С. М. ОЛЕВСКАЯ, канд. физ.-мат. наук,
Гидрометцентр СССР

КАНОНИЧЕСКИЕ КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Теория канонических корреляций и канонических величин была развита в середине 30-х годов независимо Г. Хоттелингом [1] и А. М. Обуховым [2, 3] в применении к парам конечномерных совокупностей случайных величин $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ конечной дисперсии*). В настоящее время она играет важную роль в многомерном статистическом анализе, и ее изложение может быть найдено в каждом достаточно подробном учебнике математической статистики (см., например, [4—6]). Согласно этой теории в пространствах векторов x и y всегда можно найти такие преобразования координат, что компоненты $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ заданных случайных векторов x и y в направлении новых координатных осей будут все попарно некоррелированы между собой за исключением лишь пар (u_i, v_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, где, разумеется, $l \leqslant \min(n, m)$. Соответствующие коэффициенты корреляции $\rho_i = \rho(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ и называются каноническими корреляциями, а сами величины $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $v_1, v_2, \ldots, v_m$ — каноническими величинами; канонические корреляции здесь удобно упорядочить по убыванию, т. е. считать, что $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_l > 0$.

Нахождение канонических корреляций и канонических величин представляет собой фактически задачу линейной алгебры — оно сводится к нахождению собственных значений и собственных векторов некоторой матрицы, составленной из ковариаций (т. е. центрированных смешанных вторых моментов) R_{x_i,x_j}, R_{y_i,y_j} и R_{x_i,y_j} случайных величин $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. Эту задачу можно также сформулировать чисто геометрически, если ввести в рассмотрение конечномерное пространство H_{xy} всевозможных линейных комбинаций $\sum_1^n \alpha_i x_i + \sum_1^m \beta_j y_j$ и определить скалярное произведение в этом пространстве

*) В работах [1—3] даже предполагалось, что рассматриваемые случайные величины имеют многомерное нормальное распределение, но это предположение на самом деле не является обязательным.

при помощи формулы $(z_1, z_2) = \mathbf{M} z_1 z_2$. (Для простоты здесь и далее будем считать, что средние значения всех рассматриваемых случайных величин тождественно равны нулю — в противном случае эти средние значения надо было бы с самого начала вычесть из значений самих величин). В таком случае совокупности векторов вида $\sum_1^n \alpha_i x_i$ и $\sum_1^m \beta_j y_j$ образуют в $H_{x,y}$ два линейных подпространства H_x и H_{yx}. Пусть, далее, P_1 — матрица проектирования на подпространство H_x в пространстве H_{xy}, а P_2 — матрица проектирования на H_y в H_{xy}. В таком случае матрицы $B_1 = P_1 P_2$ и $B_2 = P_2 P_1$ задают некоторые линейные преобразования подпространств соответственно H_x и H_y (те же преобразования можно определить и во всем H_{xy} при помощи соотношений $B_1 = P_1 P_2 P_1$, $B_2 = P_2 P_1 P_2$). При этом справедливо следующее утверждение (см., например, [7]): ненулевые собственные значения матриц B_1 и B_2 совпадают друг с другом и равны каноническим корреляциям ρ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, а соответствующие собственные векторы тех же матриц являются каноническими величинами.

Последняя формулировка позволяет очень просто обобщить всю теорию канонических корреляций и канонических величин на произвольные бесконечные совокупности $X = \{x(t),\ t \in T\}$ и $Y = \{y(s),\ s \in S\}$ случайных величин (т. е. на произвольные пары случайных функций). В этом случае $H_{x,y}$ уже естественно оказывается гильбертовым пространством (вообще говоря, бесконечномерным), а H_x и H_y — это два линейных подпространства в $H_{x,y}$. Матрицы P_1 и P_2 заменяются соответствующими операторами проектирования в $H_{x,y}$, в остальном же теория почти не претерпевает изменения. Такое бесконечномерное обобщение теории Хоттелинга — Обухова было впервые рассмотрено в работе [7]. В работах [8, 9] содержатся некоторые примеры вычисления канонических корреляций и величин отрезков случайных процессов; особое внимание здесь было уделено случаям, когда для двух отрезков одного и того же стационарного случайного процесса существует лишь конечное число отличных от нуля канонических корреляций. Попутно в работе [9] было отмечено, что в силу общих теорем функционального анализа существуют пары случайных функций $\{x(t),\ t \in T\}$ и $\{y(s),\ s \in S\}$, такие, что им отвечает любой заранее заданный спектр канонических корреляций ρ (сосредоточенный на отрезке $[0, 1]$). Однако все рассматривавшиеся ранее конкретные примеры относятся лишь к ситуациям, когда этот спектр — чисто дискретный (т. е. когда в пространствах функций $x(t)$ и $y(s)$ существует дискретный набор u_1, u_2, ... и v_1, v_2, ... канонических величин); случай же непрерывного спектра, по-видимому, никогда подробно не анализировался и не иллюстрировался примерами.

