С. И. ПЕРЕСЫПКИНА, асп.
Институт математики АН УССР

О ДОСТИЖЕНИИ УРОВНЯ ДЛЯ СУММ И ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫХ НА КОНЕЧНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

В работе изучается совместное распределение момента достижения и величин перескока и недоскока уровня для сумм независимых случайных величин, заданных на цепи Маркова, и для однородных процессов с независимыми приращениями, управляемых цепями Маркова.

1. Пусть $\zeta_m = (s_m, \eta_m)$ — однородный по времени и аддитивный по первой компоненте марковский процесс, вторая компонента которого — эргодическая цепь Маркова с конечным числом состояний,

$$\Phi(\alpha) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dP\{s_m \leqslant x + y, \eta_m = r/s_{m-1} = x, \ \eta_{m-1} = k\} \right\|$$

$$(k, r = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Этот процесс можно представить в виде суммы случайных величин $\xi^{(j)}_{k_{j-1}, k_j}$, если управляющая цепь в момент j перешла из состояния k_{j-1} в состояние k_j

$$s_m = \sum_{j=1}^{m} \xi^{(j)}_{k_{j-1}, k_j}, \qquad s_0 = 0.$$

Пусть

$$P\{\eta_m = r/\eta_{m-1} = k\} = p_{kr},$$

$$P\{\xi^{(m)}_{kr} < x, \ \eta_m = r/\eta_{m-1} = k\} = p_{kr} F_{kr}(x).$$

Введем такие функционалы от ζ_m: $\tau_x = \min\{j : s_j > x\}$ — момент достижения уровня $x \geqslant 0$; $\gamma_x^+ = s_{\tau_x} - x$, $\gamma_x^- = x - s_{\tau_x - 1}$ — величины перескока и недоскока уровня $x \geqslant 0$; $s_m^+ = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant m} s_j$.

Обозначим событие $\{A, \eta_1 = r/\eta_0 = k\} = \{A\}_{kr}$, тогда для $x \geqslant 0$ можно записать такие соотношения:

$$\{\tau_x = j, \ j \geqslant 2, \ \gamma_x^+ < y, \ \gamma_x^- < z\}_{kr} =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{n} \{\xi_{km} < x\}_{km} \{\tau_{x-\xi_{km}} = j-1,\ \gamma^+_{x-\xi_{km}} < y,\ \gamma^-_{x-\xi_{km}} < z\}_{mr};$$

$$\{\tau_x = 1,\ \gamma^+_x < y,\ \gamma^-_x < z\}_{kr} = \{\xi_{kr} \geqslant x\}_{kr} \{\xi_{kr} - x < y,\ x < z\}.$$

Переходя от событий к их математическим ожиданиям, получим для $x \geqslant 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} z^j M \{e^{-u\gamma^+_x - v\gamma^-_x},\ \tau_x = j\}_{kr} = zp_{kr} \int_x^{\infty} e^{-u(\omega - x) - vx} dF_{kr}(\omega) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} z^j \sum_{m=1}^{n} \int_{-\infty}^{x} p_{km} dF_{km}(\omega) M \{e^{-u\gamma^+_{x-\omega} - v\gamma^-_{x-\omega}},\ \tau_{x-\omega} = j-1\}_{mr}.$$

Доопределив это уравнение на всю ось $-\infty < x < \infty$ с помощью функции

$$B^-_{kr}(u, v, z, x) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0 \\ -zp_{kr} \int_x^{\infty} e^{u(x-\omega)} e^{-vx} dF_{kr}(\omega), & x < 0 \end{cases}$$

и используя обозначения

$$M_{kr}(u, v, z, x) = M \{e^{-u\gamma^+_x - v\gamma^-_x} z^{\tau_x}\}_{kr} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} z^j M \{e^{-u\gamma^+_x - v\gamma^-_x},\ \tau_x = j\}_{kr};$$

$$M^+_{kr}(u, v, z, x) = M_{kr}(u, v, z, x)\, \delta(x \geqslant 0),$$

$$\widetilde{M}^+_{kr}(u, v, z, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} M^+(u, v, z, x)\, dx,$$

