Л. В. РОЗОВСКИЙ, мл. научн. сотр.
ВНИИТП, Ленинград

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ФУНКЦИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ. I

§ 1. Пусть $t=(t_1, \ldots, t_k)$, $x=(x_1, \ldots, x_k)$ — векторы K-мерного евклидового пространства $\mathfrak{R}_k$. Далее, $|t|$, $|x|$, (t, x) — нормы векторов t и x и их скалярное произведение; $\mathfrak{B}$ — класс всех борелевских множеств пространства $\mathfrak{R}_k$; $\mathfrak{M}$ — класс всех выпуклых борелевских множеств и их дополнений; n — произвольное натуральное число; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — независимые случайные векторы, $\eta_i = (\eta_{i1}, \ldots, \eta_{ik})$; $V_i = M\eta_i^*\eta_i$ — ковариационная матрица вектора η_i (символ * означает транспонирование).

Будем предполагать, что матрица $V=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i$ невырождена, V^{-1} — матрица, обратная V, матрица E_n такова, что $E_n^*E_n=V^{-1}$. Без потери общности будем считать, что $M\eta_i = O$ для всех i.

Введем независимые случайные векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, положив $\xi_i=\eta_i E_n$. Пусть $f_i(t)$ и $P_i(A)$ — соответственно характеристическая и вероятностная функции вектора ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, Θ — случайный вектор из $\mathfrak{R}_k$ с вероятностной функцией $\Theta_n(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i(A)$. Очевидно, что $M\Theta^*\Theta = I_k$ — единичная матрица k-го порядка.

Положим $q_n(A)=\prod_{i=1}^{n} f_i(t/\sqrt{n})$;

$$Q_n(A)=P\left\{\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{\sqrt{n}} \in A\right\}; \ \beta_\nu = M|\Theta|^\nu,$$

$\Phi(A)$ — функция распределения стандартного нормального вектора в $\mathfrak{R}_k$.

Предположим, что для некоторого целого $s \geqslant 2$ выполняются следующие условия:

$$\beta_s < \infty, \tag{1.1}$$

если s четно,

$$\beta_{s-1} < \infty;\ \alpha_s(t) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant T} (x, t)^s \Theta_n(dx) \tag{1.2}$$

существует и конечен для всех t, $|t| = 1$, если s нечетно. Заметим, что в условии (1.2) вместо $\alpha_s(t)$ можно рассматривать

$$\alpha_s^1(t) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{|(t,x)|\leqslant T} (x, t)^s \Theta_n(dx)$$

или

$$\alpha_s''(t) = \lim_{T\to\infty} \underbrace{\int\limits_{-T}^{T} \ldots \int\limits_{-T}^{T}}_{k} (x, t)^s \Theta_n(dx),$$

если

$$\int\limits_{|x|>z} |x|^{s-1} \Theta_n(dx) = o(z^{-1}), \text{ то } \alpha_s(t) \equiv \alpha_s'(t) \equiv \alpha_s''(t).$$

В силу условий (1.1) и (1.2) для $q_n(t)$ (соответственно для $Q_n(A)$) можно выписать асимптотическое разложение до $s-2$-го члена, считая, что $\sum\limits_1^0 \equiv 0$

$$q_n(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^2}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{s-2} n^{-\frac{\nu}{2}} P_\nu(it)\right) + \delta_n(t) = \varphi_{s,n}(t) + \delta_n(t), \tag{1.3}$$

$$Q_n(A) = \Phi(A) + \sum_{\nu=1}^{s-2} n^{-\frac{\nu}{2}} \int\limits_A P_\nu(-\varphi)(x)\,dx + \Delta_n(A) =$$

$$= \Phi_{s,n}(A) + \Delta_n(A), \tag{1.4}$$

причем

$$P_\nu(-\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \int\limits_{\mathfrak{R}_k} e^{-\frac{|t|^2}{2} - i(t,x)} P_\nu(it)\,dt.$$

(По поводу (1.3), (1.4) см. например, [1,2]).

