М. П. МОКЛЯЧУК, студ.
Киевский университет

О ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С ДРОБНОРАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Пусть $\xi(s, t)$ — однородное случайное поле, непрерывное в среднем квадратическом. Такое поле и его корреляционная функция допускают следующие спектральные разложения [1, 2]:

$$\xi(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s\lambda+t\mu)}Z(d\lambda, d\mu);$$

$$R(s,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(s\lambda+t\mu)}dF(\lambda, \mu).$$

Здесь $Z(d\lambda, d\mu)$ — случайная мера с ортогональными значениями, а $dF(\lambda, \mu)=M\,|Z(d\lambda, d\mu)|^2$.

Пусть $R=(-\infty, \infty)$. Оптимальный линейный прогноз (экстраполяция) значения поля $\xi(s, t)$ в точке (x, y), не принадлежащей некоторому подмножеству E множества R^2, по наблюдениям поля в точках множества E определяется как проекция в гильбертовом пространстве H случайных величин второго порядка (см. [1]) величины $\xi(x, y)$ на замкнутое линейное многообразие в H, порожденное величинами $\xi(u, v)$ при $(u, v)\in E$.

В настоящей заметке рассматриваются задачи линейной экстраполяции для однородных случайных полей с дробнорациональной спектральной плотностью по наблюдениям на множествах точек E специального вида. При этом используется метод, предложенный А. М. Ягломом [3].

1. Пусть $E=\{(u, v): u, v\in R, v\leqslant t\}$. Оптимальный линейный прогноз значения поля в точке $(x, t+\tau)$ по наблюдениям поля в точках множества E будем искать в следующем виде [3, 4]:

$$\hat{\xi}(x,t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\mu}\Phi_\tau(\lambda, \mu)Z(d\lambda, d\mu).$$

Функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ принадлежит замкнутому линейному многообразию в $L_2(f(\lambda, \mu)\,d\lambda d\mu)$, порожденному величинами $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $-\infty<$

$< u < \infty$, $v \leqslant 0$. Ее мы будем искать из уравнения ортогональности величин $\xi(u, v) : (u, v) \in E$ и $\xi(x, t+\tau) - \hat{\xi}(x, t+\tau)$ в гильбертовом пространстве H. В данном случае это уравнение примет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(x\lambda+\tau\mu)} - \Phi_\tau(\lambda, \mu)] e^{iy\mu} e^{-iu\lambda} f(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu = 0,$$

$$-\infty < u < \infty, \quad y \geqslant 0.$$

Если введем обозначение

$$\psi_\tau(\lambda, \mu) = [e^{i(x\lambda+\tau\mu)} - \Phi_\tau(\lambda, \mu)] f(\lambda, \mu).$$

то уравнение можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\tau(\lambda, \mu) e^{iy\mu} d\mu = 0, \quad y \geqslant 0$$

для всех значений λ.

Для того чтобы функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ удовлетворяла всем требованиям, достаточно чтобы выполнялись условия [3]:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau(\lambda, \mu)|^2 f(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu < \infty;$$

2) для всех значений λ $\Psi_\tau(\lambda, \mu)$, как функция комплексной переменной μ, аналитическая в верхней полуплоскости и при $|\mu| \to \infty$ убывает быстрее, чем $|\mu|^{-1-\varepsilon(\lambda)}$, т. е.

$$|\Psi_\tau(\lambda, \mu)| < \frac{c_1(\lambda)}{|\mu|^{1+\varepsilon(\lambda)}}, \quad c_1(\lambda) > 0, \quad \varepsilon(\lambda) > 0;$$

3) для всех значений λ $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$, как функция комплексной переменной μ, аналитическая в нижней полуплоскости и при $|\mu| \to \infty$

$$|\Phi_\tau(\lambda, \mu)| < c_2(\lambda) |\mu|^{q(\lambda)}; \quad c_2(\lambda) > 0, \ q(\lambda) > 0.$$

