М. Л. ПЛАТОНОВ, доц.
Иркутский университет

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЧИСЕЛ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В работе [1] изложено понятие о числах комбинаторной структуры (комбинаторных числах) и рассмотрены их основные свойства. Эти комбинаторные числа удобнее всего задать при помощи производящих функций. Возьмем последовательность элементов из некоторого числового поля $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, которую назовем базовой. Комбинаторные числа первого рода определяются как коэффициенты сумм

$$B_0^0 = 1, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha_k + x) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n x^k, \quad n = \overline{1, \infty},$$

это элементарные симметрические функции от n первых элементов базовой последовательности.

Комбинаторные числа второго рода являются коэффициентами рядов

$$A_0^0 = 1, \quad \prod_{k=0}^{n} (1 - \alpha_k x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{k+n} x^k, \quad n = \overline{1, \infty},$$

$$|\alpha_k x| < 1, \quad k = \overline{0, n}. \tag{1}$$

Эти коэффициенты суть n-е разделение разности от функции x^{k+n}, вычисленные в точках $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Комбинаторные числа третьего рода являются коэффициентами сумм

$$S_0^0 = 1, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha_k + x) = \sum_{k=0}^{n} S_k^n \Pi_k, \quad n = \overline{1, \infty,}$$

где $\Pi_0 = 1$, $\Pi_k = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_{k-1})$, $k = \overline{1, n}.$

Дополнительно полагаем, что числа B_k^n, A_k^n, S_k^n равны нулю при выполнении хотя бы одного из неравенств $k < 0$, $n < k$.

В работе [2] рассмотрено применение комбинаторных чисел B_k^n и A_k^n при последовательном анализе нестационарного потока, состоящего из объектов двух типов. В данной работе комбинаторные числа применяются при рассмотрении других статистически неоднородных (в частности нестационарных) задач.

1. В схеме последовательных независимых испытаний Бернулли отбросим условие стационарности. Пусть проводится n испытаний, при каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p_i, $i = \overline{1, n}$, зависящей от номера испытания. Тогда, опираясь непосредственно на теоремы умножения и сложения, для вероятностей того, что в серии из n испытаний событие A произойдет m раз, получим следующие выражения:

$$P_n(m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m} P_{i_1} \ldots P_{i_m} (1 - P_{i_{m+1}}) \ldots (1 - P_{i_n}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_k^{m+k} B_{n-m-k}^n, \quad m = \overline{0, n}, \tag{2}$$

где в среднем звене суммирование осуществляется по всем сочетаниям из n первых натуральных чисел по m; $C_k^{m+k} = \frac{(m+k)!}{m!\,k!}$ — биномиальные коэффициенты, а B_{n-m-k}^n — комбинаторные числа первого рода, построенные на базе $\{p_i\}_{i=j}^{\infty}$

Выражение этого распределения в форме (2) относительно громоздко. Нетрудно рассчитать, что

$$P_n(m) = \overline{\Pi}_n \overline{B}_m^n, \quad m = \overline{0, n}, \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{3}$$

где $\overline{\Pi}_n = p_1 p_2 \ldots p_n$, $\overline{B}_m^n$ — комбинаторные числа первого рода, построенные на базе $\left\{\frac{1 - p_i}{p_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$. Если комбинаторные числа строить из элементов, обратных предыдущим, т. е. в качестве базы взять последовательность $\left\{\frac{p_i}{1 - p_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ и соответственно в произведении $\overline{\Pi}_n$ заменить каждый сомножитель p_i на вероятность противоположного события, то получается то же распределение (3) только с обратным порядком расположения вероятностей по отношению к значениям m. Распределение (3) следует считать обобщением биномиального, получающегося в частном случае $p_i = p$, $i = \overline{1, n}$.

