Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 2(101)/2019, с. 93–97

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 2(101)/2019, pp. 93–97

УДК 519.21

ОБМЕЖЕНІ У СЕРЕДНЬОМУ ПОРЯДКУ p РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТРИБКОМ ОПЕРАТОРНОГО КОЕФІЦІЄНТА

М. Ф. ГОРОДНІЙ, І. В. ГОНЧАР

Анотація. Досліджується питання про існування єдиного обмеженого у середньому порядку p на $\mathbb{Z}$ розв'язку лінійного різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта в банаховому просторі.

Ключові слова і фрази. Банахів простір, різницеве рівняння, стрибок операторного коефіцієнта, обмежений у середньому порядку p розв'язок.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H99; Secondary 39A10.

1. Вступ

Нехай (Ω, F, P) — повний імовірнісний простір; X — сепарабельний комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом 0_X; $L(X)$ — банахів простір усіх лінійних обмежених операторів, що діють із X в X. Зафіксуємо $p \in [1;\infty)$ і позначимо через Y банахів простір $L_p(\Omega, X)$ усіх класів еквівалентних випадкових елементів $\xi : \Omega \to X$ таких, що $\|\xi\|_p = (E\|\xi\|^p)^{1/p} < \infty$.

Послідовність $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset Y$ будемо називати обмеженою у середньому порядку p, якщо $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\xi_n\|_p < \infty$.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = A\xi_n + \eta_n, & n \geq 1, \\ \xi_{n+1} = B\xi_n + \eta_n, & n \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

у якому A, B — фіксовані оператори з $L(X)$, $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана послідовність, $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору Y, а рівності (1) повинні виконуватися з імовірністю 1. Мета цієї статті – знайти достатні умови на оператори A, B, при виконанні яких різницеве рівняння (1) має для кожної обмеженої у середньому порядку p послідовності $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений у середньому порядку p розв'язок $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Про застосування різницевих рівнянь з операторними коефіцієнтами у детермінованому випадку див. [1–4], а у стохастичному випадку — [4, 5] та наведені там посилання.

Для детермінованих різницевих рівнянь зі змінними операторними коефіцієнтами умова існування єдиного обмеженого розв'язку еквівалентна умові експоненціальної дихотомії (див., наприклад, [1, с. 251]). У загальному випадку перевірка цієї умови нетривіальна. Для детермінованого аналогу рівняння (1) достатні умови на операторні коефіцієнти, які забезпечують виконання умови експоненціальної дихотомії, отримано в [6] (див. наведену нижче теорему 1).

2. Допоміжні твердження

Кожному оператору $T \in L(X)$ відповідає оператор $\widetilde{T} \in L(Y)$, який визначається за правилом

$$\forall \xi \in Y : (\widetilde{T}\xi)(\omega) = T\xi(\omega), \omega \in \Omega. \tag{2}$$

Зокрема, якщо I — одиничний оператор з $L(X)$, то $\widetilde{I}$ — одиничний оператор з $L(Y)$.

У подальшому використовуються такі леми.

Лема 1. *Якщо $T \in L(X)$, то*

i1) $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$;

i2) резольвентні множини $\rho(T), \rho(\widetilde{T})$ операторів T і $\widetilde{T}$ збігаються;

i3) $(\widetilde{T} - \lambda\widetilde{I})^{-1} = ((T - \lambda I)^{-1})^{\sim}$ для кожного $\lambda \in \rho(T)$.

Доведення. i1) Внаслідок (2) $\widetilde{T} \in L(Y)$ і $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$. Зафіксуємо такий елемент $u \in X$, що $\|u\| = 1$, і покладемо $\varsigma(\omega) = u, \omega \in \Omega$. Тоді $\varsigma \in Y, \|\varsigma\|_p = 1, \|\widetilde{T}\varsigma\|_p = \|Tu\|$, звідки $\|\widetilde{T}\| \geq \|T\|$. Отже, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

i2) Скористаємося теоремою Банаха про обернений оператор. Зафіксуємо $\lambda \in \rho(T)$. Для кожного $\eta \in Y$ рівняння $(\widetilde{T} - \lambda\widetilde{I})\xi = \eta$ має у просторі Y розв'язок

$$\xi(\omega) = (T - \lambda I)^{-1}\eta(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{3}$$

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то знайдеться такий ненульовий елемент $\zeta \in Y$, що $(\widetilde{T} - \lambda\widetilde{I})\zeta = 0_Y$. Але тоді $(T - \lambda I)\zeta(w) = 0_X$ з імовірністю 1, причому $P\{w \in \Omega | \zeta(w) \neq 0_X\} \neq 0$. Це суперечить включенню $\lambda \in \rho(T)$. Отже, $\rho(T) \subset \rho(\widetilde{T})$.