В настоящей работе мы покажем, что случай непрерывного спектра канонических корреляций естественно возникает при рассмотрении канонических корреляций для случайных полей. Задача, которую мы рассмотрим, представляет собой простейшее двумерное обобщение задачи, изученной в работе [8]. А именно, рассмотрим однородное случайное поле $x(t_1, t_2)$ на плоскости t_1, t_2 и две области E_1 и E_2 этой плоскости, задаваемые соотношениями

$$E_1 = \{-\infty < t_1 \leqslant 0; -\infty < t_2 < \infty\};$$

$$E_2 = \{a \leqslant t_1 < \infty; -\infty < t_2 < \infty\},$$

где $a > 0$.

Совокупности случайных величин $Q_0^- = \{x(t_1, t_2),\ (t_1, t_2) \in E_1\}$ и $Q_a^+ = \{x(t_1, t_2),\ (t_1, t_2) \in E_2\}$ — это те две совокупности, для которых будем разыскивать канонические корреляции.

Однородное случайное поле $x(t_1, t_2)$ допускает спектральное представление вида

$$x(t) = x(t_1, t_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda, t)}\, Z(d\lambda), \tag{1}$$

где $(\lambda, t) = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$, а $Z(d\lambda)$ — случайная мера такая, что $\mathbf{M}Z(d\lambda) \times \times Z(d\lambda') = 0$ при $\lambda \neq \lambda'$.

Корреляционная функция однородного случайного поля также всегда допускает представление в виде интеграла Фурье—Стильтьеса, а если она достаточно быстро убывает на бесконечности, то и в виде обычного интеграла Фурье.

$$B(r) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda, r)} f(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

где $f(\lambda)$ — спектральная плотность поля X.

Перейдем от пространства H_x к изоморфному ему пространству L_f^2 функций двух переменных $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2 = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda_1, \lambda_2)|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2.$$

При этом элементы $x(t)$ переходят в $e^{i(\lambda, t)}$, а общее соответствие задается формулой

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) Z(d\lambda) \leftrightarrow \varphi(\lambda). \tag{3}$$

Таким образом, наша задача будет эквивалентна задаче нахождения образов канонических величин в подпространствах $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ пространства $L^2_{f(\lambda_1, \lambda_2)}$, порожденных семействами функций $e^{i(\lambda, t)}$ при

$t \in E_1$ и $t \in E_2$ соответственно (в дальнейшем величины из H_x и L_f^2, отвечающие друг другу, будем обозначать одинаковыми буквами и над элементами из L_f^2 ставить тильду).

Явное описание функциональных подпространств $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ дается приводимой ниже теоремой 1. Чтобы кратко ее сформулировать, обозначим Δ — произвольный интервал, а $H_\Delta(f(u)) \subset L^2_{f(u)}$ — пространство функций одного переменного, с интегрируемым по мере $f(u)\,du$ квадратом модуля, порожденное семейством функций e^{iyu}, где $y \in \Delta$. Аналогично обозначим символом $\widetilde{Q}_\Delta(f(\lambda_1, \lambda_2))$ подпространство, являющееся линейным замыканием в метрике L_f^2, где $f = f(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2)$, функций вида $e^{i(\lambda, t)}$ при $t_1 \in \Delta, t_2 \in (-\infty, \infty)$. Ясно, что оба подпространства $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ входят в число подпространств $\widetilde{Q}_\Delta$. Пусть, далее, $f_{\lambda_2}(\lambda_1)$ — функция $f(\lambda_1, \lambda_2)$, рассматриваемая как функция аргумента λ_1, зависящая от параметра λ_2.