Для любого множества $A \in \mathfrak{B}$ обозначим $\Delta_n^{(s)}(A) = |\Delta_n(A)|$, $\rho(A) = \inf\limits_{x\in A'} |x|$, где

$$A' = \begin{cases} A, & A \bar{\ni} o, \\ A^c, & A \ni o, \end{cases} \qquad A^c = \mathfrak{R}_k \diagdown A.$$

Изучением поведения $\Delta_n^{(s)}(A)$ в зависимости от n и A занимались многие авторы. Так, В. И. Ротарь [4] доказал, что

$$\Delta_n^{(2)}(A) \leqslant C(k) \frac{\beta_3}{\sqrt{n}\,(1 + \rho(A))^3} \text{ для любого } A \in \mathfrak{M}.$$

Из результатов автора [3] следует, что в случае, когда независимые случайные векторы ξ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ имеют одинаковое распределение, а также выполняется условие

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f_1(t)| < 1, \tag{1.5}$$

условие $\beta_s < \infty$ является достаточным для того, чтобы

$$\Delta_n^{(s)}(A) = \frac{\varepsilon(\sqrt{n}(1+\rho(A)))}{n^{\frac{s-2}{2}}(1+\rho(A))^s}, \text{ где } \varepsilon(z) \to 0 \text{ при } z \to \infty.$$

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В частности, мы уточняем и обобщаем вышеприведенные утверждения, а также некоторые одномерные результаты ряда авторов [6—9].

Построение данной работы во многом аналогично работе [3]. В дальнейшем, символы $C(\ldots)$ с индексами или без них означают положительные постоянные, зависящие лишь от указанных в скобках аргументов.

§ 2. Для формулировки основных теорем будут необходимы некоторые обозначения. Положим

$$R_n(z) = \sup_{|t|=1} \int\limits_{|(t,x)|>u} (t, x)^2 \Theta_n(dx),$$

$$\tau(z) = \frac{1}{z^2}\int\limits_0^z u R_n(u)\,du, \quad \tau_n = \min\left(\delta : \tau(\delta) \leqslant \frac{1}{24}\right),$$

$$\nu^* \rightleftharpoons \begin{cases} s, & \text{если } s \text{ нечетно,} \\ s+1, & \text{если } s \text{ четно,} \end{cases}$$

$$T_n(A) = (1+\rho(A))^{-(\nu^*+1)} \min\left(\frac{\tau_n}{\sqrt{n}};\ n^{\frac{(k+1)\nu^*+1}{2}} e^{-n(1-\beta_n)}\right),$$

где $\beta_n = \sup\limits_{|t|>\tau_n^{-1}} n^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^n |f_i(t)|\right)$.

Кроме того, пусть

$$\omega_n(A) = \frac{1}{n^{\frac{\nu^*-3}{2}}(1+\rho(A))^{\nu^*-1}} \int\limits_{|x|>\sqrt{n}(1+\rho(A))} |x|^{\nu^*-1}\Theta_n(dx) +$$

$$+ \frac{1}{n^{\frac{\nu^*-1}{2}}(1+\rho(A))^{\nu^*+1}} \int\limits_{|x|\leqslant\sqrt{n}(1+\rho(A))} |x|^{\nu^*+1}\Theta_n(dx),$$

$$\Psi_n^{(s)}(A) = \omega_n(A) + \sup_{|t|=1}\left|\int\limits_{|x|<\sqrt{n}(1+\rho(A))}(t, x)^s\Theta_n(dx)\right|\frac{n^{-\frac{s-2}{2}}}{(1+\rho(A))^s},$$

если s нечетно, и

$$\Psi_n^{(s)}(A) = \omega_n(A) + \frac{n^{-\frac{s-1}{2}}}{(1+\rho(A))^{s+1}}\left(\varepsilon_{s-1}\beta_s^{\frac{s-1}{s-2}} + \right.$$

$$\left. + \sup_{|t|=1}\left|\bar{\gamma}_{s+1}(t) + \int\limits_{|x|\leqslant\sqrt{n}(1+\rho(A))}(t, x)^{s+1}\Theta_n(dx)\right|\right),$$

если s четно.