Мы рассмотрели обобщение схемы Бернулли. Более детализированное распределение связано с заданием меры на булевой алгебре подмножеств конечного множества. Пусть E_i, $i = \overline{0, n-1}$ — события, которые назовем элементарными. Считаем, что они в рассматриваемых условиях способны реализоваться независимо друг от друга с вероятностями соответственно p_i, $i = \overline{0, n-1}$. Пусть $\alpha_i = \frac{p_i}{1 - p_i}$, $i = \overline{0, n-1}$. Возможные результаты единичного испытания в этих условиях составят полную группу B_n, содержащую 2^n несовместимых событий со следующим распределением вероятностей на ней:

$$P(\Lambda) = \frac{1}{\Pi'_n}, \qquad P(E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots E_{i_k}) = \frac{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k}}{\Pi'_n}, \quad k = \overline{1, n},$$

где Λ — событие, заключающееся в непроисхождении ни одного из E_i, $i = \overline{0, n-1}$; $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}$ — событие, заключающееся в совместной реализации указанных k элементарных событий при непроисхождении $n-k$ остальных,

$$\Pi'_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - p_i)^{-1}.$$

Пусть на множестве B_n задана функция $f(X)$, $X \in B_n$. Условные средние значения этой функции при условии, что реализовались k элементарных событий, из n возможных, будут

$$\Phi_n(0) = \frac{f(\Lambda)}{B_n^n}, \qquad \Phi_n(k) = \frac{1}{B_{n-k}^n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_k} f(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_k}),$$

$$k = \overline{1, n},$$

где комбинаторные числа B_k^n строятся на базе $\{\alpha_r\}_{r=0}^{n-1}$ и суммы берутся по всем произведениям, без повторения сомножителей, по k элементов из n базовых.

Общее безусловное среднее значение $f(X)$ на B_n будет

$$F_n(0, 1, \ldots, n-1) = \bar{F}_n = \frac{1}{\Pi'_n} \sum_{k=0}^{n} B_{n-k}^n \Phi_n(k)$$

или

$$F_n \Pi'_n = f(\Lambda) + \sum_{i_1} \alpha_{i_1} f(E_{i_1}) + \sum_{i_1, i_2} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} f(E_{i_1} E_{i_2}) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} f(E_0 E_1 \ldots E_{n-1}). \tag{4}$$

Выражение (4) подчиняется обращению, рассмотренному в [3], являющемуся реализацией комбинаторной теоремы включения и исключения. Поэтому, наоборот, частное значение $f(X)$ представится через ее средние значения на подалгебрах из B_n

$$\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} f(E_0 E_1 \ldots E_{n-1}) = F_n(0, 1, \ldots, n-1) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \alpha_i) - \sum_{k_0 \ldots k_{n-2}} F_{n-1}(k_0, k_1, \ldots, k_{n-2}) \prod_{i=0}^{n-2} (1 + \alpha_{k_i}) + \ldots +$$

$$+(-1)^r \sim \sum_{k_0,\ldots,k_{n-r-1}} F_{n-r}(k_0, k_1, \ldots, k_{n-r-1}) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{n-r-1} (1+\alpha_{k_i}) + \ldots + (-1)^n F_0 \Pi_0,$$

где суммирование осуществляется по всем возможным сочетаниям из элементов с номерами 0, 1, 2, ..., $n-1$ по n, $n-1$, ..., 1, 0, причем $F_0 \Pi_0 = f(\Lambda)$.

Целесообразно выделить частный случай, когда $f(X)$ зависит не от индивидуальных свойств элементарных событий E_k, входящих в произведение X, а только от их числа (например, одинаковые события, генерируемые независимо друг от друга), тогда

$$\Phi_n(k) = f(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_k}) = f(k), \quad k = \overline{0, n}.$$

