У. РАМЕТОВ, асп.
Киевский университет

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ

Пусть $\xi(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс, $\mathbf{M}\xi(t) = 0$,

$$\xi(t) = \int e^{i\lambda t} dZ(\lambda), \qquad R_{\xi}(\tau) = \int e^{i\lambda\tau} dF_{\xi}(\lambda)$$

спектральные представления процесса и его корреляционной функции.

Пусть $\eta(t)$ — монотонный однородный процесс с независимыми приращениями. Тогда

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda\eta(t)\} = \exp\left\{i\lambda\gamma t + t\int_0^{\infty}(e^{i\lambda x} - 1)\Pi(dx)\right\},$$

где γ — вещественное число, а Π — мера на полупрямой $[0, \infty)$.

Обозначим $\zeta(t) = \xi(\eta(t))$. Если $\eta(t)$ не зависит от $\xi(t)$, то

$$\zeta(t) = \int e^{i\lambda\eta(t)} dZ(\lambda)$$

и

$$\mathbf{M}\zeta(t) = 0, \quad R_{\zeta}(t, s) = \mathbf{M}\zeta(t)\overline{\zeta(s)} = \mathbf{M}\iint e^{i\lambda\eta(t)} dZ(\lambda)\,\overline{e^{i\mu\eta(s)} dZ(\mu)}.$$

Предположим, что процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы, тогда независимы $Z(\lambda)$ и $\eta(t)$. Поэтому

$$R_{\zeta}(t, s) = \int \mathbf{M}e^{i\lambda(\eta(t) - \eta(s))} dF_{\xi}(\lambda) =$$

$$= \int \exp\left\{i\lambda\gamma(t - s) + (t - s)\int_0^{\infty}(e^{i\lambda x} - 1)\Pi(dx)\right\} dF_{\xi}(\lambda), \quad t \geqslant s,$$

$$\mathbf{M}e^{i\lambda(\eta(t) - \eta(s))} = \mathbf{M}\overline{e^{-i\lambda(\eta(t) - \eta(s))}}\,^{*)},$$

$$\mathbf{M}e^{i\lambda(\eta(s) - \eta(t))} = \exp\left\{i\lambda\gamma(s - t) - (s - t)\int_0^{\infty}(e^{-i\lambda x} - 1)\Pi(dx)\right\}, \quad t < s.$$

---

*) Черта обозначает переход к комплексно-сопряженной величине.

Таким образом,

$$R_\zeta(t,s)=\begin{cases}\int \exp\left\{i\lambda\gamma(t-s)+(t-s)\int\limits_0^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi(dx)\right\}dF_\xi(\lambda), & t\geqslant s\\ \int \exp\left\{i\lambda\gamma(s-t)-(s-t)\int\limits_0^\infty (e^{-i\lambda x}-1)\,\Pi(dx)\right\}dF_\xi(\lambda), & t<s.\end{cases}$$

Обозначив $R_\zeta(\tau)=R_\zeta(\tau,0)$, получим

$$R_\zeta(\tau)=\begin{cases}\int \exp\left\{i\lambda\gamma\tau+\tau\int\limits_0^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi(dx)\right\}dF_\xi(\lambda), & \tau\geqslant 0\\ \int \exp\left\{i\lambda\gamma\tau+\tau\int\limits_{-\infty}^0 (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi(-dx)\right\}dF_\xi(\lambda), & \tau<0.\end{cases}$$

(Выполняется $R_\zeta(-\tau)=\overline{R_\zeta(\tau)}$). Можем записать одной формулой

$$R_\zeta(\tau)=\int \exp\left\{i\lambda\gamma\tau+\tau\int\limits_{-\infty}^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi_\tau(dx)\right\}dF_\xi(\lambda),$$

где мера $\Pi_\tau(dx)$ на $(-\infty,\infty)$ определяется соотношениями

$$\Pi_\tau(dx)=\begin{cases}\Pi(dx)\,\chi_{[0,\infty)}(x) & \text{при } \tau\geqslant 0\\ \Pi(-dx)\,\chi_{(-\infty,0)}(x) & \text{при } \tau<0.\end{cases}$$

