod_{j=1}^{0} = 1$.

Доведення. Доведемо першу формулу. Згідно з означенням $r_k^{(t)}(dx,dy)$ (6) та формулами (5) маємо

$$\begin{aligned} r_k^{(t)}(dx,dy) &= \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1,k-1}, Z_{t+k} = (dx,dy,0)\} = \\ &= \int_E \mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{1,k-1}, Z_{t+k-1} = (du,du,2)\}\mathbb{P}_{t+k-1}(u,u,2;dx,dy,0) = \\ &= \int_E \nu Q^{t,k-1}(du)\varepsilon_{t+k}(u)R_{1t+k}(u,dx)R_{2t+k}(u,dy). \end{aligned}$$

Аналогічним чином, заміною міри ν на $\delta_x = \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ доводиться друга формула.

Третя формула випливає з першої та того факту, що $R_{it}(x,E) = 1$:

$$\begin{aligned} r_k^{(t)}(E,E) &= \int_E \nu Q^{t,k-1}(dz)\varepsilon_{t+k}(z)R_{1t+k}(z,E)R_{2t+k}(z,E) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\nu Q^{t,k}(E) \le \\ &\le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}Q_{t+j}(x,E) = \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x)\prod_{j=1}^{k-1}\sup_{x\in E}(1-\varepsilon_{t+j}(x)) \le \sup_{x\in E}\varepsilon_{t+k}(x). \end{aligned}$$

Формула для $r_k^{(t)}(x_0,E,E)$ з (10) доводиться аналогічно, заміною міри ν на δ_x. □

Лема 3.3. *Для довільних $t \ge 0$ та $n \ge 1$ справджуються формули:*

$$\begin{aligned} g_n^{(t)} &= \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\int_{E\times E} r_k^{(t)}(dx,dy)h_{n-1-k}^{(t+k)}(x,y) = \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}, \\ g_n^{(t)}(x) &= \alpha\sum_{k=1}^{n-1}\delta_x Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\varepsilon_t(x) = 1 - Q_t(x,E)$.

Доведення. Знайдемо вираз для $g_n^{(t)}$. Із означення (7):

$$g_n^{(t)} = \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{n+t} = 1, d_{t+k} = \ldots = d_{t+n-1} = 0, d_{t+1} = \ldots = d_{t+k-1} = 2\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(dy)\varepsilon_{t+k}(y)R_{1t}(y,dz_1)R_{2t}(y,dz_2)(1-\alpha)^{n-1-k} \times$$
$$\times T^{t+k,n-1-k}(z_1,z_2,E,E)\alpha =$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \int_{E\times E} r_k^{(t)}(dz_1,dz_2)h_{n-1-k}^{(t+k)}(z_1,z_2) =$$
$$= \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-1-k}.$$

Остання формула в (11) отримується заміною міри ν на δ_x. □

4. Випадок рівномірної близькості

Для того, щоб отримати стійкість перехідних імовірностей, необхідно щоб ланцюги $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$ були близькими в деякому сенсі.

Першою, і найбільш очевидною характеристикою близькості є така величина:

$$\varepsilon = \sup_{t\geq 0, x\in E} \varepsilon_t(x) = \sup_{t,x}(1 - Q_t(x,E)). \tag{12}$$

Умова рівномірної близькості полягає у тому, щоб $\inf_{t,x} Q_t(x,E) > 0$, або іншими словами, усі перехідні ймовірності мають ненульову спільну частину. Для подальшого використання нам буде зручно переформулювати цю умову у вигляді

$$\varepsilon = \sup_{t\geq 0, x\in E}(1 - Q_t(x,E)) < 1. \tag{13}$$

Введемо також

$$\varepsilon_n^{(t)} = \sup_{t\leq k\leq t+n, x\in E} \varepsilon_k(x) = \sup_{t\leq k\leq t+n, x\in E}(1 - Q_t(x,E)). \tag{14}$$

Очевидно, що $\varepsilon_n^{(t)} \leq \varepsilon$ для довільних t, n. Якщо очікувати, що ε є малою величиною, то це означатиме, що $Q_t(x,E)$ буде близькою до 1 при всіх t, x, що у свою чергу означатиме близькість перехідних імовірностей P_{it}. Такий підхід можна використовувати, коли є підстави сподіватися, що «збурення ланцюгів» рівномірно обмежено деякою малою величиною.

