А. А. МОГУЛЬСКИЙ, асп.
Новосибирский университет

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ, ЗАДАННЫХ НА КОНЕЧНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Объектом изучения является однородный по времени и аддитивный по первой компоненте двумерный марковский процесс $\xi(t) = \{(s(t), \varkappa(t));\ t \geqslant 0\}$. Вторая координата $\{\varkappa(t);\ t \geqslant 0\}$ есть однородный марковский процесс, принимающий конечное множество значений, а первая координата $\{s(t);\ t \geqslant 0\}$, $s(0) = 0$ представляет собой «процесс с независимыми приращениями», зависящий от второй координаты. Такие процессы рассматривались ранее, например, в работе [1], где была получена, в частности, формула для матрицы

$$\mathbf{A}(\lambda, t) = \| \mathbf{M}(e^{i\lambda(s(t+u)-s(u))};\quad \varkappa(t+u) = j \mid \varkappa(u) = i) \|$$

при $u \geqslant 0$, которая задает эволюцию процесса $(s(t), \varkappa(t))$.

Пусть $\bar{s}(t)$ — максимум на отрезке от 0 до t и $\theta(t)$ — момент первого достижения максимума: $\eta(u)$ — момент первого касания уровня $u \geqslant 0$ и $\chi(u)$ — величина первого перескока через этот уровень. Основное содержание работы состоит в отыскании преобразований Лапласа над характеристическими функциями совместных распределений введенных функционалов — так называемых факторизационных тождеств. Аналогичные тождества были получены ранее для последовательностей сумм независимых слагаемых [2, 3], для последовательностей сумм, заданных на переходах конечной цепи Маркова [4], для процессов с независимыми приращениями [3, 5, 6].

§1. **Формула Леви—Хинчина для матриц.** Будем называть некоторую квадратную матрицу $\mathbf{A}(\lambda) = \| A_{ij}(\lambda) \|$ порядка N характеристической матрицей (х. м.), если она имеет вид

$$\mathbf{A}(\lambda) = \| p_{ij} f_{ji}(\lambda) \|, \tag{1.1}$$

двумерных марковских процессов $(s_n, \varkappa_n)$, вторая координата которых $\{\varkappa_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$ есть конечная цепь Маркова, а первая координата представляет последовательность сумм случайных величин, заданных на переходах цепи $\{\varkappa_n;\ n = 0, 1, \ldots\}$.

Обозначим через Ψ класс квадратных матриц $\psi(\lambda) = \|\psi_{ij}(\lambda)\|$ порядка N, которые являются непрерывными по λ пределами последовательностей матриц вида $n(\mathbf{A}_n(\lambda) - \mathbf{E})$, где $\mathbf{A}_n(\lambda)$ — характеристические матрицы, $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

В силу леммы из гл. XVII, § 2 [7] элементы любой матрицы $\psi(\lambda) \in \Psi$ можно представить в виде

$$\psi_{ij}(\lambda) = \begin{cases} -\lambda_i (1 - p_{ii}) + \psi_i(\lambda), & \text{если } j = i, \\ \lambda_i p_{ij} f_{ij}(\lambda), & \text{если } j \neq i, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots N$; $\|p_{ij}\|$ — стохастическая матрица; $f_{ij}(\lambda)$ — х. ф., $i, j = 1, \ldots, N$ и $\psi_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, N$ — логарифмы безгранично делимых х. ф.

В представлении (1.2) элементы, входящие в правую часть, определены, вообще говоря, неоднозначно, в чем можно убедиться, заметив, что числа λ_i, p_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ (т. е. всего $N^2 + N$ чисел) должны удовлетворять N^2 уравнениям второго порядка.

Имеет место следующее утверждение, которое доказывается так же, даже несколько проще, чем уже упоминавшаяся лемма [7].

Лемма 1. Для того чтобы некоторая характеристическая матрица $\mathbf{A}(\lambda)$ удовлетворяла следующему условию: для любого целого n найдется характеристическая матрица $\mathbf{A}_n(\lambda)$ такая, что

$$\mathbf{A}_n^n(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda), \mathbf{A}_n(\lambda) \to \mathbf{E} \text{ при } n \to \infty, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$\mathbf{A}(\lambda) = \exp(\psi(\lambda)), \quad \psi(\lambda) \in \Psi. \tag{1.4}$$

Формулу (1.4) (она была получена, например, в [1]) естественно называть формулой Леви-Хинчина для матриц, а матрицы, удовлетворяющие (1.3),— безгранично делимыми характеристическими.