Эти условия позволяют найти функцию $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$, если спектральная плоскость имеет вид

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\left| a_0(\lambda) \prod_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda)) \right|^2}{\left| b_0(\lambda) \prod_{j=1}^{N(\lambda)} (\mu - \beta_j(\lambda)) \right|^2}; \qquad (1$$

$$M(\lambda) < N(\lambda); \quad \operatorname{Im} \alpha_k(\lambda) > 0, \quad k = \overline{1, M(\lambda)};$$

$$\operatorname{Im} \beta_j(\lambda) > 0, \quad j = \overline{1, N(\lambda)}.$$

Из условий 1) — 3) вытекает, что функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ имеет вид

$$\Phi_\tau(\lambda, \mu) = \frac{\varphi_\tau(\lambda, \mu)}{a_0(\lambda) \prod\limits_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda))},$$

где $\varphi_\tau(\lambda, \mu)$, как функция действительной переменной μ, является полиномом степени не выше $N(\lambda) - 1$, коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$\frac{d^{r(\lambda)}}{d\mu^{r(\lambda)}} \left[\varphi_\tau(\lambda, \mu) - e^{i(x\lambda + \tau\mu)} a_0(\lambda) \prod_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda)) \right] \Bigg|_{\mu = \beta_l(\lambda)} = 0;$$

$$r(\lambda) = 0, 1, \ldots q_l(\lambda) - 1; \quad l = \overline{1, \sigma(\lambda)}; \quad \sum_{l=1}^{\sigma(\lambda)} q_l(\lambda) = N(\lambda),$$

$q_l(\lambda)$ — кратность корня $\beta_l(\lambda)$.

Пример 1. Предположим, что спектральная плотность поля имеет вид

$$f(\lambda, \mu) = \frac{c}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2)^2}.$$

Корреляционная функция такого поля равна [5]

$$R(x, y) = \frac{c\pi}{\alpha} \sqrt{x^2 + y^2}\, K_1(\alpha \sqrt{x^2 + y^2}),$$

где $K_1(t)$ — функция Макдональда.

Тогда оптимальный прогноз на время τ вперед равен

$$\hat{\xi}(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\lambda + t\mu) - \tau\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}} (1 + \tau\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} + i\tau\mu)\, Z(d\lambda, d\mu).$$

Пример 2. Если спектральную плотность поля можно представить в виде

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \mu^2)} f_1(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ — спектральная плотность некоторого стационарного случайного процесса, то оптимальный прогноз вычисляется по формуле

$$\hat{\xi}(x, t + \tau) = e^{-\tau\alpha} \xi(x, t).$$

2. Предположим, что множество E равно

$$E = \{(u, v) \colon u, v \in R,\ t - T \leqslant v \leqslant t\}.$$

Оптимальный прогноз $\hat{\xi}(x, t + \tau)$, $\tau > 0$ в этом случае можно найти из формулы [3, 6]

$$\hat{\xi}(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu} \Phi_\tau(\lambda, \mu)\, Z(d\lambda, d\mu).$$

7*

Функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ принадлежит замкнутому линейному многообразию в $L_2(f(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu)$, порожденному величинами $e^{i(u\lambda - y\mu)}$ при $-\infty < u < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant T$. Кроме того, функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(x\lambda + \tau\mu)} - \Phi_\tau(\lambda, \mu)]\, f(\lambda, \mu)\, e^{iu\lambda} e^{iy\mu}\, d\lambda d\mu = 0;$$

$$-\infty < u < \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant T.$$

Если обозначим

$$\Psi_\tau(\lambda, \mu) = [e^{i(x\lambda + \tau\mu)} - \Phi_\tau(\lambda, \mu)]\, f(\lambda, \mu),$$

то уравнение можно записать в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\tau(\lambda, \mu)\, e^{iy\mu} d\mu = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T$$

для всех значений λ.

