К. М. ДЖАФАРОВ, препод.
Азербайджанский педагогический институт

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе [1] были рассмотрены процессы следующего вида. Пусть $\{\xi_k^{(n)}\}$, $\{\eta_k^{(n)}\}$ — последовательности серий независимых, одинаково распределенных бесконечно малых случайных величин, $\xi_k^{(n)} > 0$. Положим

$$\chi_n(t) = \sum_{k=1}^{m} \eta_k^{(n)},$$

если

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \leqslant t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k^{(n)}.$$

В предположении, что величины $\xi_k^{(n)}$ и $\eta_k^{(n)}$ независимы, доказано [1], что если конечномерные распределения процессов $\chi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого процесса $\chi(t)$, то существуют такие однородные процессы с независимыми приращениями $\eta(t)$ и обобщенный*) монотонный процесс $\xi(t)$, что конечномерные распределения $\chi(t)$ и $\eta(\xi^{-1}(t))$ совпадают, где $\xi^{-1}(t) = s$, если s — минимальное решение неравенства $\xi(s) \leqslant t < \xi(s+0)$. Если $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$ определяются формулами

$$\xi_n(t) = \sum_{k \leqslant N_n t} \xi_k^{(n)},$$

$$\eta_n(t) = \sum_{k \leqslant N_n t} \eta_k^{(n)},$$

то можно выбрать N_n так, чтобы $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$ слабо сходились к процессам $\xi(t)$ и $\eta(t)$, определяющим $\chi(t)$.

В настоящей работе указанные процессы изучаются в предположении, что $\{\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — независимые пары случайных величин.

---

*) Обобщенный процесс $\xi(t)$ может принимать значение $+\infty$; при этом, если $\xi(t) = +\infty$, то $\xi(s) = \infty$ для всех $s > t$.

Теорема 1. Пусть конечномерные распределения $\chi_n(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\chi(t)$. Тогда существует такой двухмерный стохастический непрерывный процесс с независимыми приращениями $(\xi(t), \eta(t))$, что $\xi(t)$ — неубывающий обобщенный процесс и конечномерные распределения $\chi(t)$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $\eta(\xi^{-1}(t))$, где $\xi^{-1}(t) = s$, если s — минимальное решение неравенства $\xi(s) \leqslant \leqslant t < \xi(s+0)$.

Доказательство. По предположению, процессы $\eta_n(t) = \sum\limits_{k \leqslant N_n t} \eta_k^{(n)}$ являются процессами с независимыми приращениями.

Введем случайные величины $\tilde{\eta}_k^{(n)}$ так, чтобы:

1) тройки $(\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}, \tilde{\eta}_k^{(n)})$ были независимыми,

2) пара $(\xi_k^{(n)}, \tilde{\eta}_k^{(n)})$ имела такое же распределение, как и пара $(\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)})$,

3) $\eta_k^{(n)}$ и $\tilde{\eta}_k^{(n)}$ — независимы.

Положим $\bar{\eta}_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} - \tilde{\eta}_k^{(n)}$. Случайные величины $\tilde{\eta}_k^{(n)}$ симметричны и независимы по условию. Последовательность процессов

$$\bar{\chi}_n(t) = \chi_n(t) - \tilde{\chi}_n(t)$$

является ограниченной по вероятности. Тогда по лемме 1 [2] найдутся такие N_n и существуют такие постоянные a_n, что величины $\sum\limits_{k=1}^{N_n} \eta_k - a_n$ также будут ограничены по вероятности. Точно так, как по величинам $\xi_{n_k}^{(n)}$, по величинам $\eta_{n_k}^{(n)} - \frac{a_n}{N_n}$ построим соответствующую последовательность случайных процессов

$$\chi_{n_k}^{*}(t) = \sum_{k=1}^{m} \left(\eta_{n_k}^{(n)} - \frac{a_n}{N_n}\right),$$