Покажемо, що величини $g_n^{(t)}$, $g_n^{(t)}(x), u_n^{(t)}, u_n^{(t)}(x)$ мають порядок мализни $\varepsilon_n^{(t)}$.

Лема 4.1. *Для довільних $t \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$, $x \in E$ виконано такі нерівності:*

$$g_n^{(t)} \leq \varepsilon_n^{(t)}(1-\alpha) \leq \varepsilon(1-\alpha),$$
$$g_n^{(t)}(x) \leq \varepsilon_n^{(t)}(1-\alpha) \leq \varepsilon(1-\alpha),$$

де ε та $\varepsilon_n^{(t)}$ визначено у (12) та (14) відповідно.

Доведення. Із формул (11) випливає

$$g_n^{(t)} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(\varepsilon_{t+k})(1-\alpha)^{n-k-1} \leq \varepsilon_n^{(t)}\alpha \sum_{k=1}^{n-1} \nu Q^{t,k-1}(E)(1-\alpha)^{n-1-k} \leq$$
$$\leq \alpha\varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^k = \varepsilon_n^{(t)}\alpha(1-\alpha)/\alpha = \varepsilon_n^{(t)}(1-\alpha) \leq \varepsilon(1-\alpha).$$

Формула для $g_n^{(t)}(x)$ отримується аналогічно. □

Наступна лема є ключовою для виведення оцінок стійкості.

Лема 4.2. *Для довільних* $x \in E$ *та* $n \geq 2$ *виконуються такі нерівністі:*

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\} \leq \varepsilon^{(t)}_n \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},$$
$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+n} = 0\} \leq \varepsilon^{(t)}_n \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}.$$

Доведення. Розкладемо імовірність $\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t} = 0\}$ за моментом останнього склеювання $k \geq 0$. Вона означає, що ланцюг, що стартував склеєним, у точці x розклеївся в якийсь момент $i > k$ і залишався розклеєним до часу $t + n$. Якщо $k = 0$, то це означає, що жодного склеювання між моментами часу $t + 1$ та $t + n$ не відбулось.

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t} = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1, d_{t+j} \neq 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\}. \tag{15}$$

Імовірність (15) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1, d_{t+j} \neq 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+j} \neq 1, j = \overline{k+1, n}, d_{t+n} = 0\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \geq j\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \int_{E\times E} r^{(t+k)}_j(dz, dy) h^{(t+k+j)}_{n-j}(z, y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) r^{(t+k)}_j(E, E)(1-\alpha)^{n-j} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \int_{E} \nu Q^{t+k, j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z) R_{1t+k+j}(z, E) R_{2t+k+j}(z, E)(1-\alpha)^{n-j},$$

де $u^{(t)}_k(x)$ визначено в (9). Оскільки R_{it} — це стохастичні оператори, то $\forall z \in E$, $R_{it}(z, E) = 1$, отже останній вираз такий:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \int_{E} \nu Q^{t+k, j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} \leq$$
$$\leq \varepsilon^{(t)}_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \nu Q^{t+k, j-1}(E)(1-\alpha)^{n-j} =$$
$$= \varepsilon^{(t)}_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\}(1-\alpha)^{n-j} =$$
$$= \varepsilon^{(t)}_n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1, d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\}(1-\alpha)^{n-j} =$$
$$= \varepsilon^{(t)}_n \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)^{n-j} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1, d_{t+i} = 2, i = \overline{k+1, j-1}\} =$$

$$= \varepsilon_n^{(t)} \sum_{j=1}^{n} (1-\alpha)^{n-j} \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+j-1} = 2\} \leq$$

$$\leq \varepsilon_n^{(t)} \sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^{j} = \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}.$$

Оцінка для $\mathbb{P}_{\nu 1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ виводиться абсолютно аналогічно, заміною $u_n^{(t)}(x)$ на $u_n^{(t)}$. □

Нам також знадобиться подібна оцінка для ланцюгів, що стартують розклеєними.

Лема 4.3. *Для довільних $x, y \in E$, $t \geq 0$ та $n \geq 2$ справедливі такі нерівності:*

$$\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1} \right) \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Для ланцюга Z_n, що стартував розклеєним у момент t, є дві можливості бути розклеєним у момент $t+n$: якщо він перебував у розклеєному стані весь час, або якщо відбулося хоча б одне склеювання, після якого ланцюг розклеївся.

