А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, доц.
Киевский университет

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА ПО НАБЛЮДЕНИЮ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОШИБКАМИ

В настоящей заметке рассматривается модель, в которой наблюдаемый случайный дискретный процесс является суммой сигнала — некоторой детерминированной последовательности и случайных ошибок. Задача об оценке сигнала в таких моделях рассматривалась во многих работах в предположении, что детерминированная последовательность принадлежит некоторому параметрическому множеству. Свойства оценок параметров в этом случае и ссылки на предшествующие статьи содержатся в книге Т. Андерсона [1]. Мы рассматриваем случай, когда детерминированная последовательность принадлежит некоторому бесконечномерному множеству. В такой постановке задача оценки исследовалась в предположении нормальности ошибок в работах И. Ш. Ибрамхалимова и А. В. Скорохода [2], И. Ш. Ибрамхалилова [3], а также А. С. Холево [4].

1. Пусть K — некоторое множество последовательностей $s = \{s_1, s_1, \ldots, s_n, \ldots\}$ действительных чисел s_n, $n \geqslant 1$. Предположим, что $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных действительных случайных величин с $M\xi_1 = 0$ и плотностью распределения вероятностей $f(x)$, удовлетворяющей условиям:

A) функция $f(x)$ непрерывна и положительна на оси;

B) для значений u с $|u| \leqslant c_0$

$$M[\ln f(\xi_1 + u) - \ln f(\xi_1)] \leqslant -c_1 |u|^{\alpha}$$

для некоторых положительных c_0 и c_1 и $0 < \alpha \leqslant 2$;

C) для значений u с $|u| \leqslant 2c_0$

$$|\ln f(x+u) - \ln f(x)| \leqslant F(x)|u|,$$

причем

$$MF^2(\xi_1) < \infty, \quad 0 < MG(\xi_1) < \infty,$$

где

$$G(x) = \sup_{|u| \leqslant 2c_0} F(x+u).$$

Рассмотрим последовательность случайных величин x_n, $n \geqslant 1$ следующего вида:

$$x_n = s_n^0 + \xi_n, \quad n \geqslant 1,$$

где $s^0 = \{s_1^0, s_2^0, \ldots, s_n^0, \ldots\}$—некоторый фиксированный элемент из K.

Оценку $s^{(N)}$ максимального правдоподобия неизвестного s^0 по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_N$ естественно определить как такое значение $s \in K$, при котором величина

$$Q_N(s) = \prod_{n=1}^{N} f(x_n - s_n)$$

принимает наибольшее значение в K. При предположениях относительно K, которые рассматриваются далее, легко проверить, что $s^{(N)} = \{s_1^{(N)}, s_2^{(N)}, \ldots\}$ существует. Последнее означает, что существует последовательность случайных величин $s_n^{(N)}$, $n \geqslant 1$, которая с вероятностью 1 принадлежит K и максимизирует $Q_N(s)$.

Далее доказывается состоятельность оценки $s^{(N)}$ в предположении, что K является одним из следующих двух множеств:

$$K_1 = \left\{s : s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n\lambda_k, \ |a_k| k^{1+\beta} \leqslant L, \ k \geqslant 1\right\}$$

с некоторой фиксированной последовательностью λ_k, $k \geqslant 1$ — различных чисел из интервала $[0, \pi)$ и постоянной L такой, что

$$L \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\beta} \leqslant c_0;$$

$$K_2 = \left\{s : s_n = \sum_{k=-\infty}^{n} a_{n-k} d_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_{n-k}\right\},$$

где $a = \{a_0, a_1, \ldots\}$ — последовательность действительных чисел, принадлежащая компактному множеству $\mathfrak{K} \subset l_1$, а $d = \{\ldots, d_{-1}, d_0, d_1, \ldots\}$ — фиксированная ограниченная последовательность действительных чисел такая, что существует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} d_{k-t} d_{k-s} = \rho(t - s)$$

при любых целых t и s. Кроме того, предполагается, что для $a \in \mathfrak{K}$ справедливо неравенство

$$\sum_{s,t=0}^{\infty} \rho(s - t) a_s a_t \geqslant \gamma \sum_{s=0}^{\infty} a_s^2$$

с некоторым $\gamma > 0$ и что

$$\sup_n |d_n| \sup_{a\in\mathfrak{K}} \sum_{s=0}^{\infty} |a_s| \leqslant c_0.$$

Условие на квадратичную форму, например, выполнено, если $|a_0| \geqslant \gamma_0 > 0$ для всех $a \in \mathfrak{K}$ и множество точек скачков функции $H(\lambda)$ в представлении

$$\rho(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\, dH(\lambda)$$

всюду плотно на интервале $[-\pi, \pi]$.