В этом случае тождество (4) запишется так:

$$F_n \Pi'_n = \sum_{k=0}^{n} B^n_{n-k} f(k).$$

Поделив его почленно на $B^n_0 = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ и обозначив $\widetilde{\Pi}_n = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}\right) = \frac{\Pi'_n}{B^n_0}$; $\widetilde{B}^n_k$, $\widetilde{A}^n_k$—комбинаторные числа, построенные из элементов $\frac{1}{\alpha_k}$, $k = \overline{0, n-1}$, имеем

$$F_n \widetilde{\Pi}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{B}^n_k f(k).$$

Обращение последнего выражения дает

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \widetilde{A}^n_k F_k \widetilde{\Pi}_k,$$

где F_k, $\widetilde{\Pi}_k$ имеют тот же смысл, что и F_n, $\widetilde{\Pi}_n$, но строятся не из n, а из k первых элементов базы.

2. На основе комбинаторного определения [1] чисел B^n_k, A^n_k и S^n_k через элементы базы можно выразить соответственно в B, A и S-форме распределение любой дискретной случайной величины с конечным множеством возможных числовых значений.

Пусть дано распределение $\{p_k\}^n_{k=0}$. Эти вероятности представимы в B-форме, т. е. через комбинаторные числа первого рода следующим образом: $p_k = B_k^n \Pi_n^{-1}$, $k=\overline{0,n}$. Здесь базовыми элементами для построения B_k^n являются корни $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1}$ алгебраического уравнения

$$\alpha^n - \frac{p_{n-1}}{p_n}\alpha^{n-1} + \frac{p_{n-2}}{p_n}\alpha^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{p_0}{p_n} = 0 \text{ и}$$

$$\Pi_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1+\alpha_k) = \frac{1}{p_n}.$$

Соответственно выражение в A-форме имеет вид $p_k = A_k^n \sigma_n^{-1}$, $k=\overline{0,n}$, где $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} A_k^n$ и базовыми элементами для построения A_k^n являются корни $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1}$ системы уравнений

$$\begin{gathered}
\alpha_0^n = \frac{p_0}{p_n}, \\
\alpha_0^{n-1} + \alpha_0^{n-2}\alpha_1 + \ldots + \alpha_0\alpha_1^{n-2} + \alpha_1^{n-1} = \frac{p_1}{p_n}, \qquad (5) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_n}.
\end{gathered}$$

Система (5) иначе может быть записана так: $A_k^n = \frac{p_k}{p_n}$, $k=\overline{0,n-1}$.

Наконец S-форма выражения распределения имеет вид $p_k = S_k^n S_n^{-1}$, $k=\overline{0,n}$, где $S_n = \sum_{k=0}^{n} S_k^n$ и базовыми элементами для построения чисел S_k^n являются корни системы $S_k^n = \frac{p_k}{p_n}$, $k=\overline{0,n-1}$. Чтобы представить эту систему в развернутом виде, достаточно иметь в виду, что каждое S_k^n, $k=\overline{0,n-1}$ есть сумма всех возможных произведений из n первых базовых элементов по $n-k$, причем $k+1$ элементов с меньшими номерами как сомножители способны повторяться и каждое произведение входит в сумму с коэффициентом 2^ν, где ν — число различных элементов из $k+1$ имеющих меньшие номера и входящих в данное произведение.

Выразить распределение в B, A или S-форме — это значит приписать ему определенную внутреннюю структуру. Эта комбинаторная структура не всегда будет приписываться формально, она может быть связана с историей (механизмом) возникновения изучаемого распределения. Известно, что: B_k^n — сумма всех возможных произведений по $n-k$ элементов, берущихся без повторений из n первых в базовой последовательности; A_k^n — сумма всех возможных произведений по $n-k$ элементов, берущихся с повторениями из $k+1$ первых в базовой последовательности. Таким образом, числа B_k^n непосредственно связаны с рассмотрением всех возможных вариантов бесповторной выборки объема $n-k$ из исходной совокупности n элементов, а числа A_k^n аналогично связаны с рассмотрением всех возможных вариантов выборки с возвращением объема $n-k$ из совокупности $k+1$ элементов. Участие таких выборок весьма распространено при возникновении различных вероятностных ситуаций. B, A, S-формы выражения конечных распределений могут использоваться при моделировании решений различных линейных уравнений (дифференциальных, интегральных и т. д.) и при моделировании некоторых случайных процессов. Примеры такого моделирования приведены в работах [4, 5].