Таким чином, можемо записати:

$$\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} =$$

$$= \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+i} = 0, i \leq n\} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+i} = 0, i < k, d_{t+k} = 1, d_{t+n} = 0\} =$$

$$= h_n^{(t)}(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+i} = 0, i < k, d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+k+(n-k)} = 0\} =$$

$$= h_n^{(t)}(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{E\times E} \mathbb{P}_{xy0}\{d_{t+i} = 0, i < k, Z_{t+k-1} = (du, dv, 0)\} \times$$

$$\times \mathbb{P}_{uv0}^{(t+k-1)}\{d_{t+k} = 1\} \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+n} = 0\} =$$

$$= h_n^{(t)}(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha h_{k-1}^{(t)}(x,y) \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+k+(n-k)} = 0\}.$$

Скористаємось тим фактом, що $h_n^{(t)}(x,y) = (1-\alpha)^n$ та лемою 4.2 й отримаємо, що

$$\mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+k+(n-k)} = 0\} \leq \varepsilon_{n-k}^{(t+k)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k}}{\alpha}.$$

Підставимо останню нерівність у вираз для $\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$, й отримаємо оцінки

$$\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} = h_n^{(t)}(x,y) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha h_{k-1}^{(t)}(x,y) \mathbb{P}_{\nu 1}^{(t+k)}\{d_{t+k+(n-k)} = 0\} \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^n + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} \varepsilon_{n-k}^{(t+k)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-k}}{\alpha} \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \sum_{k=1}^{n-1} \left((1-\alpha)^{k-1} - (1-\alpha)^{n-1} \right) \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^n + \varepsilon_n^{(t)} \left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1} \right).$$ □

Наступна теорема дає оцінку стійкості для перехідних імовірностей за n кроків.

Теорема 4.1. *Нехай $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ — два неоднорідні, незвідні, неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (1), та виконано умови міноризації (3) і рівномірної близькості (13). Тоді для довільних $x, y \in E$, $t \geq 0$ та $n \geq 2$ виконано такі нерівності:*

$$\sup_{A \in \mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \leq \varepsilon \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},$$

$$\sup_{A \in \mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon \left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1} \right). \tag{16}$$

Доведення. Помітимо, що

$$|P_1^{(t,n)}(x,A) - P_2^{(t,n)}(x,A)| = |\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\} - \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}| \leq$$
$$\leq \max\{\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\}, \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}\} \leq \mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}.$$

Однак, для останньої імовірності в силу леми 4.2 виконано нерівність

$$\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \leq \varepsilon \frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha}.$$

Розглянемо тепер стійкість перехідних імовірностей для ланцюгів, що стартують із різних точок. Аналогічно до попередніх міркувань, виводимо

$$|P_1^{(t,n)}(x,A) - P_2^{(t,n)}(y,A)| = |\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\} - \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}| \leq$$
$$\leq \max\{\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (A,E,\{0\})\}, \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{Z_{t+n} \in (E,A,\{0\})\}\} \leq \mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}.$$

Оцінка (16) випливає тепер із леми 4.3. □

Зауваження 4.1. Якщо ланцюги $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ періодичні з однаковим періодом m, то ланцюги $(X_{nm}^{(1)}, n \geq 0)$, $(X_{nm}^{(2)}, n \geq 0)$ будуть неперіодичними, і до них можна застосувати теорему 4.1.

5. ПОРУШЕННЯ УМОВИ РІВНОМІРНОЇ БЛИЗЬКОСТІ ЗА ЧАСОМ

Припустимо, що величина $\varepsilon_t(x)$ не є рівномірно меншою 1 по t. Нехай $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}_0$ – множина індексів, для яких $\sup_{t \in \mathbb{T}} \sup_{x \in E} \varepsilon_t(x) = 1$.

