Г. Л. КУЛИНИЧ, доц.
Киевский университет

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ОТ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Данная работа является продолжением работы [1], в которой рассматривались при соответствующей нормировке предельные распределения при $t \to \infty$ функционалов

$$\int_0^t g(\xi, (s))\, ds, \qquad \int_0^t g(\xi(s))\, dw(s).$$

Здесь $\xi(t)$ — решение одномерного диффузионного уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\, dt + \sigma(\xi(t))\, dw(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям существования и единственности решения, $\sigma(x) > 0$ и

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{f(\gamma |x|)}{\int\limits_0^{\gamma|x|} [f'(v)\, \sigma^2(v)]^{-1}\, dv} = \begin{cases} \sigma_1^2 & (\gamma > 0), \\ \sigma_2^2 & (\gamma < 0), \end{cases}$$

где

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{-2 \int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\, dv\right\} du. \tag{2}$$

В настоящей работе результаты [1] распространяются на более широкий класс функций $g(x)$, а в теореме 3 рассматривается предельное распределение функционалов

$$\int_0^t g(\xi(s))\, dw(s)$$

при $t \to \infty$ для функций $g(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Оказывается, что предельное распределение совпадает с распределением некоторого функционала от процесса $\eta(t)$, являющегося решением уравнения

$$\eta(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\, dw_1(s), \tag{3}$$

где $w_1(s)$ — винеровский процесс,

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_1 & (x > 0), \\ \sigma_2 & (x < 0), \end{cases}$$

и удовлетворяющего условию

$$\int_0^t P\{|\eta(s)| = 0\}\,ds = 0.$$

Для аддитивных функционалов от случайных блужданий в р[аботе] [2] получены предельные распределения, которые совпада[ют] с распределениями аналогичных функционалов от винеровского пр[о]цесса.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (1), $\xi(0) = x$[,] функция $g(x)$ имеет конечное число разрывов первого рода и така[я,] что

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\int\limits_0^{\gamma|x|} [f'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1} g(v)\,dv}{\psi(f(\gamma|x|))} = \begin{cases} \beta_1 & (\gamma > 0), \\ \beta_2 & (\gamma < 0), \end{cases}$$

где $f(x)$ — задана соотношением (2), $\psi(x)$ — регулярно меняющаяс[я] функция порядка $\alpha \geqslant 0$.

Тогда предельное распределение случайной величины $\frac{1}{\sqrt{t}\,\psi(\sqrt{t})} \times$ $\times \int\limits_0^t g(\xi(s))\,ds$ при $t \to \infty$ существует и совпадает с распределение[м] величины

$$2\left[\int\limits_0^{\eta(1)} |x|^\alpha\,dx\,\bar{\sigma}_1(\eta(1)) - \int\limits_0^1 |\eta(s)|^\alpha\,\bar{\sigma}_1(\eta(s))\,d\eta(s)\right],$$

где $\eta(t)$ — решение уравнения (3),

$$\bar{\sigma}_1(x) = \begin{cases} \beta_1 & (x > 0), \\ \beta_2 & (x < 0). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (1), $\xi(0) = x_0$, функция $g(x)$ ограничена на каждом конечном промежутке и такая, что для некоторой регулярно меняющейся функции $\psi(z)$ порядка $\alpha > 0$ выполняется

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(\gamma|x|)}{\psi(f(\gamma|x|))\,f'(\gamma|x|)\,\sigma(\gamma|x|)} = \begin{cases} \beta_1 & (\gamma > 0), \\ \beta_2 & (\gamma < 0). \end{cases}$$

Тогда распределение случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{t}\psi(\sqrt{t})}\int_0^t g(\xi(s))\,dw(s)$$

при $t\to\infty$ сходится к распределению случайной величины

$$\int_0^1 \bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^\alpha\,d\eta(s),$$

где $\eta(t)$ — решение уравнения (3), а $\bar{\sigma}_1(x)$ определяется соотношением (4).

Доказательство теорем 1 и 2 можно получить методом, аналогичным использованному при доказательстве соответствующих теорем [1].

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (1), $\xi(0)=x_0$, а функция $g(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$ так, что

$$1)\quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{\int_0^{\gamma|x|}[f'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1}g^2(v)\,dv}{\psi(f(\gamma|x|))}=\begin{cases}\beta_1 & (\gamma>0),\\ \beta_2 & (\gamma<0),\end{cases}$$

где $\psi(z)$ — медленно меняющаяся функция,

$$2)\quad \frac{\int_0^{|x|}[f'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1}\,|g(v)|\,dv}{\psi_1(f(|x|))}\leqslant C,$$

где $\psi_1(z)$ — регулярно меняющаяся функция порядка $\alpha\geqslant 0$, такая, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\psi_1(\sqrt{t})}{\sqrt{\psi(\sqrt{t})\sqrt{t}}}=0$.

Тогда предельное распределение случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(\sqrt{t})\sqrt{t}}}\int_0^t g(\xi(s))\,dw(s)$$

при $t\to\infty$ существует и совпадает с распределением случайной величины

$$\xi\sqrt{2}\left[\eta(1)\,\bar{\sigma}_1(\eta(1))-\int_0^1\bar{\sigma}_1(\eta(s))\,d\eta(s)\right]^{1/2},$$

где $\eta(t)$ — решение уравнения (3), $\bar{\sigma}_1(x)$ задана соотношением (4), а ξ — нормальная случайная величина с параметрами $(0,1)$, не зависящая от $\eta(t)$.

