В. Л. ГИРКО, канд. физ.-мат. наук
Киевский университет

СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ. I

В настоящей статье доказываются предельные теоремы общего вида для нормированных спектральных функций случайных матриц. В некоторых случаях обобщены теоремы, доказанные в [1—3].

Пусть $A_n = (\zeta_{ij}^{(n)})$ — симметричная, квадратная, случайная матрица порядка n. Нормированной спектральной функцией матрицы A назовем случайную функцию

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{\lambda_{in} < x} 1,$$

где $\lambda_{1n} \geqslant \lambda_{2n} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{nn}$ — собственные числа матрицы A_n.

Очевидно, что реализациями случайной функции $\mu_n(x)$ будут функции распределения. В дальнейшем случайную функцию будем называть спектральной, если ее реализации являются невырожденными функциями распределения.

Для $\mu_n(x)$ преобразование Стилтьеса равно

$$\int \frac{d\mu_n(x)}{1 + itx} = \frac{1}{n} \operatorname{Sp}(I + itA_n)^{-1} = \eta_n(t).$$

Под обозначением $\zeta_n(x) \Rightarrow \zeta(x)$ будем понимать слабую сходимость конечномерных функций распределения случайных функций $\zeta_n(x)$ к конечномерным распределениям случайной функции $\zeta(x)$.

Теорема 1. Для того чтобы $\mu_n(x) \Rightarrow \mu(x)$ на некотором всюду плотном множестве D ($\mu(x)$ — некоторая спектральная функция), необходимо и достаточно, чтобы $\eta_n(t) \Rightarrow \eta(t)$ и случайная функция $\eta(t)$ была непрерывна в нуле.

Доказательство теоремы 1 следует из теорем Хелл и предельных теорем для функционалов от случайных функций. [4].

Рассмотрим прямоугольные матрицы $A = (\xi_{ij}^{(n)})$, у которых количество строк равно n, а столбцов—m. Причем $n \leqslant m$. Пусть $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция матрицы AA'.

Теорема 2. Если для каждого n вектор-строки матрицы A независимы, функция

$$\sup_n \left[m_n(t) = \frac{1}{n} M \operatorname{Sp}(I + itAA')^{-1} = \int \frac{dF_n(x)}{1 + itx} \right]$$

непрерывна в нуле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} m^2(n)\, n^{-4}$ сходится, то с вероятностью 1 почти $\forall\, x$ $\lim_{n\to\infty} [\mu_n(x) - F_n(x)] = 0$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \operatorname{Sp}(I + itAA')^{-1} - m_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \gamma_k,$$

где

$$\gamma_k = M_{(k-1)} \operatorname{sp}(I + itAA')^{-1} - M_{(k)} \operatorname{sp}(I + itAA')^{-1}, \; k = \overline{1, m}$$

и индекс (k) означает, что математическое ожидание берется только по первым k вектор-столбцам матрицы A.

Тогда

$$M\varepsilon_n^4 \leqslant n^{-4} \sum_{k,e=1}^{n} \sqrt{M\gamma_k^4}\, \sqrt{M\gamma_e^4}.$$

Матрицу AA' можно представить в виде

$$AA' = \sum_{k=1}^{n} K_n^k,$$

где $K_n^k = (\xi_{ik}^{(n)} \xi_{jk}^{(n)})$ — квадратные матрицы n-го порядка.

Далее воспользуемся следующей формулой

$$\delta_n = \operatorname{Sp}(I + itB)^{-1} - \operatorname{Sp}(I + it\widetilde{B}) = t \frac{d}{dt} \ln \det [I + itR_t(\widetilde{B} - B)] =$$

$$= t \frac{d}{dt} \ln [1 + it(R_t \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)],$$

где B и $\widetilde{B}$ — квадратные, симметричные матрицы n-го порядка, такие, что $B - \widetilde{B} = K_n^k$,

$$R_t = (I + itB)^{-1}, \; \vec{\xi}_k = (\xi_{1k}, \ldots, \xi_{nk}).$$

Легко видеть, что

$$|\delta_n|^2 = \left| \frac{it(R_t \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k) + t^2 \left(\frac{B}{(I + itB)^2} \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k \right)}{1 + it(R_t \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)} \right|^2 \leqslant 2.$$