Введемо позначення:

$$\mathbb{T}_n^{(t)} = \mathbb{T} \cap \{t, t+1, \ldots, t+n\},\ t \geq 0,\ n \geq 0,$$
$$\tilde{k}_n^{(t)} = \max\{t \in \mathbb{T}_n^{(t)}\} \leq \infty.$$

Визначимо також

$$\tilde{\varepsilon} = \sup_{t \notin \mathbb{T}, x \in E} \varepsilon_t(x), \quad \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} = \sup_{t \notin \mathbb{T}_n^{(t)}, x \in E} \varepsilon_t(x)$$

та припустимо, що

$$\tilde{\varepsilon} < 1. \tag{17}$$

Далі нам необхідно дослідити, як зміняться результати лем 4.2 та 4.3 в даній ситуації.

Лема 5.1. *Припустимо, що для деяких $t \geq 0$ та $n \geq 2$, $\tilde{k}_n^{(t)} < \infty$ та $t+n \notin \mathbb{T}_n^{(t)}$. Тоді для довільних $x, y \in E$ величини $\mathbb{P}_{xx1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$, $\mathbb{P}_{\nu1}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ та $\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\}$ не перевищують*

$$(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}} + \tilde{\varepsilon}_n^{(t)} \frac{1-(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Для зручності позначимо $t_0 = \tilde{k}_n^{(t)}$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t}=0\} &= \int_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z_{t_0}\in(du,dv,\{0,1,2\}),d_{t+n}=0\}\le\\ &\le\int_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z_{t_0}\in(du,dv,0),d_{t+n}=0\}=\\ &=\int_{E\times E}\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{Z_{t_0}\in(du,dv,0)\}\mathbb{P}^{(t+t_0)}_{uv0}\{d_{t+t_0+(n-t_0)}=0\}\le\\ &\le\sup_{u,v\in E}\mathbb{P}^{(t+t_0)}_{uv0}\{d_{t+t_0+(n-t_0)}=0\}\le(1-\alpha)^{n-t_0}+\tilde{\varepsilon}^{t+t_0}_{n-t_0}\frac{1-(1-\alpha)^{n-t_0-1}}{\alpha},\end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з леми 4.3. Зауважимо, що $\tilde{\varepsilon}^{(t+t_0)}_{n-t_0}\le\tilde{\varepsilon}^{(t)}_n$, що доводить нерівність для $\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}$. Решта нерівностей доводяться аналогічно. □

Наступна теорема дає відповідь на питання: як зміняться оцінки стійкості, якщо умову рівномірної близькості порушено за часом?

Теорема 5.1. *Нехай $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ — два неоднорідні, незвідні, неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (1), та виконано умови міноризації (3) та близькості поза множиною $\mathbb{T}$ — (17). Нехай для деяких $t\ge 0$ та $n\ge 2$ - $\tilde{k}_n^{(t)}<\infty$ та $t+n\notin\mathbb{T}_n^{(t)}$. Тоді для довільних $x,y\in E$ виконано такі нерівності:*

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}}|P_1^{t,n}(x,A)-P_2^{t,n}(x,A)|\le(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}}+\varepsilon\frac{1-(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha},$$

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}}|P_1^{t,n}(x,A)-P_2^{t,n}(y,A)|\le(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}}+\varepsilon\frac{1-(1-\alpha)^{n-\tilde{k}_n^{(t)}-1}}{\alpha}.$$

Доведення. Як і в теоремі 4.1

$$|P_1^{(t,n)}(x,A)-P_2^{(t,n)}(x,A)|\le\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n}=0\},$$

$$|P_1^{(t,n)}(x,A)-P_2^{(t,n)}(y,A)|\le\mathbb{P}^{(t)}_{xy0}\{d_{t+n}=0\}.$$

Доведення завершує застосування леми 5.1. □

6. Порушення умови рівномірної близькості за простором

Припустимо, що існує деяка множина $\mathcal{C}\in\mathcal{E}$, для якої $Q_t(x,A)=0$, $\forall x\in\mathcal{C}$. Припустимо також, що виконується нерівність

$$\hat{\varepsilon}=\sup_{x\notin\mathcal{C},t}(1-Q_t(x,E))<1. \tag{18}$$

Введемо позначення:

$$q^{t,k}(dy)=\int_{\overline{\mathcal{C}}^k}\nu Q^{t,k-1}(dz)Q_{t+k}(z,dy),$$

$$q_k=\sup_t\int_{\overline{\mathcal{C}}^k}\nu Q^{t,k-1}(dz)Q_{t+k}(z,\mathcal{C}).$$

Нехай

$$\delta:=\sup_{x\in E\setminus\mathcal{C},t}Q_t(x,\mathcal{C}).\text{ Тоді }\delta\le 1.$$

Позначимо також

$$\rho=\max\left\{\sup_{t,x\in E\setminus\mathcal{C}}Q_t(x,E\setminus\mathcal{C}),\nu(E\setminus\mathcal{C})\right\}$$

і припустимо, що

$$\rho < 1. \tag{19}$$

Маємо очевидну нерівність:

$$q_k \leq \rho^k \delta.$$

Сформулюємо тепер аналоги лем 4.2 та 4.3.