Теорема 1. Подпространство $\widetilde{Q}_\Delta$ совпадает с совокупностью тех функций $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) \in L_f^2$, которые почти при каждом фиксированном значении λ_2 принадлежат подпространству $\widetilde{H}_\Delta(f_{\lambda_2}(\lambda_1))$.

Теорема эта представляется вполне естественной; ввиду громоздкости доказательство ее опускаем.

Перейдем теперь к вопросу о существовании канонических величин в случае однородных случайных полей.

Будем предполагать, что $f(\lambda_1, \lambda_2)$ удовлетворяет следующему условию: $f(\lambda_1, \lambda_2)$ непрерывна, и существует замкнутое множество E меры нуль, такое, что для любых λ_2, $\lambda_2' \in t$ и любого λ_1 справедливо неравенство

$$0 < c_1(\lambda_2, \lambda_2') \leqslant \frac{f(\lambda_1, \lambda_2)}{f(\lambda_1, \lambda_2')} \leqslant c_2(\pi_2, \lambda_2') < \infty, \tag{4}$$

где $c_1(\lambda_2, \lambda_2')$ и $c_2(\lambda_2, \lambda_2')$ — непрерывны по второму аргументу на дополнении CE множества E.

Это условие не является очень жестким. Нетрудно видеть, например, что ему удовлетворяет любая рациональная функция двух переменных (так же, как и многие другие не слишком искусственные примеры спектральных плотностей).

Существенная роль условия (4), в частности, проявляется в том, что при его выполнении пространства $L^2_{f_{\lambda_2}}$ при различных значениях λ_2 состоит из одного и того же множества функций (обозначим это множество через S_f). При этом операторы $I_{\lambda_2, \lambda_2'}$: $: L^2_{f_{\lambda_2}} \to L^2_{f_{\lambda_2'}}$, сопоставляющие каждой функции $u(\lambda_1) \in S_f$, рассматриваемой как элемент пространства $L^2_{f_{\lambda_2}}$, ее же как элемент пространства $L^2_{f_{\lambda_2'}}$, ограничены.

Первый коэффициент канонической корреляции для совокупностей $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ можно, как легко видеть, определить формулой

$$R_1 = \sup \rho(u, v), \quad u \in \widetilde{Q}_0^-, \ v \in \widetilde{Q}^+, \tag{5}$$

где $\rho(u, v) = \frac{|(u, v)|}{\|u\| \|v\|}$, а скалярное произведение и норма понимаются в смысле L^2_f.

Зафиксируем λ_2 и введем в рассмотрение величину $\rho_1(\lambda_2)$, задаваемую формулой

$$\rho_1(\lambda_2) = \sup \rho(u, v), \quad u \in \widetilde{H}_0^-(f_{\lambda_2}), \ v \in \widetilde{H}_a^+(f_{\lambda_2}), \tag{6}$$

где $\widetilde{H}_0^-(f_{\lambda_2})$ и $\widetilde{H}_a^+(f_{\lambda_2})$ суть $\widetilde{H}_\Delta$ при $\Delta \in (-\infty, 0)$ и $\Delta = (a, \infty)$, а $f(u) = f(u, \lambda_2)$, λ_2 фиксировано.

Легко проверяется следующее утверждение.

Лемма. Для любых $u(\lambda_1)$, $v(\lambda_1) \in S_f$ функция (u, v) непрерывна по λ_2.