Рассмотрим дискретное распределение со счетным множеством состояний $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$. Одной из возможных форм выражения его через комбинаторные числа является следующая: $p_0 = B_0^{-1}$, $p_k = B_0^k B_0^{-1} = \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}B_0^{-1}$, $k=\overline{1,\infty}$, где $B_0 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B_0^k = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}$. В этом представлении базовые элементы через вероятности выражаются также однозначно: $\alpha_k = \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$, $k=\overline{0,\infty}$.

Нетрудно видеть, что аналогичное употребление чисел A_0^k пригодно только для выражения геометрических распределений $p_k = A_0^k A_0^{-1} = \alpha_0^k A_0^{-1}$, $k=\overline{0,\infty}$, где $A_0 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_0^k = \dfrac{1}{1-\alpha_0}$, $0<\alpha_0<1$. Более общие представления $p_k = B_m^k B_m^{-1}$, $k=\overline{m,\infty}$ и $p_k = A_m^k A_m^{-1}$, $k=\overline{m,\infty}$, $m=\overline{0,\infty}$ будут описаны в другой работе.

К моментам конечных и счетных дискретных распределений, выраженных в B, A и S-формах, непосредственно применимы следующие преобразования сумм. Если

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(k), \quad n=\overline{0,\infty}, \tag{6а}$$

то

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} A_k^n \varphi(k), \quad n=\overline{0,\infty}, \tag{6б}$$

и, наоборот, из (6б) следует (6а).

Если

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} S_k^n f(k), \quad n=\overline{0,\infty}, \tag{7а}$$

то

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S_k^n \varphi(k), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{7б}$$

и, наоборот, из (7б) следует (7а).

Если

$$\varphi(m) = \sum_{k=m}^{\infty} B_m^k f(k), \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{8а}$$

то

$$f(m) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{k-m} A_m^k \varphi(k), \; m = \overline{0, \infty}, \tag{8б}$$

и, наоборот, из (8б) следует (8а); все это при условии, что рассматриваемые ряды абсолютно сходятся.

Если

$$\varphi(m) = \sum_{k=m}^{\infty} S_m^k f(k), \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{9а}$$

то

$$f(m) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{k-m} S_m^k \varphi(k), \quad m = \overline{0, \infty}, \tag{9б}$$

и, наоборот, из (9б) следует (9а); все это при условии, что рассматриваемые ряды абсолютно сходятся.

Кроме того, для любой случайной величины X, если только все участвующие моменты существуют, выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \frac{M(X-A)^n}{(B-A)^n} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{M(X-B)^k}{(B-A)^k}, \\ \frac{M(X-B)^n}{(A-B)^n} = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \frac{M(X-A)^k}{(A-B)^k}, \quad n = \overline{0, \infty}, \end{gathered} \tag{10}$$

где A и B — разные начала моментов и $C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Очевидно, что (10) есть частный случай преобразований сумм вида (6а) и (6б), когда базовые элементы все являются действительными единицами.

3. Выражение с нормированными коэффициентами

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{x+\alpha_k}{1+\alpha_k} = \Pi_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} B_k^n x^k, \quad n = \overline{1, \infty}, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{11}$$

где $\Pi_n = \sum_{k=0}^{n} B_k^n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha_k)$, является производящей функцией B-формы распределения (B-распределения).