Лема 6.1. *Для довільних, $x \in E$, та $n \geq 2$ справджуються такі нерівності:*

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+n} = 0\} \leq (\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)},$$

$$\mathbb{P}^{(t)}_{\nu 1}\{d_{t+n} = 0\} \leq (\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}.$$

Доведення. Як і в лемі 4.2, запишемо

$$\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{n+t} = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}^{(t)}_{xx1}\{d_{t+k} = 1\}\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \geq j\}.$$

Зауважимо, що в силу того, що $Q_t(x, A) = 0, \forall x \in \mathcal{C}$, ланцюг Z_n миттєво розклеюється, якщо у склеєному стані потрапляє в $\mathcal{C}$.

Таким чином, для того, щоб ланцюг Z_n залишався у склеєному стані протягом певного часу, необхідно щоб він перебував у множині $E \setminus \mathcal{C}$.

Тоді

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^{(t+k)}_{\nu 1}\{d_{t+i} = 2, i < j, d_{t+l} = 0, l \geq j\} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x) \times \\
&\quad \times \int_{(E\setminus\mathcal{C})^j} \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)R_{1t+k+j}(z,E)R_{2t+k+j}(z,E)(1-\alpha)^{n-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x)\int_{(E\setminus\mathcal{C})^j\times E} \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x)\int_{(E\setminus\mathcal{C})^{j+1}} \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x)\int_{(E\setminus\mathcal{C})^j\times\mathcal{C}} \nu Q^{t+k,j-1}(dz)\varepsilon_{t+k+j}(z)(1-\alpha)^{n-j} \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x)(1-\alpha)^{n-j}\Big(\rho^{j-k}\varepsilon^{(t)}_n + \rho^{j-k-1}\delta\Big) = \\
&= (\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} u^{(t)}_k(x)\rho^{j-k-1}(1-\alpha)^{n-j} = \\
&= (\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta)\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)^{n-j}\sum_{k=0}^{j-1} u^{(t)}_k\rho^{j-k-1} \leq \\
&\leq \frac{\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta}{1-\rho}\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha)^{n-j}(1-\rho^j) \leq (\rho\varepsilon^{(t)}_n + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)}.
\end{aligned}$$

Аналогічно можемо отримати оцінку для $\mathbb{P}^{(t)}_{xx1}$. □

Наступна лема дає оцінку імовірності того, що ланцюг, який стартував розклеєним, буде розклеєним у момент часу n.

Лема 6.2. *Для довільних $x, y \in E$, $t \geq 0$ та $n \geq 2$ справедлива така нерівність:*

$$\mathbb{P}_{xy0}^{(t)}\{d_{t+n} = 0\} \leq (1-\alpha)^n + \frac{\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta}{1-\rho}\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right) \leq$$
$$\leq (1-\alpha)^n + (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha(1-\rho)}$$

Доведення. Доведення аналогічне до леми 4.3. □

Із лем 6.1 та 6.2 випливає така теорема.

Теорема 6.1. *Нехай $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$ — два неоднорідні, незвідні, неперіодичні ланцюги Маркова, для перехідних імовірностей яких справедливе зображення (1), та виконано умови мінорізації (3), близькості поза множиною $\mathcal{C}$ (18) та (19). Тоді для довільних $x, y \in E$ та $t \geq 0$ виконані такі нерівності:*

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \leq (\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta)\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha(1-\rho)},$$
$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \leq (1-\alpha)^n +$$
$$+ \frac{\rho\varepsilon_n^{(t)} + \delta}{1-\rho}\left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).$$

