$$+\frac{1}{B_{n_1}^q}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|x|>B_{n_1}}|x|^q|d\psi(x,y)|+\frac{1}{B_{n_2}^{q+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|y|\leqslant B_{n_2}}|y|^{q+1}|d\psi(x,y)|+$$

$$+\frac{1}{B_{n_2}^q}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{|y|>B_{n_2}}|y|^q|d\psi(x,y)|\Bigg).$$

Используя аналогичную оценку для $\sum\limits_{i,j=1,2}\gamma_{ni}^{(j)}$, получаем справедливость теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садикова С. М. Двумерные аналоги неравенства Эссеена с применением в центральной предельной теореме. — «Теория вероятн. и ее примен.», 1965, **10**, № 3, 519—526.

P. V. Slusarchuc

A PSEUDOMOMENTS UTILIZATIONS FOR CONVERGENCE SPEED ESTIMATION IN TWO-DIMENSIONAL CENTRAL LIMIT THEOREM

Summary

The paper deals with a problem named in title. If the second moments are finite the estimations are obtained.

Поступила в редколлегию 7.V 1973.

В. Н. ТУРЧИН, асп.

Днепропетровский университет

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим векторное линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t)=A\xi(t)\,dt+B\xi(t)\,dw(t), \tag{1}$$

где $A=[a_{ij}]$, $B=[B_{ij}]$, a_{ij}, $b_{ij}\in R^{(1)}$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, $\xi(t)=(\xi_1(t), \xi_2(t),\ldots,\xi_n(t))^*$, $w(t)$, $t\in[0,\infty)$ — одномерный винеровский процесс.

Как известно [1, стр. 245], если задано начальное условие $\xi(0)$ и $\xi(0)$ предполагается независимым от процесса $w(t)$, то решение (1) существует и единственно. В заметке исследуется устойчивость решений уравнения (1) при $t \to \infty$.

Асимптотика поведения решений систем стохастических уравнений общего вида изучалась И. И. Гихманом, А. В. Скороходом [1], Р. З. Хасьминским [2].

Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $\xi(0)$, $\|\xi(0)\| > 0$, B^* — матрица, транспонированная к матрице B, λ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) — собственные значения матрицы $B^* + B$, $\|\xi(t)\|$ — норма $\xi(t)$ в $R^{(n)}$,

$$\sigma = \begin{cases} \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j, \text{ если } \lambda_j > 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ или } \lambda_j < 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n); \\ 0 \qquad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема. Если собственные значения матрицы $A^* + A - B^*B$ положительны, то

$$P\{\lim_{t \to \infty} \|\xi(t)\| = \infty\} = 1.$$

Если собственные значения матрицы $A^* + A + B^*B - \frac{\sigma}{2}\sqrt{(B^* + B)^2}$ отрицательны, то

$$P\{\lim_{t \to \infty} \|\xi(t)\| = 0\} = 1.$$

Доказательство. Пусть $\zeta(t) = (\xi(t), \xi(t))$. Продифференцируем $\zeta(t)$ по формуле Ито

$$d\zeta(t) = [2(A\xi(t), \xi(t)) + B\xi(t), B\xi(t))]\, dt + 2(B\xi(t), \xi(t))\, dw(t). \tag{2}$$

Так как $\|\xi(t)\| > 0$, то в силу непрерывности следует, что на некотором промежутке $\zeta(t) > 0$, поэтому (2) можно переписать следующим образом:

$$d\zeta(t) = \zeta(t)[2(Ax(t), x(t)) + (Bx(t), Bx(t))]\, dt + \\ + 2\zeta(t)(Bx(t), x(t))\, dw(t), \tag{3}$$

где $x(t) = \dfrac{\xi(t)}{\sqrt{\zeta(t)}}$, $\|x(t)\| = 1$.