Нехай тепер $\lambda \in \rho(\widetilde{T})$. Зафіксуємо $v \in X$ і покладемо $\eta(\omega) = v$, $\omega \in \Omega$. Оскільки рівняння $(\widetilde{T} - \lambda\widetilde{I})\xi = \eta$ має єдиний розв'язок у просторі Y, то рівняння $(T - \lambda I)x = v$ має розв'язок $x \in X$. Якщо, від супротивного, він не єдиний, то знайдеться такий елемент $w \in X, w \neq 0_X$, що $(T - \lambda I)w = 0_X$. Звідси випливає, що рівняння $(\widetilde{T} - \lambda\widetilde{I})\xi = 0_Y$ має у просторі Y ненульовий розв'язок $\xi(\omega) = w$, $\omega \in \Omega$. Протиріччя. Таким чином, $\rho(\widetilde{T}) \subset \rho(T)$.

Отже, $\rho(\widetilde{T}) = \rho(T)$.

Твердження i3 виконується внаслідок (3).

Лему 1 доведено. □

Лема 2. *Якщо $T(t)$, $t \in [a, b]$, — неперервна за нормою на $[a, b]$ $L(X)$-значна функція, то $\widetilde{T}(t)$, $t \in [a, b]$, — неперервна за нормою на $[a, b]$ $L(Y)$-значна функція і*

$$\left(\int_a^b T(t)dt\right)^{\sim} = \int_a^b \widetilde{T}(t)dt. \tag{4}$$

Зауваження. У (4) розглядаються інтеграли Рімана від операторнозначних функцій.

Доведення. Неперервність $\widetilde{T}(t), t \in [a, b]$, випливає із твердження i1 леми 1. Тому обидва інтеграли із (4) існують.

Зафіксуємо $\xi \in Y$. Оскільки

$$\left\| \left(\int_a^b \widetilde{T}(t)dt\right)\xi - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{T}\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)\xi \right\|_p \to o, \ n \to \infty, \tag{5}$$

та із збіжності послідовності в $L_p(\Omega, X)$ випливає, що деяка її підпослідовність збігається з імовірністю 1, то існує $E_1 \in F$, $P(E_1) = 0$, і строго зростаюча послідовність натуральних чисел $\{n_j,\ j \geq 1\}$, такі, що для кожного $\omega \in \Omega \setminus E_1$

$$\left\| \left(\left(\int_a^b \widetilde{T}(t)dt \right) \xi \right)(\omega) - \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} \widetilde{T}\left(a + \frac{b-a}{n_j} k \right) \xi(\omega) \right\| \to o,\ j \to \infty. \tag{6}$$

З іншого боку для кожного $\omega \in \Omega$

$$\left(\left(\int_a^b T(t)dt \right)^{\sim} \xi \right)(\omega) = \int_a^b T(t)\xi(\omega)dt = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n_j} \sum_{k=0}^{n_j-1} \widetilde{T}(a + \frac{b-a}{n_j}k)\xi(\omega) \tag{7}$$

у просторі X. Із (6), (7) випливає, що виконується рівність (4).

Лему 2 доведено. □

Зафіксуємо такий оператор $T \in L(X)$, що для його спектра $\sigma(T)$ виконується умова $\sigma(T) \cap S = \emptyset$, де $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Нехай $\sigma_-(T)$ — частина спектра, що лежить усередині, а $\sigma_+(T)$ — зовні кола S. Вважатимемо, що множини $\sigma_-(T), \sigma_+(T)$ непорожні. Зауважимо, що усі отримані нижче результати залишаються справедливими й у випадку, коли серед цих множин є порожня, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Із теореми про спектральний розклад оператора в банаховому просторі (див., наприклад, [4, с. 8]) випливає, що простір X розкладається у пряму суму інваріантних відносно T підпросторів $X = X_-(T) \dot{+} X_+(T)$ таким чином, що звуження T_-, T_+ оператора T на $X_-(T), X_+(T)$ мають спектри $\sigma_-(T), \sigma_+(T)$.

Позначимо через $P_-(T), P_+(T)$ проектори в X на підпростори $X_-(T), X_+(T)$.

Лема 3. *Нехай $T \in L(X), \sigma(T) \cap S = \emptyset$. Тоді*

j1) $\sigma(\widetilde{T}) \cap S = \emptyset, \sigma_-(T) = \sigma_-(\widetilde{T}), \sigma_+(T) = \sigma_+(\widetilde{T})$;

j2) $P_-(\widetilde{T}) = \widetilde{P_-(T)}, P_+(\widetilde{T}) = \widetilde{P_+(T)}$.