Таким образом, для того чтобы решить задачу экстраполяции для данного множества E, необходимо найти функцию $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$, обладающую свойствами:

$$1) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\tau(\lambda, \mu)|^2 f(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu < \infty;$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\tau(\lambda, \mu)\, e^{iy\mu} d\mu = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T$$

для всех значений λ;

3) $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ принадлежит замкнутому линейному многообразию в $L_2(f, (\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu)$, порожденному величинами $e^{i(u\lambda - y\mu)}$ при $-\infty < u < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Для того чтобы выполнялись условия 2), 3), достаточно, чтобы для всех значений λ выполнялись условия [3]:

2а) функция $\Psi_\tau(\lambda, \mu)$ представима в виде

$$\Psi_\tau(\lambda, \mu) = \Psi_\tau^{(1)}(\lambda, \mu) + e^{-iT\mu}\Psi_\tau^{(2)}(\lambda, \mu),$$

где $\Psi_\tau^{(1)}(\lambda, \mu)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция комплексной переменной μ, а $\Psi_\tau^{(2)}(\lambda, \mu)$ — аналитическая в нижней полуплоскости функция комплексной переменной μ и при $|\mu| \to \infty$

$$|\Psi_\tau^{(j)}(\lambda, \mu)| < \frac{c_j(\lambda)}{|\mu|^{1+\varepsilon_j(\lambda)}}; \quad c_j(\lambda) > 0, \quad \varepsilon_j(\lambda) > 0, \quad j = 1, 2$$

в соответствующих полуплоскостях;

3а) $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ — целая функция от μ, причем

$$\Phi_\tau(\lambda, \mu) = \Phi_\tau^{(1)}(\lambda, \mu) + e^{-iT\mu}\Phi_\tau^{(2)}(\lambda, \mu),$$

где $\overline{\Phi_\tau^{(j)}(\lambda, \mu)}$, $j = 1, 2$ — рациональные функции переменной μ.

Условия 1), 2а), 3а) позволяют найти функцию $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$, если спектральная плотность поля имеет вид (1). В этом случае

$$\Phi_\tau^{(j)}(\lambda, \mu) = \frac{\varphi^{(j)}(\lambda, \mu)}{\left| a_0(\lambda) \prod_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda)) \right|^2}; \quad j = 1, 2,$$

где $\varphi^{(j)}(\lambda, \mu)$ — зависящий от параметра λ полином степени не более чем $N(\lambda) + M(\lambda) - 1$, коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$\frac{d^{r(\lambda)}}{d\mu^{r(\lambda)}} [\varphi^{(1)}(\lambda, \mu) + e^{-iT\mu}\varphi^{(2)}(\lambda, \mu)]\,|_{\mu=\alpha_m(\lambda), \overline{\alpha_m(\lambda)}} = 0;$$

$$r(\lambda) = 0, 1, \ldots, r_m(\lambda) - 1; \quad m = \overline{1, \sigma(\lambda)}; \quad \sum_{m=1}^{\sigma(\lambda)} r_m(\lambda) = M(\lambda);$$

$$\frac{d^{p(\lambda)}}{d\mu^{p(\lambda)}} [\varphi^{(2)}(\lambda, \mu)]\,|_{\mu=\overline{\beta_q(\lambda)}} = 0;$$

$$\frac{d^{p(\lambda)}}{d\mu^{p(\lambda)}} \left[\varphi^{(1)}(\lambda, \mu) - e^{i(x\lambda+\tau\mu)} \left| a_0(\lambda) \prod_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda)) \right|^2 \right] \Bigg|_{\mu=\beta_q(\lambda)} = 0;$$

$$q = \overline{1, \delta(\lambda)}; \quad p(\lambda) = 0, 1, \ldots p_q(\lambda) - 1; \quad \sum_{q=1}^{\delta(\lambda)} p_q(\lambda) = N(\lambda),$$

где $r_m(\lambda)$ — кратность корня $\alpha_m(\lambda)$, а $p_q(\lambda)$ — кратность корня $\beta_q(\lambda)$.