получим

$$M^+_{kr}(u, v, z, x) = zp_{kr} \int_x^{\infty} e^{u(x-\omega) - vx} dF_{kr}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} p_{km} \int_{-\infty}^{\infty} M^+_{mr}(u, v, z, x - \omega)\, dF_{km}(\omega) + B^-_{kr}(u, v, z, x),$$

$$-\infty < x < \infty.$$

После применения преобразования Фурье по x получим уравнение в матричном виде

$$(I - z\Phi(\alpha))\, \widetilde{M}^+(u, v, z, \alpha) = \frac{z}{i\alpha + u - v} \Phi(\alpha) + \widetilde{B}^-(u, v, z, \alpha). \qquad (2)$$

Из этого уравнения видно, что для определения искомой совместной производящей функции для $(\tau_x, \gamma_x^+, \gamma_x^-)$ надо факторизовать матрицу $(I - z\Phi(\alpha))$. Воспользуемся факторизационным тождеством, приведенным в работе [1] (см. теорему 2.1).

Пусть $\mathfrak{B}_n(\alpha)$ $(\operatorname{Im}\alpha = 0)$ — банахова алгебра квадратных матриц порядка n, элементы которой являются преобразованиями Фурье — Стильтьеса от непрерывных справа функций $F(x)$, имеющих на любом конечном интервале ограниченную вариацию, и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} |dF(x)|$ абсолютно сходится.

Если $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{B}_n(\alpha)$, то $\varphi(\alpha) = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right\|$; обозначим

$$\varphi^{\pm}(\alpha) = \left\| \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right]_{\pm} \right\| = \left\| \pm \int\limits_{-0}^{\pm\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right\|,$$

$$\varphi^{-}(\alpha) \in \mathfrak{B}_n^{-}(\alpha), \qquad \varphi^{+}(\alpha) \in \mathfrak{B}_n^{+}(\alpha).$$

Положим при $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\alpha = 0$

$$C_z(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j C_j(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} dP\{\max_{0<m<j} s_m \leqslant 0, s_j \leqslant y\}_{kr} \right\|,$$

$$B_z(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j B_j(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} dP\{\max_{0<m<j} s_m < s_j \leqslant y\}_{kr} \right\|.$$

Эти матрицы принадлежат $\mathfrak{B}_n(\alpha)$. Сходимость рядов при $|z| < 1$ следует из вероятностного смысла.

Лемма 1. При $|z| < 1$ справедливо тождество правой факторизации матрицы $I - z\Phi(\alpha)$

$$I - z\Phi(\alpha) = (I - B_z^-(\alpha))(I - C_z^+(\alpha)),$$

$$(I - B_z^-(\alpha))^{-1} = I + C_z^-(\alpha),$$

$$(I - C_z^+(\alpha))^{-1} = I + B_z^+(\alpha).$$

Применяя это факторизационное тождество к (2), убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. Для рассматриваемого процесса $\zeta_m = (s_m, \eta_m)$ с характеристической функцией (1) преобразование Фурье для совместной производящей функции момента достижения уровня и величин перескока и недоскока уровня выражается формулой

$$\widetilde{M}^{+}(u, v, z, \alpha) = (I + B_z^{+}(\alpha)) \left[(I + C_z^{-}(\alpha)) \frac{z\Phi(\alpha + iv)}{i\alpha + u - v} \right]_{+}. \qquad (3)$$

Следствие. Положим $v = 0$

$$\widetilde{M}^{+}(u, 0, z, \alpha) = v^{+}(u, z, \alpha) = \left\| \int_{0}^{\infty} e^{i\alpha x} M \{ e^{-u\gamma_x^{+}} z^{\tau_x} \}_{kr} \, dx \right\| .$$

Из (3) следует, что

$$v^{+}(u, z, \alpha) = (I + B_z^{+}(\alpha)) \left[I + C_z^{-}(\alpha) \frac{z\Phi(\alpha)}{i\alpha + u} \right]_{+} .$$

Эта формула соответствует теореме 1 [2]. Нетрудно убедиться, что

$$\left[(I + C_z^{-}(\alpha)) \frac{z\Phi(\alpha)}{i\alpha + u} \right]_{+} = \left[-(I + C_z^{-}(\alpha)) \frac{I - z\Phi(\alpha)}{i\alpha + u} \right]_{+}$$

и

$$\left[\frac{\varphi^{+}(\alpha)}{i\alpha + u} \right]_{+} = \frac{\varphi^{+}(\alpha) - \varphi^{+}(iu)}{i\alpha + u} .$$

Поэтому

$$v^{+}(u, z, \alpha) = -\frac{1}{i\alpha + u} [I - (I + B_z^{+}(\alpha))(I - C_z^{+}(iu))]. \qquad (4)$$

Это соотношение для сумм независимых случайных величин получено в работе [3].