7. ПРИКЛАД — СТІЙКІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ У МОДИФІКОВАНІЙ ЛІНІЙНІЙ МОДЕЛІ

Нехай $c > 0, a < b$ — деякі числа, $X_0^{(1)} = x_0 \in \mathbb{R}$, W_n — незалежні випадкові величини з нормальним розподілом $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$.
Розглянемо модифіковану лінійну модель AR(1):

$$X_n^{(1)} = \begin{cases} cX_{n-1}^{(1)} + W_n, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n \in [a,b], \\ b, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n > b, \\ a, \text{якщо } cX_n^{(1)} + W_n < a, n \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Таким чином $X_n^{(1)}$ — це неоднорідний ланцюг Маркова зі значеннями у фазовому просторі $E = [a, b]$. Перехідні імовірності можна записати таким чином:

$$P_{1n}(x,A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_A \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A \in (a,b), \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_b^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A = \{b\}, \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_{-\infty}^{a} \exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A = \{a\}. \end{cases} \quad (21)$$

Ланцюг $X_n^{(2)}$ отримаємо шляхом додавання малого збурення $\Delta_n \in \mathbb{R}$:

$$X_n^{(2)} = \begin{cases} cX_{n-1}^{(2)} + W_n + \Delta_n, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n \in [a,b], \\ b, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n > b, \\ a, \text{якщо } cX_n^{(2)} + W_n + \Delta_n < a. \end{cases} \quad (22)$$

Перехідні ймовірності для $X_n^{(2)}$ матимуть вигляд:

$$P_{2n}(x,A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_A \exp\Big(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A \subset (a,b), \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_b^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A = \{b\}, \\ (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_{-\infty}^{a} \exp\Big(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\Big)dy, \text{ якщо } A = \{a\}. \end{cases} \quad (23)$$

Нагадаємо, що як і скрізь у цьому розділі, ми вважаємо ланцюги $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$ незалежними.

Припустимо, що

$$\sigma^2 = \sup_n \sigma_n^2 < \infty.$$

Розглянемо міру $\nu^*(dx)$, визначену на $[a,b]$ таким чином:

$$\nu^*(\{b\}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\int_b^{+\infty} \exp\biggl(-\frac{y-a}{2\sigma^2}\biggr)dy,$$

$$\nu^*(\{a\}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\int_{-\infty}^{b} \exp\biggl(-\frac{y-b}{2\sigma^2}\biggr)dy,$$

$$\nu^*(A) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\int_A \exp\biggl(-\frac{y-b}{2\sigma^2}\biggr)\wedge\exp\biggl(-\frac{y-a}{2\sigma^2}\biggr)dy,\ A\subset(a,b).$$

Зауважимо, що $\nu^*(\{a\}) = \nu^*(\{b\})$. Позначимо

$$\begin{aligned}
&\alpha = \nu^*([a,b]) = \\
&= 2(2\pi\sigma^2)^{-1/2}\biggl(\int_b^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\biggr)dy + \int_a^{(a+b)/2}\exp\biggl(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}\biggr)dy\biggr) = \\
&= 2\biggl(1-\Phi\biggl(\frac{b-a}{\sigma}\biggr)+\Phi\biggl(\frac{b-a}{2\sigma}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{a-a}{\sigma}\biggr)\biggr) = \\
&= 2\biggl(1/2-\Phi\biggl(\frac{b-a}{\sigma}\biggr)+\Phi\biggl(\frac{b-a}{2\sigma}\biggr)\biggr) = 1-2\biggl(\Phi\biggl(\frac{b-a}{\sigma}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{b-a}{2\sigma}\biggr)\biggr),
\end{aligned}$$

де Φ — функція стандартного нормального розподілу.

Очевидно, що $\alpha < 1$. Визначимо міру $\nu(\cdot)$:

$$\nu(A) = \nu^*(A)/\alpha.$$

Очевидно, що для визначеної таким чином міри ν виконано умову міноризації:

$$P_{in}(x,A) \ge \alpha\nu(A), \forall x\in[a,b],$$

де P_{in} — перехідні імовірності, визначені формулами (21) та (23). Перевіримо тепер умову рівномірної близькості. Як $Q_n(x,A)$ оберемо величину

$$Q_n(x,A) = \begin{cases} (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\int_A \exp\Bigl(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma_n^2}\Bigr)\wedge\exp\Bigl(-\frac{(y-x-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\Bigr)dy,\ A\subset(a,b),\\ \min\{P_{1n}(x,\{b\}),P_{2n}(x,\{b\})\},\ \text{якщо}\ A=\{b\},\\ \min\{P_{1n}(x,\{a\}),P_{2n}(x,\{a\})\},\ \text{якщо}\ A=\{a\}.\end{cases} \tag{24}$$