Тогда

$$M\gamma_k^4 = M\,[M_{(k-1)}(R_t - \mathrm{Sp}\,\{I + it\,(AA' - K_n^k)\}^{-1}) -$$

$$- M_{(k)}(R_t - \mathrm{Sp}\,\{I + it\,(AA' - K_n^k)\}^{-1})]^4 \leqslant 64.$$

Здесь

$$R_t = (I + itAA')^{-1}.$$

И так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\left|\frac{\gamma_0 - \gamma_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{r}\right\}$$

сходится для любого целого положительного r, то с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ [5]. Отсюда на основании теоремы 1 и вытекает утверждение теоремы 2.

Очевидно, что теорема 2 верна и в том случае, когда матрицу AA' можно представить в виде

$$AA' = B_n + \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} K_n^k,$$

где случайная симметричная матрица B_n и случайные величины $\xi_k^{(n)}$, $k = \overline{1, m}$ для каждого n независимы и не зависят от матрицы AA'.

Аналогично доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. Если для каждого n вектор-строки матрицы A независимы, функция $m_n(t)$ непрерывна в нуле и $\lim_{n\to\infty} n^{-2}m(n) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ почти для всех x

$$\lim_{n\to\infty} P\,\{|\,\mu_n(x) - F_n(x)\,| < \varepsilon\} = 1.$$

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость $\mu_n(x)$ от матрицы A_n вместо $\mu_n(x)$ будем иногда писать $\mu_n(x, A_n)$.

Теорема 4. Пусть для каждого n вектор-строки матрицы A независимы,

$$p\lim_{n\to\infty}[(R_t^k \vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k) - \frac{1}{n}\,\mathrm{Sp}\,R_t^k] = 0, \qquad (1)$$

где

$$R_t^k = \left[I + it\left(B_n + \sum_{l=1}^{k} \xi_l^{(n)} K_n^l\right)\right]^{-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{m(n)}{n} = c,$$

$\mu_n(x, B_n) \Rightarrow \mu_0(x)$ и случайные величины $\xi_r^{(n)}$, $l = \overline{1, m}$ независимы и одинаково распределены с функциями распределения $F(x)$.

Тогда с вероятностью 1 $\mu_n(x, AA') \Rightarrow \mu(x)$, где $\mu(x)$ — некоторая спектральная функция, преобразование Стилтьеса которой равно взятому при $x = 1$ решению дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + cM\frac{it\xi_1 u(t,x)}{1+it\xi_1 u(t,x)} + it^2 cM\frac{\xi_1 \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)}{1+it\xi_1 u(t,x)} = 0, \qquad (2)$$

где

$$u(t,0) = m_0(t), \quad m_0(t) = \int \frac{d\mu(x)}{1+itx}.$$

Под решением уравнения (2) мы понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную по t, x вместе со своими первыми производными и такую, что $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1, |t|\leqslant T} \operatorname{Re} u(t,x) > 0$. Решение уравнения (2) существует и единственно и может быть задано неявно в следующей форме:

$$u(t,x) = m_0\left(t - cxM\frac{\xi_1}{1+it\xi_1 u(t,x)}\right).$$

Отсюда следует, что преобразование Стилтьеса $m(t)$ функции $\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$m(t) = m_0\left(t - cM\frac{\xi_1}{1+it\xi_1 m(t)}\right).$$

С помощью метода последовательных приближений легко получить, что решение этого уравнения существует и единственно.

Доказательство. Очевидно, что

$$\frac{1}{n} M \operatorname{Sp} R_t^k = \frac{1}{n}\operatorname{Sp}(I + itB_n)^{-1} + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{m} M[\operatorname{Sp} R_t^l - \operatorname{Sp} R_t^{l-1}].$$

Из доказательства теоремы 2 получаем, что

$$\operatorname{Sp} R_t^l - \operatorname{Sp} R_t^{l-1} = -t\frac{d}{dt}\ln[1 + it\xi_l(R_t^{l-1}\vec{\xi}_l, \vec{\xi}_l)].$$