если

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_{n_k}^{(n)} \leqslant t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_{n_k}^{(n)}.$$

Покажем, что можно выбрать так последовательность n_k, что конечномерные распределения этого процесса сходятся. Процессы

$$\eta_n^{*}(t) = \sum_{k \leqslant N_n t} \eta_k^{(n)} - t a_n$$

являются ограниченными по вероятности. Если

$$\xi_n^*(t) = \sum_{k \leqslant N_n t} \xi_k^{(n)},$$

то

$$\chi_n^*(t) = \eta_n^*(\xi_n^{*^{-1}}(t)).$$

Используя ограниченность по вероятности последовательности процессов $\eta_n^*(t)$ и лемму 2 в работе [2], можно выбрать такую последовательность n_k, чтобы $\eta_{n_k}^*(t)$ слабо сходился к некоторому процессу с независимыми приращениями, а процесс $\xi_{n_k}^*(t)$ сходился (слабо) к обобщенному процессу $\xi(t)$. При этом конечномерные распределения процессов

$$\chi_{n_k}^*(t) = \eta_{n_k}^*(\xi_{n_k}^{*^{-1}}(t))$$

будут сходиться к конечномерным распределениям

$$\eta^*(\xi^{*^{-1}}(t)).$$

Тогда из равенства

$$\chi_{n_k}(t) = \chi_{n_k}^*(t) + a_{n_k}\xi_{n_k}^{-1}(t)$$

заключаем, что последовательность a_{n_k} должна быть ограниченной. Следовательно, величины $\sum_{j=1}^{m} \eta_{kj}^{(n)}$ будут ограничены по вероятности. Пусть

$$\eta_n'(t) = \sum_{k \leqslant N_n t} \eta_k^{(n)}.$$

Тогда

$$\chi_n(t) = \eta_n'(\xi_n^{*^{-1}}(t)).$$

Пользуясь ограниченностью по вероятности последовательности $\eta_{n_k}^*(t)$ и леммой 2 в работе [2], можно выбрать такую последовательность n_k', чтобы последовательность $\eta_{n_k'}'(t)$ слабо сходилась к некоторому процессу с независимыми приращениями $\eta(t)$, а последовательность процессов $\xi_{n_k'}^*(t)$ сходилась к обобщенному процессу $\xi(t)$. При этом конечномерные распределения процессов $\eta_n'(\xi_n^{*-1}(t))$ будут сходиться к конечномерным распределениям процесса $\eta(\xi^{-1}(t))$. По условию теоремы конечномерные распределе ия

$$\chi_{n_k'}(t) = \eta_{n_k'}'(\xi_{n_k'}^{*^{-1}}(t))$$

сходятся к конечномерным распределениям $\chi(t)$. Следовательно, конечномерные распределения $\chi(t)$ совпадают с конечномерными распределениями $\eta(\xi^{-1}(t))$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь предельную теорему для функционалов от $\chi_n(t)$. Обозначим через $D_{[a,b]}(R')$ множество функций $f(x)$, определенных на $[a, b]$, принимающих значения из R' и имеющих предельные значения $f(x+0)$ для $a \leqslant x < b$ и $f(x-0)$ для $a < x \leqslant b$. Поскольку любой отрезок $[a, b]$ можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить в отрезок $[0, 1]$, то будем рассматривать пространство $D_{[0,1]}(R')$. Для доказательства предельной теоремы используем теорему 2 § 5 гл. VI [3]. Пусть $\chi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность процессов без разрывов второго рода со значениями в R', причем частные распределения $\chi_n(t)$ сходятся к частным распределениям $\chi(t)$. Для того, чтобы для всякого функционала f, определенного на $D_{[0,1]}(R')$, распределение $f(\chi_n(t))$ сходилось к распределению $f(\chi(\cdot))$, необходимо и достаточно выполнения для всех $\varepsilon > 0$ условия

