А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, доц. (*Киевский университет*),
П. С. КНОПОВ, ст. научн. сотр. (*Институт кибернетики АН УССР*)

ОЦЕНКА ДВУМЕРНОГО СИГНАЛА ПО НАБЛЮДЕНИЮ С АДДИТИВНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ

В настоящей статье изучаются свойства одной оценки периодической по обеим переменным функции, наблюдаемой на расширяющейся части плоскости со случайными ошибками типа «белого шума». При исследовании свойств оценки существенно используются свойства стохастических интегралов по винеровской мере; детальное обсуждение этих свойств для таких и более общих стохастических интегралов содержатся в работах [1—3]. Аналогичная одномерная задача изучалась в работах [4—6].

1. **Введение.** Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы действительное случайное поле $\{x(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ и стандартное винеровское поле $\{w(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ [1]. Рассмотрим задачу об оценке неизвестной функции a_0 на основании наблюдений в прямоугольнике $[0, S] \times [0, T]$ случайного поля $\{x(s, t), y(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$, где поле $\{y(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ имеет следующий вид:

$$y(s, t) = \int_0^s \int_0^t a_0(u, v)\, x(u, v)\, du dv + w(s, t), \quad s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что поля $\{x(s, t)$ и $w(s, t)\}$ независимы.

Нам понадобится понятие стохастического интеграла относительно поля $\{y(s, t)\}$ или по винеровскому полю $\{w(s, t)\}$. Свойства таких интегралов подробно описаны в работе [1], где можно найти дальнейшие ссылки. Будем использовать также интеграл типа $\int_0^s \int_0^t z(u, v)\, w(du, dv)$ от поля $\{z(s, t)\}$, которое не зависит от поля $\{w(s, t)\}$. При определенных условиях гладкости на выборочные функции поля $\{z(s, t)\}$ такой интеграл можно определить и с помощью интегрирования по частям, причем, как и в одномерном случае, этот интеграл и определенный с помощью обычной конструкции [1] совпадают с вероятностью 1.

Сформулируем основные, нужные нам свойства таких интегралов после перечня условий на функцию a_0 и поле $\{x(s, t)\}$.

1.1. Функция a_0 является элементом K-множества всех действительных функций, которые определены в плоскости, 2π-периодические по обеим переменным и коэффициенты Фурье которых

$$c_{kl}(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s, t)\, e^{iks} e^{ilt} ds dt,$$

$$k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, a \in K$$

удовлетворяют неравенствам $|c_{00}(a)| \leqslant L$, $|c_{k0}(a)|\, |k|^{\alpha} \leqslant L$, $|c_{0l} \times \times (a)|\, |l|^{\beta} \leqslant L$, $|c_{kl}(a)|\, |k|^{\alpha} |l|^{\beta} \leqslant L$, $kl \neq 0$ с некоторыми числами: $L > 0$, $\alpha > 3$, $\beta > 3$.

Множество K есть множество функций, имеющих непрерывные частные производные второго порядка в плоскости. Оно компактно относительно равномерной сходимости на плоскости.

Этим же свойством обладает множество производных $\left\{\frac{\partial^2 a}{\partial s \partial t}, a \in K\right\}$. Для функции $a \in K$ положим

$$\| a \|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a^2(s, t)\, ds dt.$$

Назовем элемент $a_0 \in K$ внутренней точкой множества K, если удовлетворяются следующие неравенства:

$$|c_{00}(a_0)| \leqslant \tilde{L}, \quad |c_{k0}(a_0)|\, |k|^{\alpha} \leqslant \tilde{L},$$

$$|c_{0l}(a_0)|\, |l|^{\beta} \leqslant \tilde{L}, \; |c_{kl}(a_0)|\, |k|^{\alpha} |l|^{\beta} \leqslant \tilde{L}, \; kl \neq 0$$

с некоторым числом $\tilde{L} < L$.