Из леммы и факта ограниченности операторов $I\lambda_2, \lambda_2'$ нетрудно вывести измеримость функции $\rho_1(\lambda_2)$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 2.

$$R_1 = \sup_{\lambda_2} \rho_1(\lambda_2). \tag{7}$$

Доказательство. 1. Обозначим правую часть равенства (7) через θ. В силу теоремы 1 $u = u(\lambda_1, \lambda_2)$, $v = v(\lambda_1, \lambda_2)$ почти при каждом λ_2 принадлежат $\widetilde{H}_0^-(f_{\lambda_2})$ и $\widetilde{H}_a^+(f_{\lambda_2})$ соответственно. Отсюда

$$(u, v) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u(\lambda_1, \lambda_2) \bar{v}(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda_1, \lambda_2) \bar{v}(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \theta \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda_1, \lambda_2)|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |v(\lambda_1, \lambda_2)|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1} \leqslant$$

$$\leqslant \theta \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 f d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 f d\lambda_1} \leqslant \theta \|u\|_{L^2_f} \|v\|_{L^2_f}, \tag{8}$$

откуда следует, что $R_1 \leqslant \theta$.

2. Для доказательства противоположного неравенства зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем значение $\lambda_2 = \lambda_2^0$ так, чтобы $\rho_1(\lambda_2^0) > \theta - \varepsilon$. Далее, в пространствах $\widetilde{H}_0^-(f_{\lambda_2^0})$ и $\widetilde{H}_a^+(f_{\lambda_2^0})$ найдем векторы $u(\lambda_1)$ и $v(\lambda_1)$, единичные в $L^2_{f(\lambda_1\lambda_2^0)}$. Можно считать, что это — экспонециальные полиномы вида

$$u(\lambda_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ix_1^{(k)}\lambda_1}, \quad v(\lambda_1) = \sum_{j=1}^{m} b_j e^{ix_1^{(j)}\lambda_1}, \tag{9}$$

такие, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda_1)\bar{v}(\lambda_1) f(\lambda_1, \lambda_2^0)\, d\lambda_1 \right| \geqslant \theta - 2\varepsilon. \tag{10}$$

Пусть $\Delta = \{\lambda_2^0 - \delta, \lambda_2^0 + \delta\}$, где число δ будет определено ниже, а $\chi_\Delta(\lambda_2)$ — характеристическая функция интервала Δ. Положим

$$u(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} u(\lambda_1)\chi_\Delta(\lambda_2), \quad v(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} v(\lambda_1)\chi_\Delta(\lambda_2).$$

В силу теоремы 1 эти функции принадлежат $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ соответственно. Вычислим скалярное произведение этих функций. Имеем

$$\left| \frac{1}{2\delta} \iint_{-\infty}^{\infty} u(\lambda_1)\bar{v}(\lambda_1)\chi_\Delta(\lambda_2) f(\lambda_1\lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda_2^0-\delta}^{\lambda_2^0+\delta} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda_1)\bar{v}(\lambda_1) f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda_2^0-\delta}^{\lambda_2^0+\delta} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda_1)\bar{v}(\lambda_1) f(\lambda_1, \lambda_2^0)\, d\lambda_1 \right| -$$

$$- \left| \frac{1}{2\delta} \int_{\lambda_2^0-\delta}^{\lambda_2^0+\delta} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda_1)\bar{v}(\lambda_1) [f(\lambda_1, \lambda_2) - f(\lambda_1, \lambda_2^0)]\, d\lambda_1 \right|. \tag{11}$$

В силу леммы второе слагаемое при достаточно малом δ становится сколь угодно малым; первое же слагаемое не меньше $\theta - 2\varepsilon$ (согласно (10)).

Аналогично показывается, что $\|u\|$ и $\|v\|$ при достаточно малом δ близки к 1.

Таким образом, $\rho(u,v) = \frac{|(u,v)|}{\|a\|\|v\|}$ при достаточно малом δ может быть сделано сколь угодно близким к θ.

Теорема доказана.

Покажем теперь, что в отличие от процессов канонические величины для полей не существуют даже в самых простейших случаях. Точнее, первые канонические величины существуют лишь в том (редко встречающемся) случае, когда $\text{mes } E = \text{mes }\{\lambda_2 : \rho_1(\lambda_2) = R_1\} > 0$.

Теорема 3. Пусть мера E равна нулю. Тогда для любой пары векторов $u \in \widetilde{Q}_0^-$, $v \in \widetilde{Q}_a^-$ имеет место неравенство

$$\rho(u, v) < R_1. \tag{12}$$

Не ограничивая общности, можно считать векторы u и v единичными.