Здесь $\bar{\gamma}_{s+1}(t) = \gamma_{s+1}(t) - M(t, \Theta)^{s+1}$, $\gamma_{s+1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{s+1,i}(t)$, $\gamma_{s+1,i}(t)$ — формально образованная кумулянта $s+1$-го порядка случайной величины (t, ξ_i);

$$\varepsilon_{s-1} = \begin{cases} 0, & \widetilde{P}_{s-1}(it) = 0, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\widetilde{P}_{s-1}(it) = P_{s-1}(it) - (-i)^{s+1}\frac{\gamma_{s+1}(t)}{(s+1)!},$$

$P_{s-1}(it)$ — формально образованный полином $s-1$-го порядка из асимптотического разложения для $q_n(t)$. Заметим, что $\bar{\gamma}_3 \equiv 0$, $\varepsilon_1 \equiv 0$.

Имеют место следующие результаты.

Теорема 1. В условиях (1.1), (1.2) для любого $A \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство

$$\Delta_n^{(s)}(A) \leqslant C(k, s)(\Psi_n^{(s)}(A) + T_n(A)).$$

Заметим, что при $k = 1$ теорема 1 является уточнением теоремы 1 [7].

Следствие 1. Пусть G — класс неотрицательных функций, определенных на $[0, +\infty)$, таких, что для любой $g \in G$ $g(x)$, $\frac{x}{g(x)}$ не убывают. Тогда

$$\Delta_n^{(2)}(A) \leqslant \frac{C_1(k) M(|\Theta|^2 g(|\Theta|))}{(1+\rho(A))^2 g(\sqrt{n}(1+\rho(A)))}.$$

Этот результат является неравномерным обобщением теоремы 1 [1].

Следствие 2.

$$\Delta_n^{(2)}(A) \leqslant \frac{C_2(k)}{\sqrt{n}(1+\rho(A))^3}\left(\sup_{0<z<\sqrt{n}(1+\rho(A))} zR_n(z) + \varepsilon(\sqrt{n})\right),$$

где $\varepsilon(z) = \sup\limits_{|t|=1}\left|\int\limits_{|x|\leqslant z}(t, x)^3\Theta_n(dx)\right|$.

Близкий результат получен А. Бикялисом [2].

Следствие 3. Пусть $\beta_s < \infty$. Тогда

$$\Delta_n^{(s)}(A \leqslant C(k, s)\left[n^{-\frac{s-2}{2}}(1+\rho(A))^{-s}\int\limits_{|x|>\sqrt{n}(1+\varrho(A))}|x|^s\Theta_n(dx) + \right.$$

$$\left. + n^{-\frac{s-1}{2}}(1+\rho(A))^{-s-1}\int\limits_{|x|\leqslant\sqrt{n}(1+\varrho(A))}|x|^{s+1}\Theta_n(dx) + T_n(A)\right].$$

Пусть

$$\Psi_n^{(s)} = \Psi_n^{(s)}(A)\,|_{\varrho(A)=0},\quad T_n = T_n(A)\,|_{\varrho(A)=0},$$

$$\Delta_n^{(s)} = \sup_{A\in\mathfrak{M}}\Delta_n^{(s)}(A),\quad \gamma_n = n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\Re_k}|x|^2P_i(dx)\right)^2.$$

Следующие утверждения обобщают на многомерный случай результаты автора [8].

Теорема 2. Пусть ε_n — некоторая неотрицательная, стремящаяся к нулю числовая последовательность, такая, что

$$\varepsilon_n \geqslant \frac{\tau_n}{\sqrt{n}}. \tag{2.1}$$

Для выполнения соотношений

$$\Delta_n^{(2)} = O(\varepsilon_n),\quad \gamma_n = O(\varepsilon_n)$$

при $n\to\infty$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\Psi_n^{(2)} = O(\varepsilon_n),\quad n\to\infty.$$

Замечание. Так же, как в [8] (замечание 1) можно показать, что с ростом n в условиях теоремы 2 правая часть (2.1) всегда стремится к нулю.