Для того чтобы найти функцию $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ при $\tau < -T$, достаточно положить [3]

$$\Phi_\tau(\lambda, \mu) = e^{-iT\mu}\overline{\Phi_{-\tau-T}(\lambda, \mu)}.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу линейной экстраполяции для однородного поля, спектральная плотность которого имеет вид

$$f(\lambda, \mu) = \frac{c}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2 + \mu^2)^2}.$$

Прогноз $\hat{\xi}(x, t + \tau)$ в этом случае равен

$$\hat{\xi}(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x\lambda+t\mu)-\tau\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} (1 + \tau\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} + i\tau\mu)\, Z(d\lambda, d\mu)$$

при $\tau > 0$;

$$\hat{\xi}(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(t-T)\mu - x\lambda]+(\tau+T)\sqrt{\alpha^2+\lambda^2}} \times$$

$$\times [1 - (\tau + T)\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2} + i(\tau + T)\mu]\, Z(d\lambda, d\mu)$$

при $\tau < -T$.

3. Пусть $E = \{(u, v) : u \in N;\ \ v \in R,\ \ v \leqslant t\}$, где N — множество всех целых чисел. Оптимальный прогноз на время τ вперед будем искать в виде

$$\hat{\xi}(x, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu} \Phi(\lambda, \mu)\, Z(d\lambda, d\mu).$$

Функция $\Phi(\lambda, \mu)$ принадлежит замкнутому линейному многообразию в $L_2(f_0(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu)$, порожденному величинами $e^{i(u\lambda + y\mu)}$ при $u \in N$; $y \in R$, $y \leqslant 0$. Здесь $f_0(\lambda, \mu)$ — плотность спектральной меры $dF_0(\lambda, \mu)$, где

$$dF_x(\lambda, \mu) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi qx} [dE(\lambda + 2\pi q, \mu) - dF(2\pi q - \pi, \mu)].$$

Из условия ортогональности величин $\xi(x, t+\tau) - \hat{\xi}(x, t+\tau)$ и $\xi(u, v)$ при $(u, v) \in E$ в пространстве H вытекает, что функция $\Phi(\lambda, \mu)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda, \mu)\, e^{iy\mu} d\mu = 0, \quad y \geqslant 0$$

для всех значений λ, где

$$\Psi(\lambda, \mu) = \left[e^{i(x\lambda + \tau\mu)} \frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_0(\lambda, \mu)} - \Phi(\lambda, \mu)\right] f_0(\lambda, \mu).$$

Для того чтобы выполнялись все эти требования к функции $\Phi(\lambda, \mu)$, достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda, \mu)|^2 f_0(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu < \infty;$$

2) $\Psi(\lambda, \mu)$, как функция комплексной переменной μ, аналитическая в верхней полуплоскости и при $|\mu| \to \infty$

$$|\Psi(\lambda, \mu)| < \frac{c_1(\lambda)}{|\mu|^{1+\varepsilon(\lambda)}}, \quad c_1(\lambda) > 0, \quad \varepsilon(\lambda) > 0$$

для всех значений $\lambda \in [-\pi, \pi]$;

3) $\Phi(\lambda, \mu)$ — аналитическая в нижней полуплоскости функция комплексной переменной μ и при $|\mu| \to \infty$

$$|\Phi(\lambda, \mu)| < c_2(\lambda) |\mu|^{q(\lambda)}, \quad c_2(\lambda) > 0, \ q(\lambda) > 0$$

для всех значений $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Эти условия позволяют найти функцию $\Phi(\lambda, \mu)$, если плотность меры $dF_0(\lambda, \mu)$ имеет вид (1). Тогда

$$\Phi(\lambda, \mu) = \frac{\varphi(\lambda, \mu)}{a_0(\lambda) \prod\limits_{k=1}^{M(\lambda)} (\mu - \alpha_k(\lambda))},$$