Рассмотрим

$$U(\lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1, \tag{13}$$

$$V(\lambda_2) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1. \tag{14}$$

Так как $\int U(\lambda_2)\, d\lambda_2 = 1$, то

$$\text{mes }\{\lambda_2 : U(\lambda_2) > 0\} > 0. \tag{15}$$

Аналогично, $\text{mes }\{\lambda_2 : V(\lambda_2) > 0\} > 0$.

Покажем, что существует множество E' такое, что

$$\int_{E'} U(\lambda_2)\, d\lambda_2 > 0, \quad \int_{E'} V(\lambda_2)\, d\lambda_2 > 0, \quad \rho_1(\lambda_2) \leqslant \alpha < R_1 \tag{16}$$

при всех $\lambda_2 \in E'$. С этой целью обозначим $E^{(n)} = \left\{\lambda_2 : \rho_1(\lambda_2) \leqslant R_1 - \frac{1}{n}\right\}$.

В силу измеримости функции $\rho_1(\lambda_2)$ каждое множество $E^{(n)}$ измеримо. Очевидно, $(-\infty, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^{(n)} + E$. Следовательно, существует номер n_1 такой, что $U(\lambda_2)$ не эквивалентна нулю на $E^{(n_1)}$ (в противном случае $U(\lambda_2) = 0$ почти всюду, так как $\text{mes } E = 0$, что противоречит $\int U(\lambda_2)\, d\lambda_2 = 1$).

Аналогичный номер n_2 имеется для функции $V(\lambda_2)$. Выбираем наибольший из этих номеров $n = \max(n_1, n_2)$ и тем самым находим множество $E' = E^{(n)}$, на котором обе функции U и V не эквивалентны нулю, т. е. выполняется (16). Полагая $\alpha = R_1 - \frac{1}{n}$, видим, что множество E' обладает нужными нам свойствами.

Оценим теперь скалярное произведение (u, v):

$$|(u, v)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} u\bar{v} f d\lambda_1 d\lambda_2 \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} u\bar{v} f d\lambda_1 \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(\lambda_2) \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 f d\lambda_1} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |v|^2 f d\lambda_1 d\lambda_2} = \int_{E'} + \int_{CE'} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \left[\int_{E'} U(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{E'} V(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} + R_1 \left[\int_{CE'} U(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[\int_{CE'} V(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} < R_1 \left[\int_{E'} U(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{E'} V(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ R_1 \left[\int_{CE'} U(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{CE'} V(\lambda_2) d\lambda_2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant R_1 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda_2) d\lambda_2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda_2) d\lambda_2} = R_1. \tag{17}$$

Итак, $|(u, v)| < R_1$. Следовательно, $\rho(u, v) < R_1$. Тем самым теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что в общем случае (например, когда $\rho_1(\lambda_2)$ — произвольная аналитическая функция *), отличная от постоянной) не существуют уже первые канонические величины и, следовательно, вся конструкция канонических корреляций не может быть реализована. Вместе с тем предыдущие результаты указывают возможность естественного видоизменения постановки вопроса, связанного с введением обобщенных канонических величин.

Как видно из доказательства теоремы 3, первые канонические величины $u(\lambda_1, \lambda_2)$ и $v(\lambda_1, \lambda_2)$ должны были бы быть сосредоточены на прямой $\lambda_2 = \text{const}$, что показывает, что величины эти представляют собой обобщенные функции. К подобному же выводу приводит аналогия со спектральной теорией самосопряженных операторов в случае непрерывного спектра (теорема Гельфанда — Костюченко [10]). Эта аналогия не является чисто внешней, если вспомнить, что канонические величины суть собственные векторы некоторых самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

---

*) Именно так обстоит дело, когда плотность рациональна, ибо $\varrho_1(\lambda_2)$ в этом случае, согласно работе [8], является корнем алгебраического уравнения с аналитическими по λ_2 коэффицентами.

Пусть $f(\lambda_1, \lambda_2)$ — рациональная спектральная плотность. Тогда $f(\lambda_1, \lambda_2)$ есть рациональная функция по λ_2 при каждом фиксированном λ_2, причем степень знаменателя не превосходит некоторого числа N. Поэтому [8] при каждом фиксированном $\lambda_2 = \mu$ существует конечное число канонических величин $u_k^{(\mu)}(\lambda_1)$, $v_k^{(\mu)}(\lambda_1)$ $(k = 1, \dots, N)$. Соответствующие канонические корреляции обозначим через $\rho_k(\mu)$.