Следствие 4 (Многомерный аналог теоремы Линдеберга—Феллера). Для того, чтобы

$$\Delta_n^{(2)} \to 0 \tag{2.2}$$

и

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\int\limits_{\Re_k}|x|^2P_i(dx)}{n} \to 0 \tag{2.3}$$

при $n\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$L_n(\varepsilon) = \int\limits_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}}|x|^2\Theta_n(dx)\to 0,\ n\to\infty, \tag{2.4}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что условие (2.4) эквивалентно соотношению

$$\sum_{i=1}^{k} L_n^{(i)}(\varepsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$

где

$$L_n^{(i)}(\varepsilon) = \int\limits_{|x_i| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}} x_i^2 \Theta_n(dx).$$

Отсюда становится очевидным, что для выполнения (2.2), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$

$$\sup_z \Delta_n^{(2)}(x_i < z) \to 0,$$

$$\max_{1 \leqslant l \leqslant n} \frac{M\xi_{l,i}^2}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 3. Пусть β_n, $\frac{\tau_n}{\sqrt{n}} = o(\Psi_n)$, $n \to \infty$, тогда $\Delta_n^{(2)} \asymp \Psi_n^{(2)}$ $(n \to \infty)$.

Остановимся более подробно на случае одинаковых распределений, когда при всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$ $P_i(A) = P_1(A) = \Theta(A)$. Все дальнейшие теоремы имеют место в этих условиях.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (1.5), (1.1), (1.2) и, кроме того, известно, что

$$\int\limits_{|x|>z} |x|^{s-1} \Theta(dx) = o(z^{-1}), \quad z \to \infty, \tag{2.5}$$

и $\beta_{s+1} = \infty$. Тогда

$$\Delta_n^{(s)} \asymp \Psi_n^{(s)} \quad (n \to \infty).$$

Теорема 4 является многомерным аналогом одной теоремы Л. В. Осипова [6].

Обозначим E_1 (соответственно E_2) класс неотрицательных функций $\varepsilon(z)$, убывающих к нулю с ростом z, таких, что $z^\delta \varepsilon(z)$ не убывает (соответственно не возрастает), начиная с некоторого z, для некоторого δ, $0 < \delta < 1$.

Теорема 5. Пусть $\varepsilon(z) \in E_1$. Для того, чтобы

$$\Delta_n^{(2)}(A) = O\left(\frac{\varepsilon(\sqrt{n}(1+\rho(A)))}{(1+\rho(A))^2}\right), \tag{2.6}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{|x|>z} |x|^2 \Theta(dx) = O(\varepsilon(z)), \quad z \to \infty. \tag{2.7}$$

Для выполнения (2.6) с $\varepsilon(z) = z^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы вместе с (2.7) выполнялось соотношение

$$\lim_{z\to\infty}\sup_{|t|=1}\int_{|x|\leqslant z}(t, x)^3\Theta(dx) = O(1), \quad z\to\infty.$$

Несложно убедиться [5, 9], что асимптотическое разложение $\varphi_{s,n}(t)$ для $q_n(t)$ однозначно определяется выражениями $\alpha_p(t)$, где $\alpha_p(t) = M(t, \Theta)^p$, p — целое, $1 \leqslant p \leqslant s-1$; $\alpha_s(t)$ определено в (1.2).

Для каждого p $\alpha_p(t)$ является однородным полиномом p-го порядка переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Пусть $\mu_p(t)$ является так же однородным полиномом p-го порядка относительно $t_1, t_2, \ldots, t_k$ с произвольными вещественными коэффициентами, не зависящими от n, и $\hat\varphi_{s,n}(t)$ построено по $\mu_1(t) \equiv 0$, $\mu_2(t) \equiv |t|^2$, $\mu_3(t), \ldots, \mu_s(t)$ так же, как $\varphi_{s,n}(t)$ построено по $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_s(t)$. Пусть, далее, $\hat\Phi_{s,n}(A)$ соответствует $\hat\varphi_{s,n}(t)$, как $\Phi_{s,n}(A)$ соответствует $\varphi_{s,n}(t)$.

Формулируя дальнейшие утверждения, будем предполагать, что о моментах случайного вектора ξ_1 известно лишь, что $\alpha_1(t) \equiv 0$, $\alpha_2(t) \equiv |t|^2$. Обозначим $\hat\Delta_n^{(s)}(A) = |Q_n(A) - \hat\Phi_{s,n}(A)|$. Следующие теоремы уточняют некоторые результаты А. Бикялиса [9].

Теорема 6. Пусть выполняется условие (1.5), и известно, что $\varepsilon^{(s)}(z) \in E_1$, если s — четно, и $\varepsilon^{(s)}(z) \in E_1 \cap E_2$, если s — нечетно.