Относительно условия B) отметим следующее. Известно [5], что при очень слабых ограничениях на f неравенство

$$M[\ln f(\xi_1 + u) - \ln f(\xi_1)] < 0$$

при $u \neq 0$ может быть доказано с использованием неравенства Иенсена. Аналогичное неравенство используется при доказательстве состоятельности оценок максимального правдоподобия для неизвестных параметров [5]. При рассмотрении непараметрической оценки это неравенство требуется в усиленной форме. Условие B) представляет одно из возможных простых предположений в этом направлении.

2. **Теорема 1.** Пусть $s^0 = \{s_1^0, s_2^0, \ldots\} \in K_1$ и $s^{(N)}$ — оценка максимального правдоподобия для s^0 по наблюдениям $x_1 = s_1^0 + \xi_1$, $x_2 = s_2^0 + \xi_2, \ldots, x_N = s_N^0 + \xi_N$ в множестве K_1. Тогда

$$\sup_{n\geqslant 1} |s_n^{(N)} - s_n^0| \to 0$$

по вероятности при $N \to \infty$.

Доказательство. Используем основную идею работы А. Вальда [5] о состоятельности оценок максимального правдоподобия.

Установим сначала один вспомогательный результат относительно сходимости в K_1. Легко проверить, что для последовательности

$$s = \left\{ s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n\lambda_k,\ n \geqslant 1 \right\}$$

существует

$$\lim_{m\to\infty} 2m^{-1} \sum_{n=1}^{m} s_n^2 = \|s\|^2,$$

причем

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Докажем, что сходимость относительно нормы $\|s\|$ в K_1 эквивалентна сходимости по норме $\|s\|_0 = \sup\limits_{n\geqslant 1} |s_n|$. Сопоставим каждой последовательности $s \in K_1$ действительную непрерывную на всей оси почти-периодическую по Бору функцию $s(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos t\lambda_k$, при этом $s_n = s(n)$, пусть $\mathfrak{K}_1$ — множество всех функций $s(t)$, отвечающих последовательностям $s \in K_1$. Множество $\mathfrak{K}_1$ компактно при сделанных предположениях о K_1 относительно равномерной сходимости на оси. Известно [6], что эта сходимость функций из $\mathfrak{K}_1$ эквивалентна сходимости относительно следующей нормы:

$$\|s(t)\|_p^2 = \lim_{A\to\infty} 2A^{-1}\int_0^A s^2(u)\,du = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2.$$

В [6] можно найти также доказательство следующего утверждения. Для функции $s(t)$, удовлетворяющей хотя бы при одном значении t_0 неравенству $|s(t_0)| > \varepsilon$, справедливо следующее неравенство

$$\|s\|_p^2 > \frac{2\varepsilon^2\delta}{3L} > 0$$

с некоторыми числами δ, L, не зависящими от $s \in \mathfrak{K}_1$ и t_0. Отсюда следует, что

$$\|s\|^2 = \|s(t)\|_p^2 > \frac{2\varepsilon^2\delta}{3L},$$

если $\sup\limits_{n\geqslant 1} |s_n| > \varepsilon$, и потому из $\|s\| \to 0$ следует, что $\|s\|_0 \to 0$. Из доказанного результата при предположениях относительно f легко получить существование $S^{(N)}$.