2. Можно установить аналогичное соотношение непосредственно из стохастического соотношения ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$):

$$\tau_{x+y} = \begin{cases} \tau_y + \tau_{x-\gamma_y}, & \gamma_y < x, \\ \tau_y, & \gamma_y \geqslant x, \end{cases} \qquad (5)$$

справедливого на множестве элементарных исходов, входящих в событие $\{\tau_x < \infty\}$. Обозначим $\{\tau_x = j,\ \eta_{\tau_x} = r / \eta_0 = k\} = \{\tau_x = j\}_{kr}$. Тогда из стохастического соотношения следует формула

$$P\{\tau_{x+y} = j\}_{kr} = P\{\tau_y = j,\ \gamma_y \geqslant x\}_{kr} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{j} \sum_{l=1}^{n} \int_{0}^{x} P\{\tau_y = m, \gamma_y \in dv\}_{kl} P\{\tau_{x-v} = j - m\}_{lr}. \qquad (6)$$

Переходя в (6) к математическим ожиданиям и осуществляя преобразования Лапласа—Стильтьеса по x и Лапласа по y, нетрудно установить следующее утверждение.

Теорема 2. Для описанного процесса ζ_m с характеристической функцией (1) в условиях справедливости стохастического соотношения (5) совместная производящая функция момента достижения и величины перескока положительного уровня определяется следующими выражениями:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\mu y} M \{ z^{\tau_y} e^{-u\gamma_y} \} \, dy = \frac{1}{\mu - u} \left[I - \int_{0}^{\infty} e^{-\mu y} dM z^{\tau_y} \left(\int_{0}^{\infty} e^{-ux} dM z^{\tau_x} \right)^{-1} \right],$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu y} M\{z^{\tau_y} e^{-u\gamma_y}\}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\mu - u}\left[I - \sum_{m=1}^{\infty} z^m M e^{-\mu s_m^+}\left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m M e^{-u s_m^+}\right)^{-1}\right].$$

Заметим, что оба выражения записаны в матричной форме. Первое из них непосредственно следует из формулы (6), а чтобы получить второе, достаточно убедиться, что

$$\int_0^\infty e^{-\mu x} d_x M z^{\tau_x} P(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m M e^{-\mu s_m^+},$$

где

$$P(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \| p_{kr}(m) \| = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \| P\{\eta_m = r/\eta_0 = k\} \|.$$

3. Пусть $\xi_k(t)$ — однородные случайные процессы с независимыми приращениями, выборочные функции которых непрерывны справа. Характеристические функции рассматриваемых процессов

$$M e^{i\alpha \xi_k(t)} = e^{t\psi_k(\alpha)}, \qquad k = \overline{1, n},$$

$$\psi_k(\alpha) = i\alpha a_k + \lambda_k \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\, dL_k(x), \tag{7}$$

где λ_k — параметры показательно распределенного интервала времени ρ_k между двумя последовательными скачками процесса $\xi_k(t)$, $L_k(x)$ — распределение величины скачка $\varkappa_k$ процесса $\xi_k(t)$.

Переходы из состояния k в состояние r (k, $r = \overline{1, n}$) управляются цепью Маркова $\eta(t)$, обладающей матрицей перехода

$$P(t) \| p_{kr}(t) \| = \| P\{\eta(t) = r/\eta(0) = k\} \| = e^{tQ}.$$

Здесь

$$Q = N(P - I), \quad N = \| q_k \delta_{kr} \|, \qquad k, r = \overline{1, n},$$

δ_{kr} — символ Кронекера, q_k — параметры показательно распределенного времени сидения процесса $\eta(t)$ в состоянии k, P — матрица перехода вложенной цепи $z_n = \eta(\sigma_n + 0)$, где σ_n — моменты изменений состояния цепи $\eta(t)$,

$$P = \| p_{kr} \|, \quad p_{kk} = 0, \ \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{n} p_{kr} = 1.$$