I. Для того, чтобы

$$\hat\Delta_n^{(s)}(A) = O\left(\frac{\varepsilon^{(s)}(\sqrt{n}(1+\rho(A)))}{n^{\frac{s-2}{2}}(1+\rho(A))^s}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\beta_s < \infty, \tag{2.8}$$

$$\mu_p(t) \equiv \alpha_p(t) \text{ при всех целых } p \leqslant s, \tag{2.9}$$

$$\int_{|x|>z}|x|^s\Theta(dx) = O(\varepsilon^{(s)}(z)), \quad z\to\infty. \tag{2.10}$$

II. Для того, чтобы

$$\hat\Delta_n^{(s)}(A) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{s-2}{2}}(1+\rho(A))^s}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (1.1), (1.2), (2.9) и, кроме того,

$$\int_{|x|>z}|x|^{s-1}\Theta(dx) = O(z^{-1}), \quad z\to\infty. \tag{2.11}$$

III. Для того, чтобы

$$\hat{\Delta}_n^{(s)}(A) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{s-1}{2}}(1+\rho(A))^{s+1}}\right),$$

необходимо и достаточно выполнения соотношений (2.8), (2.9) и (2.10) при $\varepsilon^{(s)}(z) = z^{-1}$, и, кроме того,

$$\sup_{|t|=1}\left|\int_{|x|\leqslant z}(t, x)^{s+1}\Theta(dx)\right| = O(1), \quad z\to\infty. \tag{2.12}$$

(Очевидно, что при нечетном s (2.12) равносильно $\beta_{s+1} < \infty$).

Теорема 7. Для того, чтобы

$$\hat{\Delta}_n^{(3)}(A) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}(1+\rho(A))^3}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия II при $s = 3$ из теоремы 6, и, кроме того, распределение случайного вектора ξ_1 было нерешетчатым (т. е. $|f_1(t)| \neq 1$ ни при каком конечном t, кроме 0).

Заметим, что путем усложнения формулировок можно получать теоремы, аналогичные теоремам 5—6, для более широких, нежели E_1 и E_2, классов функций $\varepsilon(z)$.

§ 3. Будем считать, что

$$L_n = \int_{|x|>\sqrt{n}} |x|^2\Theta_n(dx) < \frac{1}{6}. \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение вспомогательные случайные векторы $\xi_i^{(n)} = (\xi_{i1}^{(n)}, \ldots, \xi_{ik}^{(n)})$, считая, что

$$P\{\xi_i^{(n)} \in B\} = \frac{P_{i,n}(B)}{P_i(O_n)},$$

где $P_{i,n}(B) = P_i(BO_n)$; $1 \leqslant i \leqslant n$; $O_n = \{x: |x| \leqslant \sqrt{n}\}$; BO_n означает $B \cap O_n$.

Очевидно, что $P_i(O_n) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в силу (3.1).

Рассмотрим независимые случайные векторы $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$, положив $\bar{\xi}_i = \xi_i^{(n)} - M\xi_i^{(n)}$. Через $\bar{f}_i(t)$ и $\bar{P}_i(A)$ обозначим соответственно характеристическую и вероятностные функции вектора $\bar{\xi}_i$ (индекс n опускаем для упрощения записи).

Пусть случайный вектор $\bar{\Theta}$ имеет вероятностную функцию $\bar{\Theta}_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{P}_i(A)$. Обозначим $\bar{Q}(t)$ квадратическую форму, отвечающую $\bar{V} = M\bar{\Theta}*\bar{\Theta}$ $(\bar{Q}(t) = t\bar{V}t^*)$. Положим $\bar{Q}_n(A) = P\left\{\frac{\bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n}{\sqrt{n}} \in A\right\}$;

$\bar{q}_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \bar{f}_i(t/\sqrt{n})$; $\bar{\beta}_p = M|\bar{\Theta}|^p$. Для $\bar{q}_n(t)$ (соответственно для $\bar{Q}_n(A)$) введем асимптотическое разложение до $m-2$-го члена, где m может быть любым положительным целым числом,

$$\bar{q}_n(t) = e^{-\frac{1}{2}\bar{Q}(t)}\left(1 + \sum_{\nu=1}^{m-2} n^{-\frac{\nu}{2}} \bar{P}_\nu(it)\right) + \bar{\delta}_n^{(m)}(t) = \bar{\varphi}_{m,n}(t) + \bar{\delta}_n^{(m)}(t),$$