Тоді

$$\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x,[a,b]) = \begin{cases} Q_n(b,[a,b]),\ \Delta_n<0,\\ Q_n(a,[a,b]),\ \Delta_n>0.\end{cases} \tag{25}$$

Щільності нормальних розподілів $\mathcal{N}(b,\sigma_n^2)$ та $\mathcal{N}(b+\Delta_n,\sigma_n^2)$ набувають однакових значень у точці $x_b = \Delta_n/2+b$ при $\Delta_n<0$, а щільності $\mathcal{N}(a,\sigma_n^2)$ та $\mathcal{N}(a+\Delta_n,\sigma_n^2)$ набувають однакових значень у точці $x_a = \Delta_n/2+a$ при $\Delta_n>0$. Тоді з формул (24) та (25) випливає, що при $\Delta_n<0$

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x,[a,b]) = \\
&= (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2}\biggl(\int_{-\infty}^{x_b}\exp\biggl(-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_n^2}\biggr)dy + \int_{x_b}^{+\infty}\exp\biggl(-\frac{(y-b-\Delta_n)^2}{2\sigma_n^2}\biggr)dy\biggr) = \\
&= 1+\Phi\biggl(\frac{b-x_b}{\sigma_n}\biggr)-\Phi\biggl(\frac{x_b-b-\Delta_n}{\sigma_n}\biggr).
\end{aligned}$$

Аналогічно при $\Delta_n > 0$

$$\inf_{x\in[a,b]} Q_n(x,[a,b]) = 1 + \Phi\left(\frac{x_a - a - \Delta_n}{\sigma_n}\right) - \Phi\left(\frac{x_a - a}{\sigma_n}\right).$$

Позначимо

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\Delta_n, \sigma_n) = \sup_{x\in[a,b]} 1 - Q_n(x,[a,b]) = 1 - \inf_{x\in[a,b]} Q_n(x,[a,b]).$$

Очевидно, що $\varepsilon_n \to 0$ при $\Delta_n \to 0$.

Позначимо

$$\Phi_a(\Delta_n) = \Phi\left(\frac{x_a - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_a - a - \Delta_n}{\sigma}\right),$$
$$\Phi_b(\Delta_n) = \Phi\left(\frac{x_b - b - \Delta_n}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b - x_b}{\sigma}\right),$$
$$\varepsilon = \sup_n (\Phi_a(\Delta_n)\mathbb{1}_{\Delta_n>0} + \Phi_a(\Delta_n)\mathbb{1}_{\Delta_n<0}).$$

Таким чином, у цьому випадку теорема 4.1 набуває вигляду теореми 7.1.

Теорема 7.1. *Нехай для ланцюгів $X_n^{(1)}$ та $X_n^{(2)}$, визначених формулами (20) та (22) відповідно, $\varepsilon < 1$. Тоді для довільних $x, y \in [a,b]$, $t \geq 0$, $n \geq 2$ виконані такі нерівності:*

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(x,A)| \leq \varepsilon\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha},$$

$$\sup_{A\in\mathfrak{E}} |P_1^{t,n}(x,A) - P_2^{t,n}(y,A)| \leq (1-\alpha)^n + \varepsilon\left(\frac{1-(1-\alpha)^{n-1}}{\alpha} - (n-1)(1-\alpha)^{n-1}\right).$$

де $\alpha = 1-2\big(\Phi\big(\frac{b-a}{\sigma}\big) - \Phi\big(\frac{b-a}{2\sigma}\big)\big)$, Φ — функція станадартного нормального розподілу.