Отметим, что

$$R_\zeta(\tau)=\int \mathbf{M}e^{i\lambda\eta(\tau)}dF_\xi(\lambda),\quad \tau\geqslant 0,$$

$$R_\zeta(\tau)=\int \exp\left\{i\lambda\gamma\tau-\tau\int\limits_0^\infty (e^{-i\lambda x}-1)\,\Pi(dx)\right\}dF_\xi(\lambda)=$$

$$=\overline{\int \exp\left\{i\lambda\gamma(-\tau)+(-\tau)\int\limits_0^\infty (e^{i\lambda x}-1)\,\Pi(dx)\right\}dF_\xi(\lambda)}=$$

$$=\int \overline{\mathbf{M}e^{i\lambda\eta(-\tau)}dF}_\xi(\lambda),\quad \tau<0. \tag{1}$$

Итак,

$$R_\zeta(\tau)=\begin{cases}\int \mathbf{M}e^{i\lambda\eta(\tau)}dF_\xi(\lambda), & \tau\geqslant 0\\ \int \overline{\mathbf{M}e^{i\lambda\eta(-\tau)}dF}_\xi(\lambda), & \tau<0\end{cases}=\begin{cases}\int R_\xi(z)\,d\Phi_\tau(z), & \tau\geqslant 0\\ \int \overline{R_\xi(z)}\,d\Phi_{-\tau}(z), & \tau<0\end{cases}.$$

Здесь $\Phi_\tau(z)=P\{\eta(\tau)<z\}$.

Предложение. Если $\xi(t)$ — измеримый, стационарный в широком смысле процесс $\zeta(t)=\xi(\eta(t))$ также будет стационарным в широком смысле процессом с корреляционной функцией, определяемой соотношением (1) или в другой форме

$$R_\zeta(\tau) = \int R_\xi(z)\,\Phi_{|\tau|}(dz) \quad (R_\zeta(-\tau) = \overline{R_\zeta(\tau)}).$$

Если $\xi(t)$ — вещественнозначный процесс, то при всех $\tau \in (-\infty, \infty)$

$$R_\zeta(\tau) = \int R_\xi(z)\,\Phi_{|\tau|}(dz).$$

Найдем спектральную функцию процесса $\zeta(t)$. По обычной формуле обращения при $\mu_1 < \mu_2$

$$F_\zeta(\mu_2) - F_\zeta(\mu_1) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\tau\mu_1} - e^{\ i\tau\mu_2}}{i\tau} R_\zeta(\tau)\,d\tau =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\tau\mu_1} - e^{-i\tau\mu_2}}{i\tau} \int \exp\left\{i\lambda\gamma\tau + \tau \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\,\Pi_\tau(dx)\right\} \times$$

$$\times\, dF_\xi(\lambda)\,d\tau.$$

Введем обозначения

$$K_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\,\Pi_\tau(dx), \qquad K(\lambda) = \int_{0}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\,\Pi(dx).$$

Очевидно

$$\operatorname{Re} K(\lambda) = \int_0^\infty (\cos\lambda x - 1)\,\Pi(dx) = \operatorname{Re} K(-\lambda) \leqslant 0,$$

$$\operatorname{Re} K_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos\lambda x - 1)\,\Pi_\tau(dx) =$$

$$= \begin{cases} \int_0^\infty (\cos\lambda x - 1)\,\Pi(dx), & \tau \geqslant 0 \\ \int_{-\infty}^{0} (\cos\lambda x - 1)\,\Pi(-dx), & \tau < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \int_0^\infty (\cos\lambda x - 1)\,\Pi(dx), & \tau \geqslant 0 \\ -\int_0^\infty (\cos\lambda x - 1)\,\Pi(dx), & \tau < 0 \end{cases} = -\operatorname{Re} K_{-\tau}(\lambda).$$

Таким образом, $\operatorname{Re} K_\tau(\lambda)$ — нечетная функция τ.

Отметим, что $\operatorname{Re} K_{|\tau|}(\lambda)$ не зависит от τ и

$$\operatorname{Re} K_{|\tau|}(\lambda) = \int_0^\infty (\cos \lambda x - 1)\, \Pi(dx) = \operatorname{Re} K(\lambda).$$

Обозначим через Λ множество нулей функций $\operatorname{Re} K(\lambda)$. Так как $\exp\{i\lambda\gamma t + tK(\lambda)\}$ есть характеристическая функция, то множество Λ не имеет предельных точек, за исключением случая $\operatorname{Re} K(\lambda) \equiv 0$.