Поэтому, используя (1) и теорему 2, получаем

$$M[\operatorname{Sp} R_t^l - \operatorname{Sp} R_t^{l-1}] = -tM\frac{d}{dt}\ln\left[1 + \frac{it}{n}\xi_l M \operatorname{Sp} R_t^l\right] + 0(1).$$

Обозначим

$$u_n(t,x) = \frac{1}{n} M \operatorname{Sp} R_t^k, \quad \frac{k}{m} \leqslant x < \frac{k+1}{m}.$$

Тогда

$$u_n(t,x) = m_{0n}(t) - c\int_0^x Mt\frac{d}{dt}\ln[1 + it\xi_1 u_n(t,y)]\,dy + 0(1),$$

где

$$m_{0n}(t) = \int \frac{d\mu_n(x, B_n)}{1+itx}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}[u_n(t, x+\Delta x)-u_n(t, x)]=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\partial}{\partial t}[u_n(t, x+\Delta x)-u_n(t, x)]=0.$$

Легко видеть, что функции $u_n(t, x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u_n(t, x)$ по второй переменной ограниченной варации, а по первой равностепенно непрерывны, поэтому множества функций $\{u_n(t, x)\}$, $\{\frac{\partial}{\partial t}u_n(t, x)\}$ будут компактны. Тогда для доказательства утверждений теоремы нужно показать, что решение уравнения (2) единственно. С незначительными изменениями единственность уравнения (2) доказываем так же как и в [1]. Теорема 4 доказана.

Рассмотрим теперь симметричные матрицы $A_n=(\xi_{ij}^{(n)})$ n-го порядка. Пусть $\mu_n(x)$ — нормированная спектральная функция матрицы A_n.

Теорема 5. Если для каждого n векторы $(\xi_{ij}^{(n)}, i\leqslant j, j=\overline{1, n})$, $i=\overline{1, n}$ независимы и функция

$$\sup_n\left[m_n(t)=\frac{1}{n}M\operatorname{Sp}(I+itA_n)^{-1}\right]$$

непрерывна в нуле, то с вероятностью 1 почти $\forall\ x$

$$\lim_{n\to\infty}[\mu_n(x)-F_n(x)]=0,$$

где $F_n(x)$ — неслучайная функция распределения, преобразование Стилтьеса которой равно

$$\int\frac{dF_n(x)}{1+itx}=m_n(t).$$

Доказательство. Обозначим

$$\gamma_k=M_{(k-1)}\operatorname{Sp}R_t-M_{(k)}\operatorname{Sp}R_t,$$

где

$$R_t=(I+itA_n)^{-1}$$

Пусть матрица $\widetilde{A}_k$ получена из матрицы A_n заменой k-й вектор-строки и k-го вектор-столбца нулями и

$$\widetilde{R}_t=(I+it\widetilde{A}_k)^{-1}.$$

Тогда

$$\delta_n=\operatorname{Sp}R_t-\operatorname{Sp}\widetilde{R}_t=t\frac{d}{dt}\ln\det[I+it\widetilde{R}_t(A_n-\widetilde{A}_k)].$$

Очевидно, что

$$|\delta_n|^2=\left|\frac{it\xi_{kk}^{(n)}+2t^2(\widetilde{R}_t\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)+it^3\left(\frac{\widetilde{A}_k}{(I+it\widetilde{A}_k)^2}\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k\right)}{1+it\xi_{kk}^{(n)}+t^2(\widetilde{R}_t\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k)}\right|^2\leqslant 6.$$

Поэтому

$$M\gamma_k^4 = M\,[M_{(k-1)}\,\mathrm{Sp}\,(R_t - \widetilde{R}_t) - M_{(k)}\,\mathrm{Sp}\,(R_t - \widetilde{R}_t)]^4 \leqslant 6^2 \cdot 2^4.$$

Отсюда следует, что с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int \frac{d\mu_n(x)}{1+itx} - m_n(t)\right] = 0.$$

Теорема 5 доказана.

Очевидно, что теорема 5 верна и в том случае, когда матрица A_n представима в виде

$$A_n = (\delta_{ij}\eta_i^{(n)} + \xi_{ij}^{(n)}),$$

где $\eta_i^{(n)}$, $i = \overline{1, n}$ — независимые для каждого n случайные величины.