Доведення. j1 випливає із твердження i2 леми 1.

j2) Скориставшись явним виглядом проекторів із спектрального розкладу оператора і лемою 2, матимемо

$$P_-(\widetilde{T}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_S (\widetilde{T} - \lambda \widetilde{I})^{-1} d\lambda = (-\frac{1}{2\pi i} \int_S (T - \lambda I)^{-1} d\lambda)^{\sim} = \widetilde{P_-(T)}.$$

Також

$$P_+(\widetilde{T}) = \widetilde{I} - P_-(\widetilde{T}) = (I - P_-(T))^{\sim} = \widetilde{P_+(T)}.$$

Лему 3 доведено. □

Лема 4. *Нехай T, V — такі оператори з $L(X)$, що $\sigma(T) \cap S = \emptyset$, $\sigma(V) \cap S = \emptyset$, $X = X_-(T) \dot{+} X_+(V)$. Тоді $Y = X_-(\widetilde{T}) \dot{+} X_+(\widetilde{V})$.*

Доведення. Позначимо через P_-, P_+ проектори в X, що відповідають зображенню $X = X_-(T) \dot{+} X_+(V)$. Зафіксуємо $\xi \in Y$. Оскільки $\xi(\omega) = \xi_-(\omega) + \xi_+(\omega)$ для кожного $\omega \in \Omega$, де $\xi_-(\omega) = P_-\xi(\omega), \xi_+(\omega) = P_+\xi(\omega)$, а також, з урахуванням твердження j2 леми 3,

$$Y_-(\widetilde{T}) = \{P_-(T)\zeta(\omega), \omega \in \Omega | \zeta \in Y\}, Y_+(\widetilde{V}) = \{P_+(V)\zeta(\omega), \omega \in \Omega | \zeta \in Y\},$$

то, з урахуванням включень $\xi_-(\omega) \in X_-(T), \xi_+(\omega) \in X_+(V)$ для кожного $\omega \in \Omega$, робимо висновок, що

$$\xi = \xi_- + \xi_+, \tag{8}$$

причому $\xi_- \in Y_-(\widetilde{T}), \xi_+ \in Y_+(\widetilde{V})$.

Нехай окрім (8) справджується зображення $\xi = \eta_- + \eta_+$, де $\eta_- \in Y_-(\widetilde{T})$, $\eta_+ \in Y_+(\widetilde{V})$. Тоді для випадкового елемента $\zeta = \xi_- - \eta_- = \eta_+ - \xi_+$ знайдеться така множина $E_2 \in F,\ P(E_2) = 0$, що $\zeta(\omega) \in X_-(T) \cap X_+(V)$ для кожного $\omega \in \Omega \setminus E_2$, звідки $\zeta(\omega) = 0_X$. Тому $\xi_- = \eta_-, \xi_+ = \eta_+$ у просторі Y, а отже, зображення (8) єдине.

Лему 4 доведено. □

Теорема 1. *Нехай W — комплексний банахів простір, G, U — такі оператори з $L(W)$, що*

a1) $\sigma(G) \cap S = \emptyset$, $\sigma(U) \cap S = \emptyset$;

a2) $W = W_-(G) \dot{+} W_+(U)$.

Тоді різницеве рівняння

$$\begin{cases} x_{n+1} = Gx_n + y_n, & n \geq 1, \\ x_{n+1} = Ux_n + y_n, & n \leq 0, \end{cases}$$

має єдиний обмежений у W розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ для довільної обмеженої у W послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведення теореми 1 можна знайти в [6].

3. Основні результати

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай A, B — такі оператори з $L(X)$, що*

b1) $\sigma(A) \cap S = \emptyset$, $\sigma(B) \cap S = \emptyset$;

b2) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Тоді різницеве рівняння (1) має для довільної обмеженої в середньому порядку p послідовності $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений у середньому порядку p розв'язок $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Доведення. З урахуванням (2) різницеве рівняння (1) записується у просторі Y у такому еквівалентному вигляді:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \widetilde{A}\xi_n + \eta_n, n \geq 1, \\ \xi_{n+1} = \widetilde{B}\xi_n + \eta_n, n \leq 0, \end{cases} \tag{9}$$

причому (9) — детерміноване різницеве рівняння у просторі Y. Тому твердження теореми 2 виконується внаслідок теореми 1 та лем 3, 4.