Введем в рассмотрение обобщенные функции

$$\begin{aligned} u_k^{(\mu)}(\lambda_1, \lambda_2) &= u_k^{(\mu)}(\lambda_1)\,\delta(\mu - \lambda_2), \\ v_k^{(\mu)}(\lambda_1, \lambda_2) &= v_k^{(\mu)}(\lambda_1)\,\delta(\mu - \lambda_2), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\delta(\mu - \lambda_2)$ — дельта-функция.

Естественно считать, что эти величины (упорядоченные по убыванию величины $\rho_k(\mu)$) образуют систему обобщенных канонических величин. Этому утверждению можно придать надлежащую строгость.

Опишем теперь конструкцию, дающую приближенное решение задачи с наперед заданной точностью. Характерная особенность здесь заключается в том, что вместо системы векторов u_i, v_i с необходимостью возникает разбиение пространств $\widetilde{Q}_0^-$ и $\widetilde{Q}_a^+$ в прямую сумму ортогональных подпространств U_i, V_i, так что U_i, V_j некоррелированы при $i \neq j$, а при $i = j$ косинусы углов между этими подпространствами имеют постоянное значение ρ_i с точностью до некоторого малого числа ε.

Введем следующее определение. Два подпространства H_1 и H_2 гильбертова пространства H будем называть имеющими корреляцию, равную ρ с точностью до ε, если для всех ненулевых векторов $h_1 \in H_1$ и $h_2 \in H_2$ выполнены соотношения

$$|\rho(h_1, P_2 h_1) - \rho| < \varepsilon, \tag{19}$$

$$|\rho(h_2, P_1 h_2) - \rho| < \varepsilon, \tag{20}$$

где P_1 и P_2 — операторы проектирования на H_1 и H_2 соответственно.

Зафиксируем натуральное число k и разобьем ось λ_2 на интервалы $\Delta_k^{(n)}$ так, чтобы колебание функции $\rho_k(\mu)$ на каждом из этих интервалов не превосходило ε. Пусть среднее значение функции $\rho_k(\mu)$ на интервале $\Delta_k^{(n)}$ равно $\rho_k^{(n)}$. Обозначим через $U_k^{(n)}$ совокупность всех функций $u(\lambda_1, \lambda_2)$, принадлежащих $L^2_{f(\lambda_1, \lambda_2)}$ и имеющих вид

$$u(\lambda_1, \lambda_2) = u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\,\varphi(\lambda_2), \tag{21}$$

где $u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)$ суть канонические величины для подпространства $\widetilde{H}_0^-(f_{\lambda_2})$, а $\varphi(\lambda_2)$ обращается в нуль вне интервала $\Delta_k^{(n)}$.

Очевидно, что функции (21) образуют подпространство в L_f^2, причем в силу теоремы 1 подпространство это целиком лежит в $\widetilde{Q}_0^-$. Аналогично определяются $V_k^{(n)}$, являющиеся подпространствами в $\widetilde{Q}_a^-$. Легко показать, что выполнены следующие условия:

1) пространство $U_k^{(i)}$ ($V_k^{(i)}$, а также $U_k^{(i)}$, $V_s^{(j)}$ при $k \neq s$ или $i \neq j$) попарно ортогональны,

2) подпространства $U_k^{(i)}$ и $V_k^{(i)}$ имеют корреляцию $\rho_k^{(i)}$ с точностью до ε.