Определим случайный процесс $\xi(t)$ ($\xi(0) = 0$) как процесс с независимыми приращениями, управляемый цепью Маркова $\eta(t)$ и обла·

дающий характеристической функцией $e^{t\Psi(\alpha)}$ (см. [4]), для которой

$$\Psi(\alpha) = \Psi_0(\alpha) + N(\Phi(\alpha) - I),$$
$$\Psi_0(\alpha) = \| \psi_k(\alpha) \delta_{kr} \|, \quad \Phi(\alpha) = \| \varphi_{kr}(\alpha) p_{kr} \|, \tag{8}$$
$$\Phi(0) = P, \qquad \Psi(0) = Q.$$

Здесь $\varphi_{kr}(\alpha)$ $(k, r = \overline{1, n})$ — характеристические функции случайных величин $\{\xi_{kr},\ k, r = \overline{1, n}\}$ — приращений процесса $\xi(t)$ в моменты перехода цепи $\eta(t)$ из состояния k в состояние r.

Их распределение на вложенной цепи z_n обозначим

$$F(x) = \| P\{\xi_{kr} < x,\ z_1 = r/z_0 = k\} \| = \| F_{kr}(x) p_{kr} \|.$$

Для удобства обозначений введем вспомогательную случайную величину θ_s $(s > 0)$, имеющую показательное с параметром s распределение. Определим следующие функционалы: момент первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\xi(t)$

$$\tau_x = \inf\{t : \xi(t) \geqslant x\},$$

величины перескока и недоскока уровня $x \geqslant 0$

$$\gamma_x^+ = \xi(\tau_x) - x, \qquad \gamma_x^- = x - \xi(\tau_x - 0).$$

Нас будет интересовать совместная производящая функция момента достижения положительного уровня и величин перескока и недоскока уровня для рассматриваемого процесса $\xi(t)$, заданного на цепи Маркова $\eta(t)$

$$M(u, v, s, x) = \| M\{e^{-s\tau_x - u\gamma_x^+ - v\gamma_x^-}\}_{kr} \|. \tag{9}$$

Обозначим

$$M^+(u, v, s, x) = M(u, v, s, x)\,\delta(x > 0),$$
$$\widetilde{M}^+(u, v, s, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} M^+(u, v, s, x)\,dx$$

и покажем, что $\widetilde{M}^+(u, v, s, \alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$(sI - \Psi(\alpha))\,\widetilde{M}^+(u, v, s, \alpha) = C^+(u, v, \alpha) + C^-(u, v, s, \alpha), \tag{10}$$

где элементы матриц $C^\pm$ являются преобразованиями Фурье на положительной (отрицательной) полуоси. Так же, как это делалось в [5 и 2], для вывода уравнения используем стохастические соотношения, связывающие изучаемые случайные величины. Вид этих соотношений, как и вид интегральных уравнений, зависит от направления сноса в начальный момент и в момент достижения уровня, а следовательно, и от значений управляющей цепи в начальный момент и в момент достижения уровня. Поэтому будем рассматривать четыре возможных случаи:

$$\text{а)}\ \eta(\tau_x)=r,\quad \eta(0)=k,\quad a_k<0,$$

$$\{\tau_x<y_1,\ \gamma_x^+<y_2,\ \gamma_x^-<y_3\}_{kr}=\{\rho_k\geqslant\zeta_k,\ a_k\zeta_k+\xi_{kr}\geqslant x\}_{kr}\times$$
$$\times\{\zeta_k<y_1,\ a_k\zeta_k+\xi_{kr}-x<y_2,\ x-a_k\zeta_k<y_3\}+$$
$$+\bigcup_{m=1}^{n}\{\rho_k\geqslant\zeta_k,\ a_k\zeta_k+\xi_{km}<x\}_{km}\times$$
$$\times\{\zeta_k+\tau_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_3\}_{mr}+$$
$$+\{\rho_k<\zeta_k, a_k\rho_k+\varkappa_k<x\}\times$$
$$\times\{\rho_k+\tau_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_3\}_{kr};$$