1.2. $\{w(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ — стандартное винеровское поле, причем поля $\{x(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ и $\{w(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ являются независимыми.

1.3. $\{x(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ — действительное поле, выборочные функции которого имеют непрерывные частные производные второго порядка с вероятностью 1. Случайное поле $\{x^2(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0$ является однородным в широком смысле, причем $M\, x^2(0, 0) > 0$.

Пусть $r(s, t) = M\{[x^2(s, t) - Mx^2(0, 0)][x^2(0, 0) - Mx^2(0, 0)]\}$ — корреляционная функция поля $\{x^2(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$.

1.4. При некоторых $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ для всех $s \geqslant 1$, $T \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\int_0^S \int_0^T |r(s, t)|\, ds dt \leqslant L_1 S^{1-\gamma_1} T^{1-\gamma_2}.$$

1.5. Для некоторого положительного числа L_2

$$|r(s, t)| \leqslant \frac{L_2}{(1+s^2)(1+t^2)}, \quad (s, t) \in R \times R.$$

При условиях 1.1 и 1.3 для любой функции $a \in K$, положив $z = ax$, определим стохастический интеграл

$$I(s, t) = \int_0^s \int_0^t a(u, v)\, x(u, v)\, w(du, dv)$$

с помощью следующей формулы интегрирования по частям:

$$I(s, t) = \int_0^s \int_0^t z(u, v)\, w(du, dv) = \int_0^s \int_0^t \frac{\partial^2 z(u, v)}{\partial u \partial v} w(u, v)\, du dv -$$

$$- \int_0^s \frac{\partial z(u, t)}{\partial u} w(u, t)\, du - \int_0^t \frac{\partial t(s, v)}{\partial v} w(s, v)\, dv + z(s, t)\, w(s, t).$$

Из этого определения следуют равенства

$$M\left\{\int_0^s \int_0^t z(u, v)\, w(du, dv)\right\} = 0,$$

$$M\left\{\int_0^s \int_0^t z(u, v)\, w(du, dv)\right\}^2 = \int_0^s \int_0^t Mz^2(u, v)\, du dv \qquad (1)$$

(см. также [1]).

Используя формулу Ито для интеграла [7, 8], можно доказать полезное неравенство

$$M\left[\int_0^S \int_0^T z(s, t)\, w(ds, dt)\right]^{2m} \leqslant$$

$$\leqslant [m(2m-1)]^{m-1} S^{m-1} T^{m-1} \int_0^S \int_0^T Mz^{2m}(s, t)\, ds dt.$$

Следующее нужное нам свойство стохастических интегралов является свойством общих двумерных субмартингалов и мартингалов, изученных в работе [2] (см. также [1]).

Пусть $\{\xi(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ — случайное поле, $\{F_{st},\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, $F_{st} \subset F_{s_1 t_1}$, если $s \leqslant s_1$, $t \leqslant t_1$. Введем обозначения $G_{s\cdot} = \sigma\{F_{st},\ t \geqslant 0\}$, $G_{\cdot t} = \sigma\{F_{st},\ s \geqslant 0\}$, $G_{st} = \sigma\{G_{s\cdot}, G_{\cdot t}\}$, $\square_{(s_1 t_1)} \xi(s, t) = \xi(s_1, t_1) - \xi(s_1, t) - \xi(s, t_1) + \xi(s, t)$.

Определение [2]. Случайное поле $\{\xi(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ будем называть $\{F_{st}\}$- $\square$-субмартингалом (мартингалом) если:

а) $\xi(s, t)$, $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ — F_{st}-измеримая случайная величина;

б) $M\{\square_{(s_1,t_1)}\xi(s, t)/G_{st}\} \geqslant 0\ (=0)$, $0 \leqslant s \leqslant s_1$, $0 \leqslant t \leqslant t_1$;

в) семейства $\{\xi(s, 0), G_{s\cdot}, s \geqslant 0\}$, $\{\xi(0, t), G_{\cdot t}, t \geqslant 0\}$ являются субмартингалами (мартингалами).