где $\varphi(\lambda, \mu)$, как функция от μ, является полиномом степени не выше $N(\lambda)-1$, коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$\frac{d^{r(\lambda)}}{d\mu^{r(\lambda)}}\left[\varphi(\lambda, \mu)-e^{i(x\lambda+\tau\mu)}\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_0(\lambda, \mu)}a_0(\lambda)\prod_{k=1}^{M(\lambda)}(\mu-\alpha_k(\lambda))\right]\Bigg|_{\mu=\beta_l(\lambda)}=0;$$

$$r(\lambda)=0, 1, \ldots r_l(\lambda)-1; \quad l=\overline{1, \sigma(\lambda)}; \quad \sum_{l=1}^{\sigma(\lambda)} r_l(\lambda)=N(\lambda),$$

$r_l(\lambda)$ — кратность корня $\beta_l(\lambda)$.

При $\tau \leqslant 0$ достаточно положить $\Psi(\lambda, \mu) \equiv 0$. Тогда

$$\Phi(\lambda, \mu)=e^{i(x\lambda+\tau\mu)}\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_0(\lambda, \mu)}.$$

4. Рассмотрим задачу линейной экстраполяции для поля $\xi(s, t)$ по наблюдениям на множестве точек

$$E=\{(u, v): u \in N;\ v \in R,\ t-T \leqslant v \leqslant t\}.$$

Линейный прогноз на время τ вперед будем искать в виде

$$\hat{\xi}(x, t+\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\mu}\Phi_\tau(\lambda, \mu) Z(d\lambda, d\mu).$$

Функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ принадлежит замкнутому линейному многообразию в $L_2(f_0(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu)$, порожденному величинами $e^{i(u\lambda-\gamma\mu)}$ при $u \in N$, $0 \leqslant y \leqslant T$. Кроме того, функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\lambda, \mu)\, e^{iy\mu}d\mu=0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T, \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

где

$$\Psi(\lambda, \mu)=\left[e^{i(x\lambda+\tau\mu)}\frac{dF_x(\lambda, \mu)}{dF_0(\lambda, \mu)}-\Phi_\tau(\lambda, \mu)\right] f_0(\lambda, \mu).$$

Эти условия будут выполнены, если функция $\Phi_\tau(\lambda, \mu)$ обладает свойствами [3]:

$$1) \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_\tau(\lambda, \mu)|^2 f_0(\lambda, \mu)\, d\lambda d\mu<\infty;$$

2) для всех значений $\lambda \in [-\pi, \pi]$ функция $\Psi(\lambda, \mu)$ представима в виде

$$\Psi(\lambda, \mu)=\Psi^{(1)}(\lambda, \mu)+e^{-iT\mu}\Psi^{(2)}(\lambda, \mu),$$

где $\Psi^{(1)}(\lambda, \mu)$ — аналитическая в верхней полуплоскости функция комплексной переменной μ, а $\Psi^{(2)}(\lambda, \mu)$ — аналитическая в нижней полуплоскости функция комплексной переменной μ и при $|\mu|\to\infty$

$$|\Psi^{(j)}(\lambda,\mu)| < \frac{c_j(\lambda)}{|\mu|^{1+\varepsilon_j(\lambda)}}; \quad \varepsilon_j(\lambda)>0, \quad c_j(\lambda)>0, \quad j=1,2$$

в соответствующих полуплоскостях;

3) $\Phi_\tau(\lambda,\mu)$ — целая функция от μ, причем

$$\Phi_\tau(\lambda,\mu) = \Phi_\tau^{(1)}(\lambda,\mu) + e^{-iT\mu}\Phi_\tau^{(2)}(\lambda,\mu),$$

для всех значений $\lambda\in[-\pi,\pi]$, где $\Phi_\tau^{(j)}(\lambda,\mu)$, $j=1,2$ — рациональные относительно μ функции.