Эволюцию процессов $\xi(t) = (s(t), \varkappa(t))$ задают безгранично делимые характеристические матрицы

$$\mathbf{A}(\lambda, t) = \|\mathbf{M}(e^{i\lambda s(t)}; \qquad \varkappa(t) = j/\varkappa(0) = l)\| = \exp(t\psi(\lambda)), \tag{1.5}$$

где $\psi(\lambda) \in \Psi$.

2. Граничные функционалы в $D(0, t)$. Будем считать, что выборочные траектории процесса $\xi(t) = (s(t), \varkappa(t))$ непрерывны справа. В этом случае выборочные траектории первой координаты с вероятностью 1 принадлежат пространству $D(0, t)$ вещественных функций $x(u)$, имеющих в любой точке отрезка $[0, t]$

предел справа и слева, непрерывных в точках $[0, t)$ справа, а точке t — слева.

В пространстве $D(0, t)$ определим ряд граничных функционалов:

$\bar{x}(t) = \sup\limits_{0 \leqslant u \leqslant t} x(u)$ — максимум на $[0, t]$;

$\theta_x(t) = \inf\{u \geqslant 0 : x(u) = \bar{x}(t)\}$ — момент первого достижения максимума;

$\bar{\theta}_x(t) = \sup\{u \leqslant t : x(u) = \bar{x}(t)\}$ — момент последнего на $[0, t]$ достижения максимума;

$\eta_x(u) = \inf\{t \geqslant 0 : x(t) \geqslant u\}$ — момент первого касания уровня $u > 0$;

$\chi_x(u) = x(\eta_x(u)) - u$ — величина первого перескока через уровень $u > 0$.

Можно показать, что эти функционалы, определенные на выборочных траекториях процесса $s(t)$, будут случайными величинами. При обозначении последних будем опускать нижний индекс, т. е. писать $\theta(t)$, $\eta(u)$ и т. д. вместо $\theta_s(t)$, $\eta_s(u)$ и т. д.

Введем несколько обозначений. Пусть R — некоторое кольцо. Тогда через $\mathbf{M}(R)$ обозначим кольцо квадратных матриц порядка N с элементами из R.

Под сходимостью числовых матриц $\|A_{ij}^{(h)}\| \to \|A_{ij}\|$ будем понимать покомпонентную сходимость $A_{ij}^{(h)} \to A_{ij}$; $i\ j = 1, \ldots, N$.

Произвольной матрице $A = \|A_{ij}\|$ поставим в соответствие матрицу

$$\|\mathbf{A}\| = \Big\|\sum_{k=1}^{N} A_{ik}\delta_{ij}\Big\|.$$

3. Вспомогательные леммы. Обозначим через $R(0, t)$ множество функций из $D(0, t)$, которые на отрезке $[\theta_x(t), \bar{\theta}_x(t)]$ принимают конечное число значений. Иначе говоря, всякая функция $x \in R(0, t)$ на отрезке $[\theta_x(t), \bar{\theta}_x(t)]$ состоит из конечного числа прямолинейных ступенек (в частности, если для $x \in D(0, t)$ выполняется $\theta_x(t) = \bar{\theta}_x(t)$, то $x \in R(0, t)$).

Будем говорить, что однородный процесс с независимыми приращениями относится к типу A_+, A_-, A_0, если он является обобщенным пуассоновским процессом с положительным, отрицательным или нулевым сносом соответственно. Остальные однородные процессы с независимыми приращениями отнесем к типу B. Множество $\{1, \ldots, N\}$ значений координаты $\varkappa(t)$ разбиваем на четыре непересекающихся подмножества a_+, a_-, a_0, b в соответствии с разбиением на типы $A+$, $A-$, A_0, B процессов, определенных на множестве $\{1, \ldots, N\}$.

Имеют место следующие леммы (условимся через $P_i(\cdot)$ обозначать $\mathbf{P}(\cdot / \varkappa(0) = i)$).

Лемма 2. Для $i \in b$

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0) = 0.$$

Лемма 3. Для $i = 1, \ldots, N$

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0;\ \chi(u) \in b \text{ для некоторого } u \in [0, \theta(t)]) = 0.$$

Лемма 4 Для $i \in a_+ \bigcup a_-$

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0;\ \theta(t) < t) = 0.$$

Лемма 5. Для $i = 1, \ldots, N$

$$\mathbf{P}_i(\chi(u) \notin a_0 \text{ для некоторого } u, \theta(t) < u < \bar{\theta}(t)) = 0.$$