$$\bar{Q}_n(A) = \int_A \left[\bar{\varphi}(x) + \sum_{\nu=1}^{m-2} n^{-\frac{\nu}{2}} \bar{P}_\nu(-\bar{\varphi})(x)\right] dx + \bar{\Delta}_n^{(m)}(A) =$$

$$= \bar{\Phi}_{m,n}(A) + \bar{\Delta}_n^{(m)}(A).$$

В дальнейшем будут необходимы некоторые неравенства, имеющие место при (3.1):

$$1 - 3L_n \leqslant \frac{\bar{Q}(t)}{|t|^2} \leqslant 1 + 2L_n, \tag{3.2}$$

$$\frac{2}{3} k \leqslant \bar{\beta}_2 \leqslant \frac{6}{5} k, \tag{3.3}$$

$$\frac{\bar{\beta}_{r+l}}{n^{\frac{r+l-2}{2}}} \leqslant \frac{2^{l+1}}{n^{\frac{r-2}{2}}} \bar{\beta}_r \leqslant \frac{2^{r+l+1}}{n^{\frac{r-2}{2}}} \int\limits_{|x| \leqslant \sqrt{n}} |x|^r \Theta_n(dx) \leqslant 2^{r+l+1} k \; (l \geqslant 0,\ r \geqslant 2). \tag{3.4}$$

Для всех целых $\nu \geqslant 1$ имеем

$$|\bar{P}_\nu(-\bar{\varphi})(x)| \leqslant C(k, \nu)(1 + |x|^{3\nu}) e^{-\frac{|x|^2}{4}} \bar{\beta}_{\nu+2}, \tag{3.5}$$

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial t_m^p}\left(e^{-\frac{\bar{Q}(t)}{2}} \bar{P}_\nu(it)\right)\right| \leqslant C(k, p, \nu)\, |t|^{(\nu-p+2)^+} e^{-\frac{|t|^2}{8}} \bar{\beta}_{\nu+2}, \tag{3.6}$$

где $x^+ = \max(0, x)$; $p \geqslant 0$, целое.

Для любого целого $p \geqslant 0$ и $A \in \mathfrak{B}$

$$k^{-p/2} \int_A |x|^p \Theta_n(dx) \leqslant \sup_{|t|=1} \int_A |(t, x)|^p \Theta_n(dx) \leqslant \int_A |x|^p \Theta_n(dx), \tag{3.7}$$

если интеграл справа существует.

Соотношения (3.2)—(3.5) доказываются так же, как аналогичные соотношения § 3 [3]. Оценка (3.6) получена в работе [1] (лемма 18). Доказательство (3.7) очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикялис А. О центральной предельной теореме в $\mathfrak{R}_k$. I. — Лит. матем. сб., II, I, 1971, 27—58.

2. Бикялис А. О центральной предельной теореме в $\mathfrak{R}_k$. II.—Лит. матем. сб., 12, 1, 1972.

3. Розовский Л. В. Асимптотические разложения вероятностных функций сумм независимых случайных векторов I. II.— Лит. матем. сб., 13, I, 1973.

4. Ротарь В. И. О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применение, 15, 4, 1970, 647—665.

5. Бикялис А. О центральной предельной теореме в $\mathfrak{R}_k$. III.—Лит. матем. сб., 12, 3, 1972.

6. Осипов Л. В. Об асимптотических разложениях для распределений сумм независимых случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 16, 2, 1971, 328—338.

7. Пипирас В. Асимптотические разложения для функций распределения сумм независимых случайных величин.— Лит. матем. сб., 10, 3, 1970.

8. Розовский Л. В. О скорости сходимости в теореме Линдеберга — Феллера.— Вестник ЛГУ (в печати).

9. Ибрагимов И. А. Об асимптотических разложениях Чебышева — Крамера.— Теория вероятностей и ее применение, 12, 3, 1967, 506—519.

L. V. Rozovsky

ON ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE PROBABILITY FUNCTIONS OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VECTORS. I

Summary

The remainder in the asymptotic expansion of the probability function $Q_n(A)$ of a sums of independent random vectors is studied. The estimators are nonuniform in general.

Поступила в редколлегию 6.II 1973.