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta} \min[|\chi_n(t)-\chi_n(t_1)|;\ |\chi_n(t_2)-\chi_n(t)|] + \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta}|\chi_n(0)-\chi_n(t)| + \sup_{1-\delta\leqslant t\leqslant 1}|\chi_n(1)-\chi_n(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 2. Пусть $\chi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность случайных процессов, которые принадлежат $D_{[0,1]}(R')$ с вероятностью 1 и для которых частные распределения $\chi_n(t)$ сходятся к частным распределениям

$$\chi(t) = \eta(\xi^{-1}(t)).$$

Если выполняются условия:

1) $Me^{-z\xi(t)} = e^{-\gamma z+\int_0^\infty (e^{xz}-1)dM_{\xi(t)}(x)}$, где $\gamma > 0$,

2) $M\eta(t) = 0$, $M(\eta(t))^2 < \infty$,

то для всякого непрерывного функционала f на $D_{[0,1]}(R')$ распределение $f(\chi_n(t))$ сходится к распределению величины $f(\chi(t))$.

Доказательство. В силу цитированной выше теоремы [3] достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2+\delta} \min[|\chi_n(t)-\chi_n(t_1)|;\ |\chi_n(t_2)-\chi_n(t)|] > \varepsilon\} = 0. \quad (1)$$

Пусть $\xi_n(t)$ и $\eta_n(t)$ определены при $N_n = n$.

Не ограничивая общности, можно считать, что процессы $(\xi_n(t), \eta_n(t))$ слабо сходятся к процессу $(\xi(t), \eta(t))$, определяющему $\chi(t)$. Через $N(t)$ обозначим число скачков процесса $\xi_n(t)$ за время t. Тогда

$$\chi_n(t) = \sum_{k=1}^{N(t)-1} \eta_k^{(n)}, \quad N(t) > m-1,$$

если $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{(n)} < t$. Очевидно, что

$$P\left\{\sup_{k \leqslant N(t)} \left| \sum_{i=1}^{k} \eta_i^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} \leqslant P\left\{\sup_{k<m} \left| \sum_{i=1}^{k} \eta_i^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} + P\{N(t) > m\},$$

$$P\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta} \min[|\chi_n(t) - \chi_n(t_1)|;\ |\chi_n(t_2) - \chi_n(t)|] > \varepsilon\} = P\left\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta} \min\left[\left|\sum_{k=1}^{N(t)-1} \eta_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{N(t_1)-1} \eta_k^{(n)}\right|;\ \left|\sum_{k=1}^{N(t_2)-1} \eta_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{N(t)-1} \eta_k^{(n)}\right|\right] > \varepsilon\right\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta} \min\left[\left|\sum_{k=N(t_1)}^{N(t)-1} \eta_k^{(n)}\right|;\ \left|\sum_{k=N(t)}^{N(t_2)-1} \eta_k^{(n)}\right|\right] > \varepsilon\right\}.$$

Если происходят события

$$\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta} \min\left[\left|\sum_{i=N(t_1)}^{N(t)-1} \eta_i^{(n)}\right|;\ \left|\sum_{i=N(t)}^{N(t_2)-1} \eta_i^{(n)}\right|\right] > \varepsilon,$$

то существуют такие $k_1 < k_2 < k_3$, что выполнено

$$\left|\sum_{i=k_1}^{k_2-1} \eta_i^{(n)}\right| > \varepsilon; \quad \left|\sum_{i=k_2}^{k_3-1} \eta_i^{(n)}\right| > \varepsilon;$$

$$\sum_{i=k_1}^{k_2-1} \xi_i^{(n)} < \delta; \quad \sum_{i=k_2}^{k_3-1} \xi_i^{(n)} < \delta.$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_l^{(k)}$ событие, заключающееся в том, что

$$\left|\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{l} \eta_j^{(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad l = \nu_n(i\delta)+1, \ldots, \nu_n(i\delta)+k-1,$$

$$\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n(i\delta)+k}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n(i\delta)+k}\xi_j^{(n)} \leqslant 2\delta,$$

$$\sup_{m\leqslant \nu n((i+3)\delta)}\left|\sum_{\nu_n(i\delta)+k-1}^{m}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\Bigg],$$