Доказательство леммы 3. Для любого числа $l; 0 < l < t$, в силу леммы 2

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0,\ 0 < l < \theta(t),\ \chi(l) \in b) \leqslant \sum_{k \in b} \int_{-\infty}^{x} \mathbf{P}_i(s(l) \in du,$$

$$\chi(l) = k)\, \mathbf{P}_k(\bar{s}(t - l) = x - u > 0) = 0.$$

Поскольку справедливо включение

$$\{\bar{s}(t) = x > 0,\ \varkappa(u) \in b \text{ для некоторого } u \in [0, \theta(t))\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{l \in R} \{\bar{s}(t) = x > 0,\ \varkappa(l) \in b\},$$

где R — множество рациональных чисел из $(0, t)$, то лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. В силу леммы 3 достаточно доказать, что для $i \in a_- \bigcup a_+$

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0, \theta(t) < t, \varkappa(u) \notin b \text{ для всех } u \in [0, \theta(t)]) = 0.$$

Обозначим через L количество скачков второй координаты на отрезке $[0, \theta(t)]$. Рассмотрим, далее, все множество $\mathfrak{n}_k$ векторов $\alpha = (i_1, \ldots, i_k)$ длины k, где $i_1 = i \in a_+ \bigcup a_-$, $i_j \in a_+ \bigcup a_- \bigcup a_0$, $2 \leqslant j \leqslant k - 1$; $i_k \in \{1, \ldots, k\}$.

Поставим в соответствие каждому вектору $\alpha \in \mathfrak{n}_k$ событие $A^k(\alpha)$, состоящее в том, что последовательность первых k значений второй координаты процесса $(s(t), \varkappa(t))$ задается вектором α. Имеем

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0, \theta(t) < t, \varkappa(u) \in a_+ \cup a_0 \cup a_- \text{ для всех } u \in [0, \theta(t)]) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathfrak{n}_k} \mathbf{P}_i(A^k(\alpha))\, \mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0, \theta(t) < t, L = k / A^k(\alpha)).$$

Через $\tau_k, k = 1, 2, \ldots$ обозначим момент k-го скачка второй координаты. Пусть $\eta_k = \max(s(\tau_k), \ s(\tau_k - 0))$. Для $\alpha \in \pi_k$

$$\mathbf{P}_i(\bar{s}(t) = x > 0, \theta(t) < t, \ L = k/A^k(\alpha)) \leqslant \mathbf{P}_i(\eta_k = x > 0/A^k(\alpha)) = 0,$$

поскольку функция распределения $\mathbf{P}_i(\eta_k < x/A^k(\alpha))$ абсолютно непрерывна.

Лемма 4 доказана.

В следующем параграфе наряду с процессом $\xi(t) = (s(t), \varkappa(t))$ рассмотрим процессы $\xi^{(n)}(t) = (s^{(n)}(t), \varkappa^{(n)}(t))$, где $s^{(n)}(t) = s(2^{-n}k)$, $\varkappa^{(n)}(t) = \varkappa(2^{-n}k)$ при $2^{-n}k \leqslant t < 2^{-n}(k+1)$.

При фиксированном $t \geqslant 0$ рассмотрим последовательность случайных векторов

$$g^{(n)}(t) = \overline{(s}^{(n)}(t), \theta^{(n)}(t), s^{(n)}(t), \varkappa^{(n)}(t); \ n = 1, 2, \ldots,$$

а также случайный вектор

$$\mathbf{g}(t) = (\bar{s}(t), \theta(t), s(t), \varkappa(t)),$$

которые заданы на одном вероятностном пространстве. Из лемм 2—5 следует, что с вероятностью 1 имеет место сходимость $\mathbf{g}^{(n)}t \to \mathbf{g}(t)$ при $n \to \infty$.

Аналогичные утверждения (см. также [2]) справедливы и для случайных векторов $h^{(n)}(u) = (\eta^{(n)}(u), \chi^{(n)}(u), \varkappa^{(n)}(\eta^{(n)}(u)))$; $n = 1, 2, \ldots$, $\mathbf{h}(u) = (\eta(u), \varkappa(u), \chi(\eta(u)))$ при $u > 0$.

§2. 1. V_0-факторизация. Класс функций вида $f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dv(x)$, где $v(x)$ — комплекснозначная функция ограниченной вариации, с обычными операциями сложения и умножения образует кольцо, которое обозначим буквой $\mathfrak{B}$. Через $\mathfrak{B}_+$ и $\mathfrak{B}_-$ обозначим подкольца функций вида $f(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} e^{i\lambda x} dv(x)$ и $f(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\lambda x} dv(x)$ соответственно. Буквой $\mathfrak{A}_{k+}$ обозначим класс функций $f(\lambda)$, аналитических в верхней полуплоскости, непрерывных во всех конечных точках вещественной оси и таких, что $\sup\limits_{\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}} |f(\lambda)(\lambda + i)^{-k}| < \infty$.