Для $\varepsilon > 0$ пусть

$$K_1^\varepsilon = \{s\colon\ s \in K_1,\ \|s - s^0\| \geqslant \varepsilon\}.$$

Согласно определению оценки $s^{(N)}$ имеем

$$P\{s^{(N)} \in K_1^\varepsilon\} \leqslant P\{\sup_{s\in K_1^\varepsilon} Q_N(s) \geqslant Q_N(s^0)\} =$$

$$= P\left\{\sup_{s\in K_1^\varepsilon} \sum_{n=1}^{N} [\ln f(x_n - s_n) - \ln f(x_n - s_n^0)] \geqslant 0\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{s\in K_1^\varepsilon} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} [\ln f(\xi_n + s_n^0 - s_n) - \ln f(\xi_n)] \geqslant 0\right\}.$$

Пусть $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(m)}$ — δ-сеть по норме $\|\cdot\|_0$ для множества K_1^ε с $\delta = \bar{\delta}(\varepsilon)$, которое будет указано далее. Для любого $\Delta > 0$ легко находим

$$P\{s^{(N)} \in K_1^\varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} P\left\{\sup_{\|s-p^{(k)}\|_0 \leqslant \delta} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [\ln f(\xi_n + s_n^0 - s_n) - \ln f(\xi_n)] \geqslant 0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \left[P\left\{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [\ln f(\xi_n + s_n^0 - p_n^{(k)}) - \ln f(\xi_n)] \geqslant -\Delta\right\} + \right.$$

$$\left. + P\left\{\sup_{\substack{\|s-p^{(k)}\|_0 \leqslant \delta \\ \|\tilde{s}-p^{(k)}\|_0 \leqslant \delta}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [\ln f(\xi_n + s_n^0 - s_n) - \ln f(\xi_n + s_n^0 - \tilde{s}_n)] \geqslant \Delta\right\}\right], \tag{1}$$

где $p^{(k)} = \{p_n^{(k)},\ n \geqslant 1\}$.

При фиксированном k рассмотрим сначала сумму

$$\eta_{N,k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [\ln f(\xi_n + s_n^0 - p_n^{(k)}) - \ln f(\xi_n)] \tag{2}$$

независимых случайных величин. Согласно условию B) имеем

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} M [\ln f(\xi_n + s_n^0 - p_n^{(k)}) - \ln f(\xi_n)] \leqslant$$

$$\leqslant -c_1 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |p_n^{(k)} - s_n^0|^\alpha \leqslant -c \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} [p_n^{(k)} - s_n^0]^2$$

с некоторой постоянной c. Поэтому

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} M [\ln f(\xi_n + s_n^0 - p_n^{(k)}) - \ln f(\xi_n)] \leqslant$$

$$\leqslant -c \| p^{(k)} - s^0 \|^2 \leqslant -c\varepsilon^2, \tag{3}$$

причем c от k не зависит. Используя условие C), легко оценить дисперсию суммы (2):

$$M(\eta_{N,k} - M\eta_{N,k})^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} \{M [\ln f(\xi_n + s_n^0 - p_n^{(k)}) - \ln f(\xi_n)]^2 -$$

$$-(M[\ln f(\xi_n+s_n^0-p_n^{(k)})-\ln f(\xi_n)])^2\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}M[\ln f(\xi_n+s_n^0-p_n^{(k)})-\ln f(\xi_n)]^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{N}MF^2(\xi_1)\cdot\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[s_n^0-p_n^{(k)}]^2. \tag{4}$$

Положим теперь $\Delta=(c\varepsilon^2/2)>0$, тогда из неравенств (3) и (4) следует

$$P\{\eta_{N,k}\geqslant-\Delta\}=P\left\{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}M[\ln f(\xi_n+s_n^0-p_n^{(k)})-\ln f(\xi_n)]+\right.$$

$$\left.+\frac{c\varepsilon^2}{2}+(\eta_{N,k}-M\eta_{N,k})\geqslant 0\right\}\to 0 \tag{5}$$

при $N\to\infty$. Отметим, что сходимость в (5) равномерна относительно $s^0\in K_1$.