$$\text{б)}\ \eta(\tau_x)=k,\ \eta(0)=k,\ a_k<0,$$

$$\{\tau_x<y_1,\ \gamma_x^+<y_2,\ \gamma_x^-<y_3\}_{kk}=\bigcup_{m=1}^{n}\{\rho_k\geqslant\zeta_k, a_k\zeta_k+\xi_{km}<x\}_{km}\times$$
$$\times\{\zeta_k+\tau_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_3\}_{mr}+$$
$$+\{\rho_k<\zeta_k,\ a_k\rho_k+\varkappa_k<x\}\times$$
$$\times\{\rho_k+\tau_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_3\}_{kk}+$$
$$+\{\rho_k<\zeta_k,\ a_k\rho_k+\varkappa_k\geqslant x\}\times$$
$$\times\{\rho_k<y_1,\ \rho_k a_k+\varkappa_k-x<y_2,\ x-a_k\rho_k<y_3\};$$

$$\text{в)}\ \eta(\tau_x)=r,\ \eta(0)=k,\ a_k>0.$$

$$\{\tau_x<y_1,\ \gamma_x^+<y_2,\ \gamma_x^-<y_3\}_{kr}=\left\{\rho_k\geqslant\zeta_k, \frac{x}{a_k}>\zeta_k, a_k\zeta_k+\xi_{kr}\geqslant x\right\}_{kr}\times$$
$$\times\{\zeta_k<y_1,\ a_k\zeta_k+\xi_{kr}-x<y_2,\ x-a_k\zeta_k<y_3\}+$$
$$+\bigcup_{m=1}^{n}\left\{\rho_k\geqslant\zeta_k, \frac{x}{a_k}>\zeta_k, a_k\zeta_k+\xi_{km}<x\right\}_{km}\times$$
$$\times\{\zeta_k+\tau_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}}<y_3\}_{mr}+$$
$$+\left\{\rho_k<\zeta_k, \frac{x}{a_k}>\rho_k, a_k\rho_k+\varkappa_k<x\right\}\times$$
$$\times\{\rho_k+\tau_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\varrho_k-\varkappa_k}<y_3\}_{kr};$$

$$\text{г)}\ \eta(\tau_x)=k,\ \eta(0)=k,\ a_k>0,$$

$$\{\tau_x < y_1,\ \gamma_x^+ < y_2,\ \gamma_x^- < y_3\}_{kk} = \left\{\rho_k \geqslant \zeta_k,\ \frac{x}{a_k} \leqslant \zeta_k\right\}\left\{\frac{x}{a_k} < y_1\right\} +$$

$$+ \bigcup_{m=1}^{n} \left\{\rho_k \geqslant \zeta_k,\ \frac{x}{a_k} > \zeta_k,\ a_k\zeta_k + \xi_{km} < x\right\}_{km} \times$$

$$\times \{\zeta_k + \tau_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}} < y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}} < y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\zeta_k-\xi_{km}} < y_3\}_{mr} +$$

$$+ \left\{\rho_k < \zeta_k,\ \frac{x}{a_k} > \rho_k,\ a_k\rho_k + \varkappa_k < x\right\} \times$$

$$\times \{\rho_k + \tau_{x-a_k\rho_k-\varkappa_k} < y_1,\ \gamma^+_{x-a_k\rho_k-\varkappa_k} < y_2,\ \gamma^-_{x-a_k\rho_k-\varkappa_k} < y_3\}_{kk} +$$

$$+ \left\{\rho_k < \zeta_k,\ \frac{x}{a_k} > \rho_k,\ a_k\rho_k + \varkappa_k \geqslant x\right\} \times$$

$$\times \{\rho_k < y_1,\ a_k\rho_k + \varkappa_k - x < y_2,\ x - a_k\rho_k < y_3\}.$$

Подставив эти соотношения в выражение (9), доопределив полученные уравнения на $x < 0$ и осуществив преобразование Фурье по x, придем к матричному уравнению (10), в котором

$$C^+(u, v, \alpha) = \frac{1}{i\alpha + u - v}\,[N\Phi^+(\alpha + iv) - N\Phi^+(iu) +$$

$$+ \Lambda^+(\alpha + iv) - \Lambda^+(iu)] + A^+, \tag{11}$$

где обозначено

$$\Phi^+(\alpha) = \left\| \int_{-0}^{\infty} e^{i\alpha x} dF_{kr}(x) \right\|, \quad \Lambda^+(\alpha) = \left\| \int_{-0}^{\infty} \lambda_k e^{i\alpha x} dL_k(x)\, \delta_{kr} \right\|,$$

$$\Lambda^+(\alpha),\ \Phi^+(\alpha) \in \mathfrak{B}_n^+(\alpha), \qquad A^+ = \| a_k \delta_{kr} \delta(a_k > 0) \|.$$

Для определения из уравнения (10) искомой совместной производящей функции для величин $(\tau_x, \gamma_x^+, \gamma_x^-)$ воспользуемся факторизационным разложением матрицы $sI - \Psi(\alpha)$. В работе [6] получено факторизационное тождество для однородных процессов с независимыми приращениями, управляемых цепями Маркова, которое является аналогом тождества безгранично делимой факторизации (см. теорему 1 [6]).