Тогда кольцо $\mathfrak{A}_+ = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{k+}$ состоит из функций, которые растут на бесконечности не быстрее некоторого полинома. Классы и кольца функций, обладающие аналогичными свойствами в нижней полуплоскости, обозначим соответственно $\mathfrak{A}_{k-}$ и $\mathfrak{A}_-$. Согласно с обозначением § 1 через $\mathbf{M}(\mathfrak{B})$, $\mathbf{M}(\mathfrak{B}_+)$, $\mathbf{M}(\mathfrak{A}_-)$ и т. д. обозначим кольца квадратных матриц порядка N с элементами из $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_+$, $\mathfrak{A}_-$ и т. д.

Через ψ_+ (ψ_-) обозначим класс функций $g(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda = 0$), являющихся непрерывными по λ пределами последовательности функций вида $c_n(f_n(\lambda) - 1)$, где $c_n \geqslant 0$, функции $f_n(\lambda)$ характеристические и $f_n(\lambda) \in \mathfrak{B}_+$ ($f_n(\lambda) \in \mathfrak{B}_-$). В силу леммы из гл. XVII, § 2 [7] класс ψ_+ (ψ_-) совпадает с классом логарифмов безгранично делимых х. ф., у которых носитель спектральной меры сосредоточен на правой (левой) полуоси.

Класс квадратных матриц $\mathrm{g}(\lambda) = \| g_{ij}(\lambda) \|$ порядка N с элементами $g_{ij}(\lambda) \in \psi_+$ (ψ_-) обозначим как Ψ_+ (Ψ_-). Легко видеть, что класс Ψ_+ (Ψ_-) совпадает с классом матриц, которые являются непрерывными по λ пределами последовательностей матриц вида $\mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{A}^{(n)}(\lambda) - \mathbf{A}^{(n)}(0))$, где $\mathbf{C}^{(n)}\| = \| \mathbf{C}_{ij}^{(n)} \|$, $\mathbf{A}^{(n)} = \| \mathbf{A}_{ij}^{(n)} \|$ — матрицы порядка N, причем $C_{ij}^{(n)} \geqslant 0$, $A_{ij}^{(n)}(\lambda) / A_{ij}^{(n)}(0)$ — характеристические функции; $i, j = 1, \ldots, N$; $\mathbf{A}^{(n)}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_+)$ ($\mathbf{M}(\mathfrak{B}_-)$).

Известно, что любая функция $g(\lambda)$ из ψ_+ принадлежит классу $\mathfrak{A}_{3+}$, поэтому $\Psi_+ \subset \mathbf{M}(\mathfrak{A}_+)$. Аналогично $\Psi_- \subset \mathbf{M}(\mathfrak{A}_-)$.

Введем понятие V_0-факторизации. Будем говорить, что матрица $\mathbf{A}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B})$ допускает левую V_0-факторизацию (л. V_0-ф.), если при $\operatorname{Im}\lambda = 0$ имеет место представление

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_+(\lambda)\,\mathbf{A}_-(\lambda), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}_\pm(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_\pm)$, $\mathbf{A}_\pm^{-1}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{A}_\pm)$.

Правая V_0-факторизация (п. V_0-ф.), когда матрица из $\mathbf{M}(\mathfrak{B}_+)$ — справа, определяется аналогично.

Замечание. V_0-факторизация некоторой матрицы единственна с точностью до константы (некоторой невырожденной матрицы, не зависящей от λ) в классе всех V_0-факторизаций этой матрицы. Действительно, пусть матрица $\mathrm{A}(\lambda)$ допускает две л.V_0 = ф.:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_+(\lambda)\,\mathbf{A}_-(\lambda) = \mathbf{B}_+(\lambda)\,\mathbf{B}_-(\lambda). \tag{2.1$'$}$$

Умножая (2.1$'$) на $\mathbf{B}_+^{-1}$ слева и на $\mathbf{A}_-^{-1}$ справа, получим

$$\mathbf{B}_+^{-1}(\lambda)\,\mathbf{A}_+(\lambda) = \mathbf{B}_-(\lambda)\,\mathbf{A}_-^{-1}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda).$$

Нетрудно видеть, что матрица $\mathbf{C}(\lambda)$ имеет своими элементами целые функции, более того, полиномы. Аналогично получаем

$$\mathbf{A}_+^{-1}(\lambda)\,\mathbf{B}_+(\lambda) = \mathbf{A}_-(\lambda)\,\mathbf{B}_-^{-1}(\lambda) = \mathbf{C}^{-1}(\lambda),$$