Легко проверить, что случайный процесс

$$\zeta(t) = \zeta(0) \exp\left\{\int_0^t [2(Ax(s), x(s)) + (Bx(s), Bx(s)) - 2(Bx(s), x(s))^2]\, ds + \right. \\ \left. + 2\int_0^t Bx(s), x(s))\, dw(s)\right\} \tag{4}$$

является решением уравнения (3). Из вида случайного процесса $\zeta(t)$ следует, что при всех $t > 0$ $\zeta(t) > 0$.

Оценим выражение

$$G(x) = 2(Ax, x) + (Bx, Bx) - 2(Bx, x)^2 \tag{5}$$

сверху и снизу при условии $\|x\| = 1$.

Так как $(Bx, x)^2 \leqslant (Bx, Bx)(x, x) = (B^*Bx, x)$ то

$$G(x) \leqslant ((A^* + A - B^*B)x, x). \tag{6}$$

Очевидно, что

$$((B^* + B)x, x)^2 \geqslant \sigma(\sqrt{(B^* + B)^2}\, x, x).$$

Отсюда получаем

$$G(x) \leqslant \left(\left(A^* + A + B^*B - \frac{\sigma}{2}\sqrt{(B^* + B)^2}\right)x, x\right). \tag{7}$$

Покажем, что с вероятностью единица $\frac{1}{t}\int\limits_0^t (Bx(s), x(s))\, dw(s)$ сходится к нулю. $(Bx(s), x(s)) = (Bx, x)$ — непрерывная функция, заданная на компакте $\|x\| = 1$, поэтому $|(Bx(s), x(s)| \leqslant C < \infty$, $s \in [0, \infty)$. Обозначим $(Bx(s), x(s))$ через $b(s)$. Пользуясь неравенством Чебышева и свойством стохастического интеграла [1, стр. 20], имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t b(s)\, dw(s)\right| > \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{2n}\varepsilon^2} M\left[\sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]}\left|\int\limits_0^t b(s)\, dw(s)\right|\right]^2 \leqslant \frac{4C^2}{\varepsilon^2 2^{n+1}}.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 2^{n-1}}$ сходится, поэтому последовательность

$$\sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t b(s)\, dw(s)\right|$$

сходится с вероятностью единица к нулю [3, стр. 20]. Отсюда получаем

$$P\left\{\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\left|\int\limits_0^t b(s)\, dw(s)\right| = 0\right\} = 1. \tag{8}$$

Пусть собственные значения матрицы $A^* + A - B^*B$ положительны, тогда $((A^* + A - B^*B)\,x, x) \geqslant a > 0$. Из (4), учитывая (6), получаем

$$\zeta(t) \geqslant \zeta(0) \exp\left\{t\left(a + \frac{2}{t}\int_0^t (Bx(s), x(s))\,dw(s)\right)\right\}.$$

На основании этого неравенства, учитывая (8), получаем

$$P\{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty\} = 1.$$

Пусть собственные значения матрицы $A^* + A + B^*B - \frac{\sigma}{2}\sqrt{(B^* + B)^2}$ отрицательны, тогда

$$\left(\left(A^* + A + B^*B - \frac{\sigma}{2}\sqrt{(B^* + B)^2}\right)x, x\right) \leqslant l < 0.$$

Из (4), учитывая (7), получаем

$$\zeta(t) \leqslant \zeta(0) \exp\left\{t\left(l + \frac{2}{t}\int_0^t (Bx(s), x(s))\,dw(s)\right)\right\}.$$

Из последнего неравенства и (8) следует, что

$$P\{\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = 0\} = 1.$$

А так как $\zeta(t) = \|\xi(t)\|^2$, то теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, «Наукова думка», 1968.

2. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., «Наука», 1969.

3. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1969.

V. N. Turchin

ON STABILITY OF SYSTEMS OF LINEAR STOCHASTIC EQUATIONS

Summary

The paper contains some sufficient conditions for stability and unstability of systems of linear stochastic differential equations.

Поступила в редколлегию 27.XII 1973.