Первое свойство проверяется с помощью простой выкладки, использующей теорему Фубини и учитывающей также ортогональность функций $u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)$ и $v_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)$ при фиксированном λ_2. Остановимся подробнее на втором свойстве. Для его доказательства достаточно установить следующие два утверждения:

а) $\sup \rho(u, v) \leqslant \rho_k^{(n)} + \varepsilon$, $u \in U_k^{(n)}$, $v \in V_k^{(n)}$;

б) для любого вектора $u \in U_k^{(n)}$ ($v \in V_k^{(n)}$) найдется вектор $v \in V_k^{(n)}$ $u \in U_k^{(n)}$ такой, что $\rho(u, v) > \rho_k^{(n)} - \varepsilon$.

$$\text{а)}\ |(u, v)| = \left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \varphi(\lambda_2)\, \overline{V}_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \overline{\psi}(\lambda_2)\, f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_2)\, \overline{\psi}(\lambda_2)\, d\lambda_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^{(\lambda_2)} \overline{v}_k^{(\lambda_2)} f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_k(\lambda_2)\, \varphi(\lambda_2)\, \overline{\psi}(\lambda_2)\, d\lambda_2 \right| \leqslant (\rho_k^{(n)} + \varepsilon) \| \varphi \| \| \psi \| =$$

$$= (\rho_k^{(n)} + \varepsilon) \| u \| \| v \|.$$

б) Пусть $u = u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \varphi(\lambda_2)$; $v = v_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \varphi(\lambda_2)$. Тогда

$$|(u, v)| = \left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \overline{v}_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, |\varphi(\lambda_2)|^2 f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \right| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 \rho_k(\lambda_2)\, d\lambda_2 > (\rho_k^{(n)} - \varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2\, d\lambda_2.$$

В $\widetilde{Q}_0^-$ мы получили систему ортогональных подпространств $U_k^{(n)}$. Пусть $U = \oplus U_k^{(n)}$, а U' — ортогональное дополнение к U в $\widetilde{Q}_0^-$. Аналогично V' — ортогональное дополнение к V в $\widetilde{Q}_a^+$. Покажем, что они ортогональны. Для этого достаточно убедиться, что при каждом фиксированном λ_2 функция $u'(\lambda_1, \lambda_2) \in U'$ ортогональна к функциям $u_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)$, ибо для процессов, возникающих при фиксированном λ_2, аналогичное утверждение справедливо. Действительно, так как $u' \in U'$, то

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} u'(\lambda_1, \lambda_2)\, \overline{u}_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, \overline{\varphi}(\lambda_2)\, f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \overline{\varphi}(\lambda_2) \int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(\lambda_1, \lambda_2)\, \overline{u}_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1 = 0. \qquad (22)$$

Но $\varphi(\lambda_2)$ — произвольная функция L_f^2, следовательно, функция $\psi(\lambda_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(\lambda_1, \lambda_2)\, \overline{u}_k^{(\lambda_2)}(\lambda_1)\, f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\lambda_1$ почти всюду равна нулю.

Таким образом, упорядочивая подпространства $U_k^{(n)}$ и $V_k^{(n)}$ по убыванию чисел $\rho_k^{(n)}$, получаем полную систему подпространств, отвечающих ненулевым корреляциям и дающих решение задачи о нахождении канонических корреляций с точностью до ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hotelling H. Relation between two sets of variates.— Biometrika, 28, 1936.
2. Обухов А. М. Нормальная корреляция векторов.— Изв. АН СССР, отдел. матем. и естеств. наук, № 3, 1938.
3. Обухов А. М. Теория корреляции векторов.— Ученые записки МГУ, вып. 45, 1940.
4. Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
5. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
6. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
7. Гельфанд И. М., Яглом А. М. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции.— УМН, 12, вып. 1 (73), 1957.
8. Yaglom A. M. Stationary Gaussian processes satisfying the strong mixing condition and best predictable functionals.— Bernoulli—Bayes—Laplace Anniversary Volume. Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg — New York, 1965.
9. Yaglom A. M. Outline of some topics in linear extrapolation of stationary processes.— Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 2, part 1, 1967.
10. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.— Обобщенные функции, вып. 4. М., Физматгиз, 1961.

S. M. Olevskaya

CANONICAL CORRELATIONS FOR THE RANDOM FIELDS

Summary

The notions of canonical correlations for the random processes are spread onto the random fields. It is revealed that coefficients of the canonical correlation have as a rule a continuous spectrum and the canonical variables should be treated in a generalized sense. A method is described for approximate determination of values correlated to the maximum with a prescribed accuracy.

Поступила в редколлегию 17.VII 1972.