причем матрица $C^{-1}(\lambda)$ обладает теми же свойствами, что и $\mathbf{C}(\lambda)$. Это возможно только тогда, когда $\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{C} = \mathrm{const}$, $\det \mathbf{C} \neq 0$. Таким образом, мы получили требуемое:

$$\mathbf{A}_+(\lambda) = \mathbf{B}_+(\lambda)\,\mathbf{C};\quad \mathbf{A}_-(\lambda) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}_-(\lambda).$$

2. Факторизационные тождества для сумм

S_n случайных величин, заданных на конечной цепи Маркова $\varkappa_n$. Пусть $s_0 = 0$,

$$\| \mathbf{M} (e^{i\lambda(s_{n+1}-s_n)}; \ \varkappa_{n+1} = j \mid \varkappa_n = l) \| = \mathbf{A} (\lambda).$$

Нам удобно считать, что выборочные траектории процесса представляют собой ступенчатые функции со скачками в целочисленных точках и непрерывные справа; это позволит определить для него граничные функционалы, введенные в § 1.

В работе [4] показано, что при $|z| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda = 0$ имеет место следующее представление (теорема 2.1):

$$E - z\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_{z-}(\lambda) \mathbf{A}_{z+}(\lambda), \tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{A}_{z+}^{\pm 1}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_+), \quad \mathbf{A}_{z-}^{\pm 1}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_-), \quad \mathbf{A}_{z+}(i\infty) = \mathbf{E}.$$

Представление (2.2) носит название правой канонической P-факторизации матрицы $\mathbf{E} - z\mathbf{A}(\lambda)$ (через P обозначается проектирующий оператор, осуществляющий отображение кольца $\mathfrak{B}$ в подкольцо $\mathfrak{B}_-$ [4]). Левая каноническая P-факторизация (компонента из $\mathbf{M}(\mathfrak{B}_+)$ — слева) матрицы $\mathbf{E} - z\mathbf{A}(\lambda)$ определяется аналогично [4].

Имеют место следующие соотношения при $|z| < 1$, $|z\rho| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \mu \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \gamma > 0$ (оператор $[\ ]$ определен в § 1):

$$(1 - z) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \| \mathbf{M} (e^{i\lambda \bar{s}_k + i\mu(s_k - \bar{s}_k)} \rho^{\theta_k}; \quad \varkappa_k = j \mid \varkappa_0 = l) \| =$$
$$= (1 - z) A_{z\rho+}^{-1}(\lambda) \mathbf{A}_{z-}^{-1}(\mu); \tag{2.3}$$

$$(1 - z) \sum_{k=0}^{\infty} z^k \| \mathbf{M} (e^{i\lambda \bar{s}_k} \rho^{\theta_k}; \quad \varkappa_{\theta_k} = j \mid \varkappa_0 = l) \| =$$
$$= (1 - z) \mathbf{A}_{z\rho+}^{-1}(\lambda) [A_{z+}(0)]; \tag{2.4}$$

$$i\gamma \left\| \int e^{i\gamma u} \mathbf{M} (e^{i\lambda \chi(u)} z^{\eta(u)}; \quad \eta(u) < \infty, \quad \varkappa_{\eta(u)} = j \ \varkappa_0 = l) \, du \right\| =$$
$$= \frac{\gamma}{\lambda - \gamma} (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{z+}^{-1}(\gamma) A_{z+}(\lambda)). \tag{2.5}$$

Соотношение (2.5) установлено в [4]. Доказательства тождеств (2.3), (2.4) мало чем отличаются от доказательства аналогичных тождеств в независимом случае (например, [2]), где используется метод Винера-Хопфа для решения интегральных уравнений на полупрямой.

Тождества (2.3), (2.4) можно вывести из тождеств, полученных в работе [4]. Покажем, например, как получить тождество (2.3).

Условимся матрицы $\| \mathbf{M}(\cdot; \varkappa_n = j \mid \varkappa_0 = i) \|$ обозначать как $\mathbf{M}_n(\cdot)$. При $|z| < 1$, $|z\rho| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \mu \leqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}_n \left(e^{i\lambda \bar{s}_n + i\mu(s_n - s_n)} \; \rho^{\theta_n}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \rho^k \mathbf{M}_n \left(e^{i\lambda \bar{s}_n + i\mu(s_n - \bar{s}_n)}; \; \theta_n = k\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \rho^k \mathbf{M}_k \left(e^{i\lambda \bar{s}_k}; \; \theta_k = k\right) M_{n-k} \left(e^{i\mu s_{n-k}}; \; \bar{s}_{n-k} = 0\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (z\rho)^k M_k \left(e^{i\lambda \bar{s}_k}; \; \theta_k = k\right) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{M}_n \left(e^{i\mu s_n}; \; \bar{s}_n = 0\right).$$

В работе [4] показано, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{M}_k \left(e^{i\lambda \bar{s}_k}; \; \theta_k = k\right) = \mathbf{A}_{z+}^{-1}(\lambda);$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{M}_k \left(e^{i\lambda s_k}; \; \bar{s}_k = 0\right) = A_{z-}^{-1}(\lambda),$$

поэтому тождество (2.3) доказано.

3. Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова. Пусть, как и ранее, $\mathbf{A}(\lambda, \; t) = \exp\left(t\psi(\lambda)\right)$ — матрица, задающая эволюцию процесса $\xi(t) = (s(t), \varkappa(t))$. Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{A}^{(n)}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda, 2^{-n}) = \exp\left(2^{-n}\psi(\lambda)\right). \tag{2.6}$$

Через $\mathbf{A}_{z+}^{(n)}(\lambda)$, $\mathbf{A}_{z-}^{(n)}(\lambda)$ обозначим компоненты правой канонической $P =$ факторизации матрицы $\mathbf{E} - z\mathbf{A}^{(n)}(\lambda)$.

Введем следующие обозначения:

$$C_z^{(n)}(\lambda) = (1 - z)\left(\mathbf{E} - z\mathbf{A}^{(n)}(\lambda)\right)^{-1} = (1 - z)\sum_{k=0}^{\infty} \left(z\mathbf{A}^{(n)}(\lambda)\right)^k; \tag{2.7}$$

$$\mathbf{C}_{z+}^{(n)}(\lambda) = (1 - z)\left(\mathbf{A}_{z-}^{(n)}(0)\,\mathbf{A}_{z+}^{(n)}(\lambda)\right)^{-1}; \tag{2.8}$$

$$C_{z-}^{(n)}(\lambda) = (1 - z)\left(\mathbf{A}_{z-}^{(n)}(\lambda)\,\mathbf{A}_{z+}^{(n)}(0)\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

При $z = z_n = \exp(-\omega 2^{-n})$ обозначим (индекс n для краткости опущен):

$$\mathbf{D}_\omega(\lambda) = \mathbf{C}_{z_n}^{(n)}(\lambda); \quad \mathbf{D}_{\omega+}(\lambda) = C_{z_n+}^{(n)}(\lambda); \quad \mathbf{D}_{\omega-}(\lambda) = \mathbf{C}_{z_n-}^{(n)}(\lambda).$$

Легко видеть, что при $\omega > 0$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$

$$\mathbf{D}_\omega(\lambda) = \mathbf{D}_{\omega+}(\lambda)\,\mathbf{D}_\omega^{-1}(0)\;\mathbf{D}_{\omega-}(\lambda). \tag{2.10}$$

Левая часть (2.10) при $n \to \infty$, $\omega > 0$ стремится к матрице

$$\omega \int_0^\infty e^{-\omega t} A(\lambda, t)\,dt = \mathbf{B}_\omega(\lambda).$$

Применяя, далее, тождество (2.3) при $\rho = 1$, $\mu = 0$ и при $\rho = 1$, $\lambda = 0$ и используя результаты § 1, получаем при $\omega > 0$, $n \to \infty$

$$\mathbf{D}_{\omega+}(\lambda) \to \omega \left\| \int_0^\infty e^{-\omega t} \mathbf{M}\left(e^{t\lambda \bar{s}(t)};\ \varkappa(t) = j \mid \varkappa(0) = l\right) dt \right\| = \mathbf{B}_{\omega+}(\lambda);$$

$$\mathbf{D}_{\omega-}(\lambda) \to \omega \left\| \int_0^\infty e^{-\omega t} \mathbf{M}\left(e^{t\lambda (s(t) - \bar{s}(t))};\ \varkappa(t) = j \mid \varkappa(0) = l\right) dt \right\| = B_{\omega-}(\lambda).$$

Таким образом, соотношение (2.10) переходит в соотношение

$$\mathbf{B}_\omega(\lambda) = \mathbf{B}_{\omega+}(\lambda)\,\mathbf{B}_\omega^{-1}(0)\,\mathbf{B}_{\omega-}(\lambda), \tag{2.11}$$

причем $\mathbf{B}_{\omega+}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_+)$, $\mathbf{B}_{\omega-}(\lambda) \in \mathbf{M}(\mathfrak{B}_-)$.