Лемма 2. Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, который задан на цепи Маркова $\eta(t)$ и характеристическая функция которого имеет вид (8). Тогда при $s > 0$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$ имеет место факторизационное представление

$$Me^{i\alpha\xi(\theta_s)} = Me^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} P^{-1}(\theta_s)\, Me^{i\alpha(\xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s))}. \tag{12}$$

Заметим, что здесь использована сокращенная матричная запись, подразумевающая, что случайные величины рассматриваются на цеии Маркова $\eta(t)$, например,

$$Me^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \| M \{e^{i\alpha\xi(\theta_s)}, \ \eta(\theta_s) = r/\eta(0) = k\}\|.$$

Формулы (10) и (12) позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, заданный на цепи Маркова $\eta(t)$ с помощью характеристической функции (8). Тогда интегральное преобразование совместной производящей функции (9) для момента первого достижения и величин перескока и недоскока положительного уровня выражается формулой

$$s\widetilde{M}^{+}(u, v, s, \alpha) = Me^{i\alpha\xi^{+}(\theta_s)}P^{-1}(\theta_s)\,[Me^{i\alpha(\xi(\theta_s)-\xi^{+}(\theta_s))}C^{+}(u, v, \alpha)]_{+}. \tag{13}$$

Можно распространить утверждение теоремы 2 и на однородные процессы с независимыми приращениями с неограниченным числом скачков на конечном временном интервале, кумулянты характеристических функций которых имеют вид

$$\psi_k(\alpha) = i\alpha a_k + \int\limits_{-\infty}^{\infty} [e^{i\alpha x} - 1 - i\alpha x\delta(|x| \leqslant 1)]\, d\Pi_k(x), \qquad k = \overline{1, n}.$$

Для этого надо ввести последовательности урезанных процессов $\xi_k^{(j)}(t)$ с кумулянтами

$$\psi_k^{(j)}(\alpha) = i\alpha a_k^{(j)} + \lambda_k^{(j)} \int\limits_{|x|>\frac{1}{j}} (e^{i\alpha x} - 1)\, dL_k^{(j)}(x),$$

где

$$\lambda_k^{(j)} = \int\limits_{|x|>\frac{1}{j}} d\Pi_k(x), \quad a_k^{(j)} = a_k - \int\limits_{\frac{1}{j}\leqslant|x|<1} x\cdot d\Pi_k(x),$$

$$dL_k^{(j)}(x) = \frac{1}{\lambda_k^{(j)}}\,\delta\left(|x| > \frac{1}{j}\right) d\Pi_k(x),$$

и осуществить в формуле (9) предельный переход при $j \to \infty$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность моему руководителю Д. В. Гусаку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пресман Э. Л. Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1969, 33, № 4, 861—901.

2. Гусак Д. В., Пересыпкина С. И. О распределении момента и величины перескока уровня для однородных процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова.— Укр. матем. ж, 1974, 3.

3. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых случаемых.— Сиб. матем. ж., 1962, 5, 645—694.

4. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте, I, II.— Теория вероятн. и ее примен., 1969 14, 4—14, 679—692.

5. Гусак Д. В., Королюк В. С., Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятн. и матем. статистика, вып. I, 1970, 55—73.

6. Гусак Д. В. Об одном классе процессов с независимыми приращениями на конечной цепи Маркова.— Укр. матем. ж., 2, 1973.

S. I. Peresipkina

ON REACHING THE LEVEL FOR SUMS AND PROCESSES DEFINED ON FINITE MARKOV CHAIN

Summary

For sums of independent random variables on finite Markov chain and for homogeneous processes with independent increments defined on finite Markov chain the common generation function of the first passage time, overstep and understep the level is studied.

Поступила в редколлегию 25.V 1973.