Из условия C) следует

$$|\ln f(\xi_n+s_n^0-s_n)-\ln f(\xi_n+s_n^0-\tilde{s}_n)|\leqslant$$

$$\leqslant F(\xi_n+s_n^0-s_n)|s_n-\tilde{s}_n|\leqslant G(\xi_n)\cdot 2\delta.$$

Поэтому

$$P\left\{\sup_{\substack{\|s-p^{(k)}\|_0\leqslant\delta\\ \|\tilde{s}-p^{(k)}\|_0\leqslant\delta}}N^{-1}\sum_{n=1}^{N}[\ln f(\xi_n+s_n^0-s_n)-\right.$$

$$\left.-\ln f(\xi_n+s_n^0-\tilde{s}_n)]\geqslant\Delta\right\}\leqslant P\left\{\frac{2\delta}{N}\sum_{n=1}^{N}G(\xi_n)\geqslant\Delta\right\}=$$

$$=P\left\{N^{-1}\sum_{n=1}^{N}G(\xi_n)\geqslant\Delta/2\delta\right\}. \tag{6}$$

В силу известного закона больших чисел

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N}G(\xi_n)\to MG(\xi_1)$$

с вероятностью 1 при $N\to\infty$. Отметим также, что правая часть не зависит от $s^0\in K_1$.

Предположим теперь, что число δ таково, что

$$\Delta/2\delta = 2MC(\xi_1) > 0,$$

т. е. положим

$$\delta = \frac{\Delta}{2^2 MG(\xi_1)} = \frac{c\varepsilon^2}{2^3 MG(\xi_1)} > 0.$$

При таком выборе δ правая часть неравенства (6) стремится к 0 при $N \to \infty$ и из соотношений (1), (5) и (6) следует, что

$$P\{s^{(N)} \in K_1^\varepsilon\} \to 0$$

при $N \to \infty$, Это означает, что

$$\| s^{(N)} - s^0 \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(N)} - a_k^0)^2 \to 0 \left(s_n^{(N)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(N)} \cos n\lambda_k, \quad n \geqslant 1 \right)$$

при $N \to \infty$ по вероятности, причем эта сходимость равномерна по $s^0 \in K_1$. Как было доказано ранее,

$$P\{\| s^{(N)} - s^0 \|_0 \geqslant \varepsilon\} \leqslant P\{\| s^{(N)} - s^0 \| \geqslant c'\varepsilon\}$$

с некоторой постоянной c', поэтому

$$\sup_{n \geqslant 1} | s_n^{(N)} - s_n^0 | \to 0$$

по вероятности при $N \to \infty$ равномерно относительно $s^0 \in K_1$. Теорема 1 доказана.

3. Теорема 2. Пусть $s^0 = \{s_1^0, s_2^0, \ldots\} \in K_2$ и $s^{(N)}$ — оценка максимального правдоподобия для s^0 в множестве K_2 по наблюдениям

$$x_1 = s_1^0 + \xi_1, \; x_2 = s_2^0 + \xi_2, \ldots, x_N = s_N^0 + \xi_N.$$

Тогда

$$\sup_{n \geqslant 1} | s_n^{(N)} - s_n^0 | \to 0$$

по вероятности при $N \to \infty$.

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогично предыдущей. Остановимся на отличающихся моментах доказательства. В случае множества K_2 легко проверить, что

$$\| s \|^2 = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} s_n^2 = \sum_{k,j=0}^{\infty} a_k a_j \rho(k-j), \tag{7}$$

причем сходимость равномерна относительно $s \in K_2$. На основании предположений о множестве K_2 для $\| s \|^2$ справедливо неравенство

$$\| s \|^2 = \sum_{s,t=0}^{\infty} \rho(s-t) a_s a_t \geqslant \gamma \sum_{s=0}^{\infty} a_s^2 \tag{8}$$

с положительной постоянной γ, не зависящей от $a \in K_2$. Легко также проверить, что в $\mathfrak{K}$ сходимости относительно норм

$$\| a \|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2, \qquad \| a \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} | a_k |$$

эквивалентны в том смысле, что сходимость последовательности элементов $\mathfrak{K}$ к некоторому элементу $\mathfrak{K}$ в одной норме влечет сходимость к тому же элементу относительно другой нормы. Кроме того, из сходимости элементов a в норме $\|a\|_1$ следует сходимость соответствующих s в норме

$$\| s \|_0 = \sup_{n \geqslant 1} | s_n |.$$

Из этого и соотношений (7) и (8) следует, что из сходимости по $\|\cdot\|$ в K_2 следует сходимость по $\|\cdot\|_0$. Очевидно также, что K_2 компактно относительно сходимости по $\|s\|_0$. Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 есть точное повторение соответствующей части доказательства теоремы 1.