Заметим, далее, что

$$\mathbf{D}_\omega^{-1}(\lambda) = (1 - z_n)^{-1}\left(\mathbf{E} - z_n \mathbf{A}^{(n)}(\lambda)\right) = \mathbf{E} - \frac{z_n}{1 - z_n}\left(\mathbf{A}^{(n)}(\lambda) - \mathbf{E}\right).$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем в силу (2.6)

$$\mathbf{D}_\omega^{-1}(\lambda) \to \mathbf{B}_\omega^{-1}(\lambda) = \mathbf{E} - \omega^{-1}\psi(\lambda).$$

Покажем, что матрицы $\mathbf{B}_{\omega\pm}^{-1}(\lambda)$ существуют и имеют вид

$$\mathbf{B}_{\omega+}^{-1}(\lambda) = \mathbf{B}_\omega^{-1}(0)\;\left(\mathbf{E} - \psi_{\omega+}(\lambda)\right), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{B}_{\omega-}^{-1}(\lambda) = \left(\mathbf{E} - \psi_{\omega-}(\lambda)\right)\mathbf{B}_\omega^{-1}(0), \tag{2.13}$$

где матрицы $\psi_{\omega\pm}(\lambda) \in \Psi_\pm$.

Действительно, матрицу $\mathbf{D}_{\omega+}^{-1}(\lambda)$ в силу (2.10) можно представить в виде

$$\mathbf{D}_{\omega+}^{-1}(\lambda) = \mathbf{D}_\omega^{-1}(0)\,\mathbf{D}_{\omega-}(\lambda)\,\mathbf{D}_\omega^{-1}(\lambda). \tag{2.14}$$

При $n \to \infty$ правая часть (2.14) сходится к матрице $\mathbf{B}_\omega^{-1}(0)\,\mathbf{B}_{\omega-}(\lambda)\,\mathbf{B}_\omega^{-1}(\lambda)$, которая и есть $\mathbf{B}_{\omega+}^{-1}(\lambda)$. Заметим, что матрица $\mathbf{B}_{\omega+}^{-1}(\lambda)$ непрерывна по λ. С другой стороны, в силу (2.8) имеет место представление

$$\mathbf{D}_{\omega+}^{-1}(\lambda) = \mathbf{D}_\omega^{-1}(0)\left(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathbf{G}(0))^{-1}(\mathbf{G}(\lambda) - \mathbf{G}(0))\right), \tag{2.15}$$

где

$$G(\lambda) = \mathbf{E} - \mathbf{A}^{(n)}_{z_{n+}}(\lambda) = \| \mathbf{M}(e^{i\lambda\chi + z^{\eta+}_{n}};\ \eta_+ < \infty,\ \varkappa_{\eta+} = j \,|\, \varkappa_0 = l) \|$$

(см. [4])*), причем матрица $(\mathbf{E} - \mathbf{G}(0))^{-1}$ имеет неотрицательные элементы. Поэтому (см. определение класса Ψ_+) из (2.15) следует (2.12). Соотношение (2.13) устанавливается аналогичным образом.

Итак, соотношение (2.11) дает некоторую факторизацию матрицы $\mathbf{B}_\omega(\lambda)$, причем компоненты $\mathbf{B}_{\omega\pm}(\lambda)$ удовлетворяют соотношениям (2.12), (2.13). Поэтому (см. замечание) эта факторизация единственна с точностью до константы в классе всех V_0 = факторизаций матрицы $\mathbf{B}_\omega(\lambda)$. Будем называть факторизацию (2.11) вероятностной факторизацией матрицы $\mathbf{B}_\omega(\lambda)$.

Обратимся теперь к тождествам (2.3) — (2.5). Поступая так же, как при выводе (2.11) (см., кроме того, [3]), получим следующий результат.

Теорема 1. При $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\mu \leqslant 0$, $\operatorname{Im}\gamma > 0$, $\omega > 0$ справедливы следующие тождества:

$$\omega \left\| \int_0^\infty e^{-\omega t}\mathbf{M}(e^{i\lambda\bar{s}(t) + i\alpha\theta(t) + i\mu(s(t) - \bar{s}(t))};\ \varkappa(t) = j \,|\, \varkappa(0) = l)\,dt \right\| =$$

$$= \mathbf{B}_{(\omega+\alpha)+}(\lambda)\,\mathbf{B}^{-1}_{(\omega+\alpha)+}(+\infty)\,\mathbf{B}_{\omega+}(i\infty)\,\mathbf{B}^{-1}_{\omega}(0)\,\mathbf{B}_{\omega-}(\mu); \tag{2.16}$$