Теорему 2 доведено. □

Відзначимо, що навіть у випадку $X = \mathbb{C}$, тобто для комплекснозначних випадкових величин, банахів простір $Y = L_p(\Omega, \mathbb{C})$ узагалі кажучи нескінченновимірний, а отже, питання про необхідність умов теореми 2 потрібно вивчати додатково. Відповідь на це питання містить наступна теорема.

Нехай $X = \mathbb{C}$; a, b — фіксовані комплексні числа.

Теорема 3. *Різницеве рівняння*

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = a\xi_n + \eta_n, n \geq 1, \\ \xi_{n+1} = b\xi_n + \eta_n, n \leq 0, \end{cases} \tag{10}$$

має для кожної обмеженої у середньому порядку p послідовності випадкових величин $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ єдиний обмежений у середньому порядку p розв'язок $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ тоді і тільки тоді, коли $\begin{cases} |a| < 1, \\ |b| < 1, \end{cases}$ *або* $\begin{cases} |a| > 1, \\ |b| > 1. \end{cases}$

Доведення. Достатність випливає з теореми 2 і того, що лінійний оператор $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, який діє за правилом $Ax = ax, x \in \mathbb{C}$, має спектр $\sigma(A) = \{a\}$, причому $X_-(A) = \mathbb{C}, X_+(A) = \{0\}$ при $|a| < 1$, але $X_-(A) = \{0\}, X_+(A) = \mathbb{C}$ при $|a| > 1$.

Перевіримо необхідність. Нехай, від супротивного, $|a| = 1$. Розглянемо сталу обмежену у середньому порядку p послідовність $\eta_n(w) \equiv a^{n-1}, n \geq 1; \eta_n(w) \equiv 0, n \leq 0$. Внаслідок (10) для відповідного до неї єдиного обмеженого у середньому порядку p розв'язку $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ виконуються рівності $\xi_{n+1} = a^n\xi_1 + na^{n-1}, n \geq 1$, звідки $\|\xi_{n+1}\|_p \geq n - \|\xi_1\|_p$ для кожного $n \geq 1$, що суперечить обмеженості у середньому порядку p послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Аналогічно перевіряється, що $|b| \neq 1$.

Доведемо тепер, що при $|a| > 1$ обов'язково виконується нерівність $|b| > 1$. Покладемо $\eta_1(\omega) \equiv 1, \eta_n(\omega) \equiv 0, n \neq 1$. Тоді для відповідного до цієї послідовності єдиного обмеженого у середньому порядку p розв'язку $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (10) матимемо $\xi_{n+1} = a^{n-1}\xi_2, n \geq 2$. Звідси, врахувавши нерівність $|a| > 1$, робимо висновок, що $\xi_2 = 0$ з імовірністю 1. Але тоді $\xi_k(w) = -a^{-1}b^{k-1}, k \leq 1$, з імовірністю 1. Тому з обмеженості в середньому порядку p послідовності $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ і співвідношення $|b| \neq 1$ випливає, що $|b| > 1$.

За допомогою аналогічних міркувань можна переконатися, що при $|a| < 1$ справджується нерівність $|b| < 1$.

Теорему 3 доведено. □

Список літератури

1. D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.
2. V. E. Slyusarchuk, *Invertibility of nonautonomous linear difference operators in the space of bounded functions on* $\mathbb{Z}$, Math. Notes, **37** (1985), no. 5, 360–363.
3. A. G. Baskakov, *On the invertibility of linear difference operators with constant coefficients*, Russian Math. (Iz. VUZ), **45** (2001), no. 5, 1–9.
4. Dorogovtsev, A. Ya., *Periodic and stationary conditions of infinite-dimensional determinated and stochastic dynamical systems*, Vyshcha Shkola, Kyiv, 1992. (In Russian)
5. T. Morozan, *Bounded, periodic and almost periodic solutions of stochastic discrete-time systems*, Rev. Roumaine Math. Pure Appl., **32** (1987), no. 8, 711–718.
6. I. V. Gonchar, *On the bounded and summable solutions of a difference equation with a jump of an operator coefficient*, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, **2** (2016), 25–28. (In Ukrainian)

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: gorodnii@univ.kiev.ua

Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64/13, м. Київ, Україна, 01601

Адреса електронної пошти: goncharinna@ukr.net

Стаття надійшла до редколегії 04.07.2019

BOUNDED IN THE MEAN OF ORDER p SOLUTIONS OF A DIFFERENCE EQUATION WITH JUMP OF AN OPERATOR COEFFICIENT

M. F. GORODNII, I. V. GONCHAR

Abstract. We study the problem of existence of a unique solution bounded in the mean of order p on $\mathbb{Z}$ for a linear difference equation with a jump of the operator coefficient in a Banach space.