Пусть $\operatorname{Re} K(\lambda) \not\equiv 0$. Тогда $\Lambda = \{\lambda_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$ не более чем счетное множество. Более того, если существует корень $\lambda' \neq 0$ уравнения $\operatorname{Re} K(\lambda) = 0$, то найдется такое λ_0, что все λ_k имеют вид $n_k \lambda_0$, где n_k — целые числа,. что означает, что $\eta(1)$ — решетчатая случайная величина.

Итак, пусть λ_k — корни уравнения $\operatorname{Re} K(\lambda) = 0$. Тогда при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{\lambda_0}{2}\right)$ будет выполняться

$$\operatorname{Re} K(\lambda) < 0 \text{ при } \lambda \overline{\in} \bigcup_k (\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k + \varepsilon),$$

т. е. вне ε — окрестностей точек λ_k вещественная часть $K(\lambda)$ строго отрицательна. Отметим

$$\Pi_{-\tau}(dx) = \begin{cases} \Pi(-dx)\, \chi_{(-\infty,0)}(x), & \tau > 0 \\ \Pi(dx)\, \chi_{[0,\infty)}(x), & \tau \leqslant 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \Pi(d(-x))\, \chi_{[0,\infty)}(-x), & \tau \geqslant 0 \\ \Pi(d(-x))\, \chi_{(-\infty,0)}(-x), & \tau < 0 \end{cases} = \Pi_\tau(-dx).$$

Поэтому

$$\exp\{-\tau K_{-\tau}(\lambda)\} = \exp\left\{-\tau \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\, \Pi_{-\tau}(dx)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\tau \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1)\, \Pi_\tau(-dx)\right\} = \exp\left\{\tau \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\lambda x} - 1)\, \Pi_\tau(dx)\right\} =$$

$$= \exp\{\tau \overline{K_\tau(\lambda)}\}.$$

Значит, $-K_{-\tau}(\lambda) = \overline{K_\tau(\lambda)}$. Отсюда следует

$$\operatorname{Re} K_{-\tau}(\lambda) + i \operatorname{Im} K_{-\tau}(\lambda) = -\operatorname{Re} K_\tau(\lambda) + i \operatorname{Im} K_\tau(\lambda).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} K_{-\tau}(\lambda) = \operatorname{Im} K_\tau(\lambda),$$

т. е. мнимая часть $K_\tau(\lambda)$ есть четная функция от τ.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\tau\mu_1} - e^{-i\tau\mu_2}}{i\tau} \exp\{i\lambda\gamma\tau + \tau K_\tau(\lambda)\}\, d\tau =$$

$$= \int_{-c}^{c} \frac{e^{-i\tau\mu_1} - e^{-i\tau\mu_2}}{i\tau} \exp\{i\lambda\gamma\tau + \tau \operatorname{Re} K_\tau(\lambda) + i\tau \operatorname{Im} K_\tau(\lambda)\}\, d\tau =$$

$$= \int_{-c}^{c} \frac{\exp\{i\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_1 + \lambda\gamma)\} - \exp\{i\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_2 + \lambda\gamma)\}}{i\tau} \times$$

$$\times \exp\{\tau \operatorname{Re} K_\tau(\lambda)\}\, d\tau = \int_{-c}^{c} \frac{\cos\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_1 + \lambda\gamma) - \cos\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_2 + \lambda\gamma)}{i\tau} \times$$

$$\times \exp\{\tau \operatorname{Re} K^\tau(\lambda)\}\, d\tau + \int_{-c}^{c} \frac{\sin\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_1 + \lambda\gamma) - \sin\tau(\operatorname{Im} K_\tau(\lambda) - \mu_2 + \lambda\gamma)}{\tau} \times$$

$$\times \exp\{\tau \operatorname{Re} K_\tau(\lambda)\}\, d\tau.$$

Первый интеграл с косинусами равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Следовательно, рассматриваемый интеграл

$$I = 2\int_{-0}^{c} \frac{\sin\tau(\operatorname{Im} K(\lambda) - \mu_1 + \lambda\gamma) - \sin\tau(\operatorname{Im} K(\lambda) - \mu_2 + \lambda\gamma)}{\tau} e^{\tau \operatorname{Re} K(\lambda)}\, d\tau.$$

Будем использовать соотношения

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin mx}{x} e^{-ax} dx = \operatorname{arctg} \frac{m}{a}, \quad a > 0$$