$$\omega \left\| \int_0^\infty e^{-\omega t}\,\mathbf{M}\,(e^{i\lambda\bar{s}(t) + \alpha\theta(t)};\ \varkappa(\theta(t)) = j \,|\, \varkappa(0) = l)\,dt \right\| =$$

$$= \mathbf{B}_{(\omega+\alpha)+}(\lambda)\,\mathbf{B}^{-1}_{(\omega+\alpha)+}(i\infty)\,[\mathbf{B}_{\omega+}(i\infty)]; \tag{2.17}$$

$$i\gamma \left\| \int_0^\infty e^{i\gamma u}\mathbf{M}(e^{i\lambda\chi(u) - \omega\eta(u)};\ \varkappa(\eta(u)) = j \,|\, \varkappa(0) = l)\,du \right\| =$$

$$= \frac{\gamma}{\lambda - \gamma}\,(\mathbf{E} - \mathbf{B}_{\omega+}(\gamma)\,\mathbf{B}^{-1}_{\omega+}(\lambda)). \tag{2.18}$$

4. Теорема непрерывности для V_0-факторизации. Установим факт непрерывной зависимости компонент факторизации $\mathbf{B}_{\omega\pm}(\lambda)$ от факторизуемой матрицы $\mathbf{B}_\omega(\lambda)$.

Пусть имеется последовательность характеристических матриц $\mathbf{A}^{(n)}(\lambda, t) = \exp(t\psi^{(n)}(\lambda))$, сходящаяся при $n \to \infty$ к характеристической матрице $\mathbf{A}(\lambda, t) = \exp(t\psi(\lambda))$. В этом случае матрицы $\mathbf{B}^{(n)}_\omega(\lambda) = (\mathbf{E} - \omega^{-1}\psi^{(n)}(\lambda))^{-1}$ сходятся, как нетрудно видеть, к матрице $\mathbf{B}_\omega(\lambda) = (\mathbf{E} - \omega^{-1}\psi(\lambda))^{-1}$. Пусть матрицы $\mathbf{B}^{(n)}_{\omega\pm}(\lambda)$, $\mathbf{B}_{\omega\pm}(\lambda)$ осуществляют вероятностную (см. п. 3) факторизацию матриц $\mathbf{B}^{(n)}_\omega(\lambda)$, $\mathbf{B}_\omega(\lambda)$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{A}^{(n)}(\lambda, t) \to \mathbf{A}(\lambda, t)$ при $h \to \infty$. Тогда $\mathbf{B}^{(n)}_{\omega\pm}(\lambda) \to B_{\omega\pm}(\lambda)$ при $n \to \infty$.

*) Функционалы $\chi_+ = \chi^{(n)}_+$, $\eta_+ = \eta^{(n)}_+$ — величина и момент первого перескока через нулевой уровень в блуждании $s^{(n)}_0$, $s^{(n)}_1$, ...

Доказательство следует из общих теорем о сходимости процессов в метрических пространствах (см. теоремы 1В и 4В [8] и теоремы 2.2 и 2.3 [9]) и из того, что функционал $\bar{s}(\cdot)$, распределение которого обуславливает компоненту $\mathbf{B}_{\omega+}(\lambda)$, непрерывен в метрике Скорохода $\rho_D(x, y)$ (см. [8], стр. 10) пространства $D(0, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. II.— Теория вероятностей и ее применение, 4, 14, 1969, 679—690.
2. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972.
3. Печерский Е. А., Рогозин Б. А. О совместных распределениях случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 14, 3, 1969, 431—444.
4. Пресман Э. Л. Методы факторизации и граничная задача для сумм, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН, сер. матем., 4, 1969, 33, 871—900.
5. Гусак Д. В. Экстремальные значения невырожденных винеровских процессов, управляемых конечной цепью Маркова.— Теория вероятностей и мат. статистика, вып. 6, 1972, 49—53.
6. Gusak D. V. On continuous reaching the fixed level by homogeneous process with independent increments on finite Markov chain.— Second Japan — USSR symposium on probability theory, Kyoto, 1972, v. 1.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
8. Боровков А. А. Сходимость распределений функционалов от случайных процессов.— Успехи математической науки, 1, 1972, 27, 1—41.
9. Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применен., 1956, 1, 2, 177—238.
10. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.

A. A. Mogulsky

FACTORIZATION EQUALITIES FOR PROCESSES WITH INDEPENDENT INCREMENTS DEFINED ON FINITE MARKOV CHAIN

Summary

The so-called factorization equalities for Laplace transformations of the characteristic functions of common distributions of some boundary functionals are found.

Поступила в редколлегию 22.XII 1972.