Композиция любого конечного числа таких B-распределений тоже является B-распределением. Действительно, произведение производящих функций типа (11) дает производящую функцию того же типа. Даны

$$\prod_{k=0}^{n_i-1} \frac{x + \alpha_k^{(i)}}{1 + \alpha_k^{(i)}} = \Pi_{n_i}^{-1} \sum_{k=0}^{n_i} B_k^{n_i} x^k, \quad i = \overline{1, r},$$

тогда

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{x + \alpha_k}{1 + \alpha_k} = \Pi_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} B_k^n x^k, \tag{12}$$

где $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ и коэффициенты B_k^n построены на базе $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n-1}$, содержащей все элементы исходных баз $\{\alpha_k^{(i)}\}_{k=0}^{n_i-1}$, $i = \overline{1, r}$, причем порядок нумерации базовых элементов при построении B-формы значения не имеет.

Обратная задача декомпозиции (факторизации), если исходить только из выражения (12), не является однозначной. Декомпозиция становится однозначной и очевидной, если дополнительно указано разбиение множества из n базовых элементов на r, $r \leqslant n$ подмножеств в предположении, что каждое из этих подмножеств является базой для построения самостоятельного B-распределения.

Считаем, что $\alpha_k \neq 1$, $k = \overline{0, n}$, полагаем в (1) $x = 1$, получаем $\sum_{k=0}^{\infty} A_n^{k+n} = \prod_{k=0}^{n} (1 - \alpha_k)^{-1} = A_n$. Известно, что при $0 < \alpha_0 < 1$, $|\alpha_0 x| < 1$, выражение $\frac{1 - \alpha_0}{1 - \alpha_0 x} = (1 - \alpha_0) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0^k x^k = (1 - \alpha_0) \sum_{k=0}^{\infty} A_0^k x^k$ является производящей функцией геометрического распределения. Из (1) очевидно, что выражение

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{1 - \alpha_k}{1 - \alpha_k x} = A_n^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{k+n} x^k, \; n = \overline{1, \infty}, \; 0 < \alpha_k < 1,$$

$$|x| < \frac{1}{\alpha_k}, \quad k = \overline{0, n} \tag{13}$$

является производящей функцией композиции $n + 1$ геометрических распределений.

Пусть полиномы $P_n(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_{n-1})$, $Q_m(x) = (x - \beta_0) \ldots (x - \beta_{m-1})$ имеют действительные корни: $\alpha_k < 0$, $k = \overline{0, n-1}$; $\beta_i > 1$, $i = \overline{0, m-1}$. Тогда с учетом (11) и (13), с точностью до очевидного нормирующего множителя, дробную рациональную функцию $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можно интерпретировать как производящую функцию композиции $(n+1)$-членного обобщенного распределения Бернулли и m геометрических распределений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Платонов М. Л. О числах комбинаторной структуры.— Сиб. матем. журнал. 1964, 5, № 6, 1317—1325.

2. Платонов М. Л. Применение комбинаторных чисел в последовательном анализе.— Материалы 6-й межвузовской ф.-м. научной конференции Дальнего Востока, т. 2, Хабаровск, 1967.

3. Baker H. F. On Eulers Ф-Functions.— Proceedings of the London. Math. Society, 21, 1891.

4. Платонов М. Л. О двух формах выражения распределений.— Труды IV конференции по автоматическому контролю и методам электрических измерений (Новосибирск, 1962), т. II, 1964, 32—40.

5. Платонов М. Л. О числах комбинаторной структуры.— Труды Иркутского гос. ун-та, сер. матем. т. 26. Иркутск, 1968, 253—263.

M. L. Platonov

ELEMENTARY APPLICATIONS OF COMBINATORIAL NUMBERS IN PROBABILITY THEORY

Summary

A series of independent tests under unstationary conditions which led to a generalized Bernulli's distribution is considered. The expression of discrete distribution is given in three form by means of combinatorial numbers, each form being related to a certain interpretation of the origination of distribution. Generating functions of the compositions of both generalized Bernulli's and geometrical distributions are discribed. A probability interpretation of fractional rational function under certain conditions set on its root and poles is presented.

Поступила в редколлегию 26.IV 1973.