4. Следующее обобщение утверждения о состоятельности относится к множеству K, совпадающему либо с K_1, либо с K_2, и случайным величинам $\{\xi_n\}$, образующим марковский процесс. Пусть ξ_n, $n \geqslant 1$ — действительный эргодический не имеющий циклических подклассов стационарный марковский процесс, удовлетворяющий условию Деблина [7]. Предположим, что $M\xi_1 = 0$, а плотность распределения вероятностей $f(x)$ величины ξ_1 и плотность вероятности перехода $f(x, y)$ удовлетворяют условиям:

A′) функции $f(x)$ и $f(x, y)$ непрерывны и положительны для всех x и (x, y) соответственно;

B′) для $|u| \leqslant 2c_0$, $|v| \leqslant 2c_0$ существует

$$M[\ln f(\xi_1 + u, \xi_2 + v) - \ln f(\xi_1, \xi_2)] = \Phi(u, v),$$

причем для последовательности $s \in K - K$

$$\overline{\lim_{N \to \infty}} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} \Phi(s_n, s_{n+1}) \leqslant -\varphi(\| s \|)$$

с некоторой положительной функцией φ такой, что $\varphi(x) \to 0$ при $x \to 0$;

C′) для значений u, v с $|u| \leqslant 2c_0$, $|v| \leqslant 2c_0$

$$|\ln f(x + u,\ y + v) - \ln f(x, y)| \leqslant F(x, y)(|u| + |v|),$$

причем

$$M|\ln f(\xi_1, \xi_2)|^2 < \infty, \quad 0 < MG(\xi_1, \xi_2) < \infty,$$

где

$$G(x, y) = \sup_{|u| \leqslant 2c_0,\ |v| \leqslant 2c_0} F(x + u,\ y + v).$$

Оценку $s^{(N)}$ для неизвестной последовательности $s^0 \in K$ определим как такое значение $s \in K$, при котором величина

$$Q'_N(s) = f(x_1 - s_1) \prod_{n=1}^{N} f(x_k - s_k,\ x_{k+1} - s_{k+1})$$

принимает наибольшее значение в K, при этом используются наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$.

Теорема 3. При выполнении условий $A') - C')$ оценка максимального правдоподобия $s^{(N)}$ для s^0 состоятельна, т. е.

$$\sup_{n \geqslant 1} | s_n^{(N)} - s_n^0 | \to 0$$

по вероятности при $N \to \infty$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. Отметим только, что при оценке дисперсии величины, аналогичной $\eta_{N,k}$, в (4) нужно использовать лемму 7 [7] об оценке зависимости величин ξ_k и ξ_m.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson T. W. The statistical analysis of time series. N. Y.—L.—S.—T., John Wiley, 1971.
2. Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В. Определение среднего для винеровского процесса по наблюдению на бесконечном интервале.— Теория вероятностей и ее применения 1973, 18, 4.
3. Ибрамхалилов И. Ш. О байесовских оценках среднего для гауссовских распределений в гильбертовом пространстве.— Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 10, 1974.
4. Холево А. С. Об оценивании функций среднего значения.— Теория вероятностей и ее применения, 17, № 3, 1972.
5. Wald A. Note on the consistency of the maximum likelihood estimate.— Ann. Math. Statist., **20**, 1949, 595—601.
6. Левитан Б. М. Почти-периодические функции, М., ГИТТЛ, 1953.
7. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., ГИТТЛ, 1956.

A. Ya. Dorogovtsev

CONSISTENT ESTIMATION OF DISCRETE SIGNAL ON OBSERVATIONS WITH RANDOM ERRORS

Summary

Let $x_n = S_n^0 + \xi_n$, $n \geqslant 1$, where ξ_n, $n \geqslant 1$ is a sequence of random independent variables with $M\xi_n = 0$ and density $f(x)$, $S_n^0 = \{S_n^0,\ n \geqslant 1\}$ is a fixed but unknown sequence which belongs to the certain compact set K of sequences. Let $S^{(N)}$ be a sequence of K for which

$$\prod_{n=1}^{N} f(x_n - S_n^{(N)}) = \max_{s \in K} \prod_{n=1}^{N} f(x_n - S_n).$$

The conditions of consistency of $S^{(N)}$ are considered.

Поступила в редколлегию 28.IV 1973.