Список літератури

1. W. Doeblin, *Expose de la theorie des chaines simples constantes de Markov a un nomber fini d'estats*, Mathematique de l'Union Interbalkanique, **2** (1938), 77–105.
2. N.V. Kartashov, *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, 1996.
3. P. Ney, *A refinement of the coupling method in renewal theory*, Stochastic Processes Appl., **11** (1981), 11–26.
4. T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
5. T. Lindvall, *On coupling for continuous time renewal processes*, J. Appl. Probab., **19** (1982), 82–89.
6. H. Thorisson, *The coupling of regenerative processes*, Adv. Appl. Probab., **15** (1983), 531–561.
7. H. Thorisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, New York, 2000.
8. R. Douc, E. Moulines, J.S. Rosenthal, *Quantitative bounds for geometric convergence rates of Markov chains*, Annals of Applied Probability, **14** (2004), 1643–1664.
9. R. Douc, E. Mouliness, P. Solier, *Subgeometric ergodicity of Markov chains*, Dependence in Probability and Statistics, (2007), 55–64.
10. R. Douc, E. Moulines, P. Soulier, *Computable convergence rates for sub-geometric ergodic Markov chains*, Bernoulli, **13** (2007), no. 3, 831–848.
11. V. Golomoziy, *Stability of inhomogeneous Markov chains*, Vysnik Kyivskogo Universitety, **4** (2009), 10–15. (Ukrainian)
12. V. Golomoziy, *A subgeometric estimate of the stability for time-homogeneous Markov chains*, Theory of probability and mathematical statistics, **81** (2010), 35–50.
13. N. Kartashov, V. Golomoziy, *Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. I*, Theory of probability and mathematical statistics, **86** (2012), 81–92.
14. N. Kartashov, V. Golomoziy, *Maximal coupling procedure and stability of discrete Markov chains. II*, Theory of probability and mathematical statistics, **87** (2012), 58–70.
15. V. Golomoziy, N. Kartashov *On coupling moment integrability for time-inhomogeneous Markov chains*, Theory of probability and mathematical statistics, **89** (2014), 1–12.

16. N. Kartashov, V. Golomoziy, *Maximal coupling and stability of discrete non-homogeneous Markov chains*, Theory of probability and mathematical statistics, **91** (2015), 17–27.
17. V. Golomoziy, N. Kartashov, Y. Kartashov, *Impact of the stress factor on the price of widow's pensions. Proofs*, Theory of probability and mathematical statistics, **92** (2016), 17–22.
18. V. Kalashnikov, *Estimation of duration of transition regime for complex stochastic systems*, Trans. Seminar, VNIISI, Moscow (1980), 63–71.
19. D. Griffeath, *A maximal coupling for Markov chains*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, **31** (1975), 95–106.
20. Y. Kartashov, V. Golomoziy, N. Kartashov, *The impact of stress factor on the price of widow's pension*, Modern Problems in Insurance Mathematics (D. Silverstrov and A. Martin-Lof, eds.), E. A. A. Series, Springer, 2014, 223–237.
21. D. Silvestrov, *Synchronized regenerative processes and upper estimates for rate of convergence in ergodic theorems*, Rep. Acad. Sci. Ukraine, Series A, **11** (1980), 22–25.
22. D. Silvestrov, *Upper estimators in ergodic theorems for regenerative processes*, Elektron. Inform. Kybernetik, **16**, no. 8/9, (1980), 461–463.
23. D. Silvestrov, *Method of a single probability space in ergodic theorems for regenerative processes*, 1–3. Math. Operat. Statist., Ser. Optim. Part 1, **14** (1983), no. 2, 285–299, Part 2: **16** (1984), no. 4, 216–231, Part 3: **16** (1984), no. 4, 232–244.
24. D. Silvestrov, *Coupling for Markov renewal processes and the rate of convergence in ergodic theorems for processes with semi-Markov switchings.* Acta Appl. Math., **34** (1994), 109–124.
25. J. W. Pitman, *On coupling of Markov chains*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, **35** (1979), 315–322.

Кафедра теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики, механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601
Адреса електронної пошти: `email: vitaliy.golomoziy@gmail.com`

Стаття надійшла до редколегії 30.09.2019

STABILITY ESTIMATES FOR TRANSITION PROBABILITIES OF TIME-INHOMOGENEOUS MARKOV CHAINS UNDER THE CONDITION OF THE MINORIZATION ON THE WHOLE SPACE

V. GOLOMOZIY

Abstract. In this paper we derive stability estimates for transition probabilities of two time-inhomogeneous Markov chains with discrette time on the general state space. Estimates are obtained using two conditions: minorization on the whole space condition which is equivalent to the uniformal mixing, and proximity condition for transition probabilities. Different types of proximity conditions are considered.