где $\nu_n(i\delta)$ тот номер k, при котором впервые будет выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{k}\xi_j^{(n)} > i\delta.$$

Тогда событие

$$\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta}\min\left[\left|\sum_{i=N(t_1)}^{N(t)-1}\eta_i^{(n)}\right|;\ \left|\sum_{i=N(t)}^{N(t_2)-1}\eta_i^{(n)}\right|\right] > \varepsilon$$

влечет одно из событий $\mathfrak{A}_i^{(k)}$. Поэтому по теореме 3 гл. I [4]

$$P\left\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta}\min\left[\left|\sum_{i=N(t_1)}^{N(t)-1}\eta_i^{n}\right|;\ \left|\sum_{i=N(t)}^{N(t_2)-1}\eta_i^{(n)}\right|\right] > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i P\left\{\bigcup_k \mathfrak{A}_i^k\right\} = \sum_i\sum_k P\left\{\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{l}\eta_j^{(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},\right.$$

$$l = \nu_n(i\delta)+1, \ldots, \nu_n(i\delta)+k-1,$$

$$\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n(i\delta)+k}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left.\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n(i\delta)+k}\xi_j^{(n)} < 2\delta\right\} P\left\{\sup_{m\leqslant\nu_n((i+3)\delta)}\left|\sum_{\nu_n(i\delta)+k-1}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i\Bigg[P\{\nu_n((i+3)\delta - \nu(i\delta) > nL\delta\} +$$

$$+ P\left\{\sup_{m<n<\delta}\left|\sum_{j=1}^{m}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\Bigg] \times$$

$$\times P\left\{\sup_{l\leqslant\nu_n((i+3)\delta)}\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{l}\eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i [P\{\nu_n((i+3)\delta) - \nu_n(i\delta) > nL\delta\} +$$

$$+ \frac{1}{1-L} P\left\{\left|\sum_{j=1}^{nL\delta} \eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\Bigg] \frac{1}{1-L} P\left\{\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n((i+3)\delta)} \eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

где $L < 1$, L — достаточно большое число.

Оценим каждую вероятности отдельно:

$$P\{\nu_n((i+3)\delta) - \nu_n(i\delta) > nL\delta\} = P\left\{\frac{\nu_n((i+3)\delta - \nu_n(i\delta)}{n} > L\delta\right\}.$$

Но

$$\frac{\nu_n(s)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nu(s),$$

где $\nu(s)$ — минимальное решение неравенства

$$\xi(\nu(s)) \leqslant s < \xi(\nu(s)+0),$$

а

$$P\{\nu(s+\delta) - \nu(s) > L\delta\} = P\{\xi(L\delta) < \delta\}.$$

По условию теоремы

$$P\{\xi(L\delta) < \delta\} \leqslant e^{\delta z} \int_0^\delta e^{-xz} P\{\xi(L\delta) \in dx\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\delta z} \int_0^\infty e^{-xz} P\{\xi(L\delta) \in dx\} = e^{\delta z} e^{L\delta\left(-\gamma z + \int_0^\infty (e^{-xz}-1)\, dM_{\xi(t)}(x)\right)} \leqslant e^{z\delta(1-L\gamma)}.$$

Полагая $z = \frac{1}{\delta}$, получим

$$P\{\xi(L\delta) < \delta\} \leqslant e^{1-\gamma L}.$$

Так как

$$\sum_{i\leqslant nt} \eta_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta(t),$$

то

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{nL\delta} \eta_i^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left\{\left|\eta(\delta L)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Рассмотрим

$$P\left\{\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n((i+3)\delta)} \eta_j^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} = P\left\{\left|\sum_{k=\nu_n(i\delta)}^{\infty} \eta_k^{(n)} I_{\left\{\sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k} \xi_j^{(n)} < 3\delta\right\}}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