и

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Если $\operatorname{Re} K(\lambda_k) = 0$, то и $\operatorname{Im} K(\lambda_k) = 0$. Поэтому в точках λ_k получим

$$I(\lambda_k) = 2\int_{0}^{c} \frac{\sin\tau(\lambda_k\gamma - \mu_1) - \sin\tau(\lambda_k\gamma - \mu_2)}{\tau}\, d\tau.$$

В остальных точках

$$I(\lambda) = 2\int_0^c \frac{\sin\tau\,(\operatorname{Im} K(\lambda) - \mu_1 + \lambda\gamma) - \sin\tau\,(\operatorname{Im} K(\lambda) - \mu_2 + \lambda\gamma)}{\tau} e^{\tau \operatorname{Re} K(\lambda)} d\tau \to$$

$$\to 2\left[\operatorname{arctg}\frac{\mu_1 - \lambda\gamma - \operatorname{Im} K(\lambda)}{\operatorname{Re} K(\lambda)} - \operatorname{arctg}\frac{\mu_2 - \lambda\gamma - \operatorname{Im} K(\lambda)}{\operatorname{Re} K(\lambda)}\right].$$

Можем записать

$$F_\zeta(\mu_2) - F_\zeta(\mu_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda)\, dF_\xi(\lambda) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{\bigcup_k [\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k + \varepsilon]} I(\lambda)\, dF_\xi(\lambda) + \int\limits_{\overline{\bigcap_k [\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k + \varepsilon]}} I(\lambda)\, dF_\xi(\lambda)\right].$$

Формула $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bigcup_k [\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k + \varepsilon]} I(\lambda)\, dF_\xi(\lambda)$ есть обычная формула обращения для функции $F^{(1)}_{\zeta,\varepsilon}(\mu)$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\bigcup_k [\lambda_k - \varepsilon, \lambda_k + \varepsilon]} I(\lambda)\, dF_\xi(\lambda) = F^{(1)}_\zeta(\mu_2) - F^{(1)}_\zeta(\mu_1),$$

где $F^{(1)}_\zeta(\mu)$ — постоянна везде, за исключением, быть может, точек λ_k, в которых она имеет скачки величины

$$F_\xi\left(\frac{\lambda_k}{\gamma} + 0\right) - F_\xi\left(\frac{\lambda_k}{\gamma} - 0\right).$$

Обозначим

$$F^{(2)}_\zeta(\mu) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\overline{\Lambda} = \{\lambda \neq \lambda_k\}} \operatorname{arctg}\frac{\mu - \lambda\gamma - \operatorname{Im} K(\lambda)}{\operatorname{Re} K(\lambda)}\, dF_\xi(\lambda).$$

Тогда

$$F_\zeta(\mu) = F^{(1)}_\zeta(\mu) + F^{(2)}_\zeta(\mu).$$

Пример. Когда $K(\lambda) = e^{i\lambda} - 1$, т. е. $\eta(t)$ — простой пуассоновский процесс с параметром 1,

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda(\eta(t) - \eta(s))\} = \exp\left\{(t-s)\int (e^{i\lambda x} - 1)\,\Pi(dx)\right\},$$

где мера Π сосредоточена в точке $x = 1$. Если $\Pi(\{1\}) = 1$, то

$$\mathbf{M}\exp\{i\lambda(\eta(t) - \eta(s))\} = \exp\{(t-s)(e^{i\lambda} - 1)\},$$

$$\operatorname{Re} K(\lambda) = \cos\lambda - 1, \quad \lambda_k = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

В этом случае

$$F_{\zeta}(\mu) = \sum_{2k\pi<\mu} [F_{\xi}(2k\pi + 0) - F_{\xi}(2k\pi - 0)] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\overline{\Lambda}=\{\lambda \neq 2k\pi\}} \operatorname{arctg} \frac{\mu - \sin\lambda}{\cos\lambda - 1} \, dF_{\xi}(\lambda).$$

U. Rametov

TRANSFORMATION OF STATIONARY PROCESSES BY A RANDOM TIME CHANGE

Summary

In this paper the spectral function of the process $\zeta(t) = \xi(\eta(t))$ is obtained, where $\xi(t)$ is stationary process and $\eta(t)$ is homogeneous with independent increments process.

Поступила в редколлегию 6.VI 1973.