Теорема 6. (Полукруговой закон Вигнера). Если для каждого n случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $i \geqslant j$, $i, j = \overline{1, n}$ симметричной матрицы $A_n = (\xi_{ij}^{(n)})$ независимы, $M\xi_{ij}^{(n)} = 0$, $D\xi_{ij}^{(n)} = \frac{\sigma^2}{n}$ и выполняется условие Линдеберга: для всякого $\tau > 0$, $j = \overline{1, n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|>\tau} x^2 dP\,\{\xi_{ij}^{(n)} < x\} = 0,$$

то с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sigma}\displaystyle\int_{-2\sigma}^{x}\sqrt{4\sigma^2 - y^2}\,dy, & |x| \leqslant 2\sigma, \\ 1, & x > 2\sigma, \\ 0, & x < -2\sigma. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Из [6] следует, что при выполнении условий теоремы 6

$$p\lim_{n\to\infty}\left[(R_t^k\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k) - \frac{\sigma^2}{n}\,\mathrm{Sp}\,R_t^k\right] = 0. \tag{4}$$

Далее,

$$\frac{r_{kk}}{r_{ll}} = \frac{\det(I + it\widetilde{A}_k)}{\det(I + it\widetilde{A}_l)} = \frac{1 + t^2(R_t^{kl}\vec{\xi}_l, \vec{\xi}_l) + it\xi_{ll}^{(n)}}{1 + t^2(R_t^{kl}\vec{\xi}_k, \vec{\xi}_k) + it\xi_{kk}^{(n)}},$$

где r_{kl} — элементы матрицы $(I + itA_n)^{-1}$,

$$R_t^{kl} = (I + it\widetilde{A}_{kl})^{-1},$$

матрица $\widetilde{A}_{kl}$ получена из A_n заменой строк и столбцов с номерами k, l нулями. Поэтому из (4) следует $p\lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_{kk}}{r_{ll}} = 1$.

Тогда из теоремы 5 получаем

$$m_n(t) = \frac{1}{n} M \operatorname{Sp}(I + itA_n)^{-1} = \frac{1}{1 + t^2\sigma^2 m_{n-1}(t)} + o(1).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} m_n(t) = m(t) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4t^2\sigma^2}}{2t^2\sigma^2}.$$

Поэтому по формуле обращения получаем (3). Теорема 6 доказана.

Теорема 7 [2]. Если для каждого n случайные величины $\xi_{ij}^{(n)}$, $\eta_i^{(n)}$, $i \geqslant j$, $i, j = \overline{1, n}$ матрицы $A_n = (\xi_{ij}^{(n)} + \delta_{ij}\eta_i^{(n)})$ независимы, одинаково распределены, $M\xi_{ij}^{(n)} = 0$, $D\xi_{ij}^{(n)} = \frac{1}{n}$, для величин $\xi_{ij}^{(n)}$, $i = \overline{1, n}$ выполняется условие Линдеберга и функции распределения случайных величин $\eta_i^{(n)}$ слабо сходятся к предельной функции распределения некоторой случайной величины η, то с вероятностью 1 во всех точках непрерывности функции $\lambda(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda(x),$$

где $\lambda(x)$ — неслучайная спектральная функция, преобразование Стилтьеса которой равно

$$m(t) = M(1 + it\eta + t^2 m(t))^{-1}, \quad \min_{|t|\leqslant T} \operatorname{Re} m(t) > 0. \tag{5}$$

Легко видеть, что решение уравнения (5) существует, единственно и может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы 7 аналогично доказательству теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Пастур Л. А. Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц.— Матем. сб., 72(114), 4, 1967.
2. Пастур Л. А. Спектры случайных самосопряженных операторов.— Успехи матем. наук, 28, № 1, 1973.
3. Архаров Л. В. Предельные теоремы для характеристических корней ковариационной матрицы.— ДАН СССР, 199, № 5, 1971.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
5. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1965.
6. Гирко В. Л. Предельные теоремы для случайных квадратичных форм. I.— Теория вероят. и матем. статистика, вып. 9, 1973.

V. L. Girko

EIGENVALUE OF THE RANDOM MATRICES. I

Summary

In this note some limit theorems for eigenvalue of the random matrix are proved.

Поступила в редколлегию 10.IV 1973.