где

$$I_{\left\{\sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}<3\delta\right\}}=\begin{cases}1, & \sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}<3\delta,\\ 0, & \sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}\geqslant 3\delta.\end{cases}$$

Далее,

$$M\sum_{k=\nu_n(i\delta)}\eta_k^{(n)}I_{\left\{\sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}<3\delta\right\}}=M\eta_1^{(n)}\sum_k P\{\nu_n((i+3)\delta)-\nu_n(i\delta)>k\}=$$

$$=M\eta_1^{(n)}M[\nu_n((i+3)\delta)-\nu_n(i\delta)]=0,$$

$$M\left(\sum_{k=\nu_n(i\delta)}^{\infty}\eta_k^{(n)}I_{\left\{\sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}<3\delta\right\}}\right)^2=$$

$$=Dn\eta_1^{(n)}M\frac{\nu_n((i+3)\delta)-\nu_n(i\delta)}{n}\leqslant$$

$$\leqslant Dn\eta_1^{(n)}M\frac{\nu_n(3\delta)}{n}\to D\eta(1)M\xi^{-1}(3\delta),$$

$$\xi(t)\geqslant\gamma t,\ \xi^{-1}(3\delta)\leqslant\frac{3\delta}{\gamma},\ M\xi^{-1}(3\delta)\leqslant\frac{3\delta}{\gamma}.$$

На основании неравенства Чебышева

$$P\left\{\left|\sum_{\nu_n(i\delta)}^{\nu_n((i+3)\delta)}\eta_j^{(n)}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\varepsilon^2}M\left(\sum_{k=\nu_n(i\delta)}^{\infty}\eta_k^{(n)}\overline{I}_{\left\{\sum\limits_{j=\nu_n(i\delta)}^{k}\xi_j^{(n)}<3\delta\right\}}\right)^2\to\frac{4}{\varepsilon^2}D\eta(1)\frac{3\delta}{\gamma},$$

$$\sum_{i\delta<1}\left[e^{1-\gamma L}+\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{4}{\varepsilon^2}D\eta(1)\frac{3\delta}{\gamma}\right]\frac{1}{1-\alpha}\times$$

$$\times\frac{4}{\varepsilon^2}D\eta(1)\frac{3\delta}{\gamma}=\left[\frac{1}{\delta}\right]\delta C[e^{-\gamma L}+\delta]=O(e^{-\gamma L}+\delta).$$

Значит,

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\{\sup_{t-\delta<t_1<t<t_2<t+\delta}\min\|\chi_n(t)-\chi_n(t_1);$$

$$|\chi_n(t_2)-\chi_n(t)|>\varepsilon\}=O(e^{-\gamma L}).$$

Ввиду произвольности L это выражение может быть сделано сколь угодно малым. Тем самым (1) доказано и доказана теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунятзаде Р. Р., Джафаров К. М., Насирова Т. И. О пределе процесса с полунезависимыми приращениями.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 8, 1973.

2. Скороход А. В., Насирова Т. И., Джафаров К. М. О пределе некоторого процесса с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 5, 1971.

3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. I. М., «Наука», 1971.

4. Скороход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.

K. M. Dzhafarov

LIMIT THEOREM FOR SOME CLASS OF RANDOM PROCESSES

Summary

Let $\{\xi_k^{(n)}, \eta_k^{(n)}\}$, $n = 1, 2, \ldots$, be a sequence of independent random vectors, and $\chi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{(n)}$ where $\xi_k^{(n)} > 0$, $\sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} \leqslant t < \sum_{k=1}^{m+1} \xi_k^{(n)}$.

Limit theorems are investigated for the process $\chi_n(t)$ and functionals are defined on this process.

Поступила в редколлегию 18.VI 1973.