Если плотность $f_0(\lambda,\mu)$ меры $dF_0(\lambda,\mu)$ имеет вид (1), то условия 1) — 3) позволяют найти функцию $\Phi_\tau(\lambda,\mu)$. В этом случае

$$\Phi_\tau^{(j)}(\lambda,\mu) = \frac{\varphi^{(j)}(\lambda,\mu)}{\left|a_0(\lambda)\prod\limits_{k=1}^{M(\lambda)}(\mu-\alpha_k(\lambda))\right|^2}; \quad j=1,2,$$

где $\varphi^{(j)}(\lambda,\mu)$, $j=1,2$ — полиномы степени не более чем $N(\lambda)+M(\lambda)-1$ относительно переменной μ, коэффициенты которых определяются из системы уравнений [3]

$$\frac{d^{r(\lambda)}}{d\mu^{r(\lambda)}}[\varphi^{(1)}(\lambda,\mu)+e^{-iT\mu}\varphi^{(2)}(\lambda,\mu)]\,|_{\mu=\alpha_m(\lambda),\overline{\alpha_m(\lambda)}} = 0;$$

$$r(\lambda)=0,1,\ldots r_m(\lambda)-1; \quad m=\overline{1,\sigma(\lambda)}; \quad \sum_{m=1}^{\sigma(\lambda)} r_m(\lambda) = M(\lambda);$$

$$\frac{d^{p(\lambda)}}{d\mu^{p(\lambda)}}[\varphi^{(2)}(\lambda,\mu)]\,|_{\mu=\overline{\beta_q(\lambda)}} = 0;$$

$$\frac{d^{p(\lambda)}}{d\mu^{p(\lambda)}}\left[\varphi^{(1)}(\lambda,\mu) - e^{i(x\lambda+\tau\mu)}\frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_0(\lambda,\mu)}\left|a_0(\lambda)\prod_{k=1}^{M(\lambda)}(\mu-\alpha_k(\lambda))\right|^2\right]\Bigg|_{\mu=\beta_q(\lambda)} = 0;$$

$$q=\overline{1,\delta(\lambda)}; \quad p(\lambda)=0,1,\ldots,p_q(\lambda)-1; \quad \sum_{q=1}^{\delta(\lambda)} p_q(\lambda) = N(\lambda),$$

где $r_m(\lambda)$ — кратность корня $\alpha_m(\lambda)$, а $p_q(\lambda)$ — кратность корня $\beta_q(\lambda)$.

Для того чтобы найти функцию $\Phi_\tau(\lambda,\mu)$ при $\tau<-T$, достаточно положить [3]

$$\Phi_\tau(\lambda,\mu) = e^{-iT\mu}\overline{\Phi_{-\tau-T}(\lambda,\mu)}.$$

При $-T\leqslant\tau\leqslant 0$ достаточно положить $\Psi(\lambda,\mu)\equiv 0$. Тогда

$$\Phi_\tau(\lambda,\mu) = e^{i(x\lambda+\tau\mu)}\frac{dF_x(\lambda,\mu)}{dF_0(\lambda,\mu)}.$$

Автор искренне признателен М. И. Ядренко за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1971.
2. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.— УМН, 7, № 5, 1952.
3. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Труды Московского математического общества, 4, 333—374, 1955.
4. Попов Ю. Д. Об одной задаче линейного прогноза для однородных случайных полей.— Кибернетика, 4, 1969.
5. Фортус М. И. Формулы для экстраполирования случайных полей,— Теория вероятн. и ее примен., 7, 1, 1962.
6. Попов Ю. Д. Об одной задаче линейного экстраполирования случайного поля по конечной области.— Кибернетика, 5, 1969.

M. P. Moklyachuk

ON LINEAR EXTRAPOLATION OF HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS WITH RATIONAL SPECTRAL DENSITY

Summary

The formulas of linear extrapolation for homogeneous random fields with rational spectral density which are observed on the sets of points of a special form are obtained.

Поступила в редколлегию 21.IV 1972.