Доказательство. Обозначим

$$\gamma_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\psi(\sqrt{T})\sqrt{T}}} \int_0^{tT} g(\xi(s))\, dw(s), \qquad \eta_T(t) = \frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}},$$

$$\tau_T(t) = \inf\left\{s : \frac{\sqrt{T}}{\psi(\sqrt{T})} \int_0^s g^2(\xi(vT))\, dv \geqslant t\right\}, \quad w_T(t) = \frac{w(tT)}{\sqrt{T}}.$$

Тогда

$$\gamma_T(t) = \frac{\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\psi(\sqrt{T})}} \int_0^t g(\xi(sT))\, dw_T(s).$$

Так как $\tau_T(t)$ — марковский момент относительно семейства σ-алгебр $F_T(t) = (w_T(s),\ s \leqslant t)$, то [3] $\gamma_T(\tau_T(t))$ — винеровский процесс, который далее обозначаем $\tilde{w}_T(t)$. Поэтому

$$\gamma_T(t) = \tilde{w}_T\left(\frac{\sqrt{T}}{\psi(\sqrt{T})} \int_0^t g^2(\xi(sT))\, ds\right).$$

Легко показать, что $\mathbf{M}[\eta_T(t)]^2 \leqslant C$, $\quad \mathbf{M}[\eta_T(t+\Delta) - \eta_T(t)]^2 \leqslant C\Delta$. Следовательно, можем считать, что для любой последовательности $T'_n \to \infty$ существует подпоследовательность $T_n \to \infty$ такая, что $\eta_{T_n}(t) \to \eta(t)$, $w_{T_n}(t) \to w_0(t)$, $\tilde{w}_{T_n}(t) \to \tilde{w}(t)$ по вероятности при $T_n \to \infty$.

Из доказательства теоремы 1 работы [1] вытекает, что по вероятности при $T_n \to \infty$

$$\frac{\sqrt{T_n}}{\psi(\sqrt{T_n})} \int_0^t g^2(\xi(sT_n))\, ds \to \zeta(t),$$

где

$$\zeta(t) = 2\left[\eta(t)\, \bar{\sigma}_1(\eta(t)) - \int_0^t \bar{\sigma}_1(\eta(s))\, d\eta(s)\right],$$

$\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (3), $\bar{\sigma}_1(x)$ задана соотношением (4), а $\zeta(t)$ измерима относительно σ-алгебры $(w_0(s),\ s \leqslant t)$. Поэтому

$$\tilde{w}_{T_n}\left(\frac{\sqrt{T_n}}{\psi(\sqrt{T_n})} \int_0^t g^2(\xi(sT_n))\, ds\right) \to \tilde{w}(\zeta(t))$$

по вероятности при $T_n \to \infty$. Так как

$$\mathbf{M}\tilde{w}_{T_n}(t)\, w_{T_n}(t) = \mathbf{M}\frac{\sqrt[4]{T_n}}{\sqrt{\psi(\sqrt{T_n})}}\int_0^t g(\xi(sT_n))\,\chi_{T_n}(s)\,ds,$$

где $\chi_{T_n}(s) = 1$ при $s \leqslant \tau_{T_n}(t)$ и 0 при $s > \tau_{T_n}(t)$, и на основании условия 2) теоремы

$$\mathbf{M}\frac{\sqrt{T}}{\psi_1(\sqrt{T})}\int_0^t |g(\xi(sT))|\,ds \leqslant C,$$

то

$$\lim_{T_n\to\infty}\mathbf{M}\tilde{w}_{T_n}(t)\, w_{T_n}(t) = 0.$$

Значит, винеровские процессы $\tilde{w}(t)$ и $w_0(t)$ независимы и

$$\tilde{w}(\zeta(t)) = \frac{w(\zeta(t))}{\sqrt{\zeta(t)}}\sqrt{\zeta(t)} = \xi\sqrt{\zeta(t)},$$

где ξ — нормальная случайная величина с параметрами (0, 1), не зависящая от $\zeta(t)$. Из произвольности последовательности $T_n' \to \infty$ и единственности решения уравнения (3) следует доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулинич Г. Л. Об асимптотическом поведении распределения функционалов типа $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$ от диффузионного процесса.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 8, 1973.
2. Скороход А. В., Слободенюк Н. П. Предельные теоремы для случайных блужданий. К., «Наукова думка», 1970.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.

G. L. Kulinich

LIMIT DISTRIBUTIONS FOR FUNCTIONALS OF INTEGRAL TYPE OF UNSTABLE DIFFUSION PROCESSES

Summary

In the present paper the class of limit distributions for the functionals

$$\int_0^t g(\xi(s))\,ds, \quad \int_0^t g(\xi(s))\,dw(s)$$

is described when $t \to \infty$. The process $\xi(t)$ is the solution of one-dimensional stochastic diffusion equation and $\xi(t)$ satisfies the following condition: $|\xi(t)| \xrightarrow{P} \infty$, $t \to \infty$.

Поступила в редколлегию 3.XII 1972.