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $\{\xi(s, t), F_{st}, (s, t) \in [0, S] \times [0, T]\}$ — непрерывный с вероятностью 1 $\square$-субмартингал, причем $M|\xi(s, t)|^p < \infty$; $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $p > 1$. Тогда имеет место неравенство

$$M(\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} \xi(s, t))^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p} \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} M(\xi^+(s, t))^p,$$

$$\xi^+(s, t) = \max\{0, \xi(s, t)\}.$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству такого же неравенства в случае дискретного аргумента [2] (см. также [1]). Пусть $\sup\limits_{t\in[0,T]} \xi(s, t) = \eta(s)$. Тогда $\{\eta(s), G_{s\cdot}, s \geqslant 0\}$ является субмартингалом. Пусть

$$\xi^0 = \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} \xi(s, t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant S}\ \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \xi(s, t).$$

Тогда $\xi^0 = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant S} \eta(s)$. Поэтому [9]

$$M(\sup_{0\leqslant s\leqslant S} \eta(s))^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0\leqslant s\leqslant s} M(\eta^+(s))^p, \tag{2}$$

$$\eta^+(s) = \max\{0, \eta(s)\}.$$

Кроме того, при s фиксированном имеем

$$M(\eta^+(s))^p = M(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \xi^+(s, t)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0\leqslant t\leqslant T} M(\xi^+(s, t))^p. \tag{3}$$

Из (2), (3) следует утверждение леммы.

Следствие. Пусть $\{\xi(s, t)\}$ является $\square$-мартингалом. Тогда

$$M(\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} |\xi(s, t)|^p) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p} \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} M|\xi(s, t)|^p.$$

Из результатов [1, 3] следует, что стохастический интеграл $\{I(s, t), s \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ является непрерывным с вероятностью 1 $\square$-мартингалом. Поэтому из следствия получаем такую оценку:

$$M\left(\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant S\\0\leqslant t\leqslant T}} \left|\int_0^s\int_0^t z(u, v)\, w(du, dv)\right|^2\right) \leqslant 16 \int_0^S\int_0^T Mz^2(u, v)\, dudv. \tag{4}$$

2. Строгая состоятельность оценки. Пусть $\{y(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ — случайное поле вида

$$y(s, t) = \int_0^s \int_0^t a_0(u, v)\, x(u, v)\, du dv + w(s, t)$$

с фиксированной функцией $a_0 \in K$. Рассмотрим задачу об оценке функции $a_0 \in K$ на основании наблюдений $\{x(s, t),\ y(s, t),\ 0 \leqslant s \leqslant S,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

В качестве оценки для функции a_0 рассмотрим элемент a_{ST}, определяемый следующим образом: a_{ST} является какой-нибудь функцией из K, минимизирующей функционал

$$Q_{ST}(a) = \frac{1}{ST} \int_0^S \int_0^T a(u, v)\, x(u, v)\, y(du, dv) - \\ - \frac{1}{2ST} \int_0^S \int_0^T a^2(u, v)\, x^2(u, v)\, du dv$$

на множестве K. В предположении 1.1 максимум функционала Q_{ST} на K достигается. С помощью теоремы Дуба [10] можно также показать, что $\{a_{ST}(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ является сепарабельным измеримым полем. Функционал Q_{ST} может быть представлен также в виде

$$Q_{ST}(a) = \frac{1}{ST} \int_0^S \int_0^T [a(u, v) - a_0(u, v)]\, x(u, v)\, w(du, dv) - \\ - \frac{1}{2ST} \int_0^S \int_0^T [a(u, v) - a_0(u, v)]^2 x^2(u, v)\, du dv + Q_{ST}(a_0).$$

В дальнейшем для простоты будем считать $S = T$ и будем обозначать $a_{TT} = a_T$, $Q_{ST} = Q_T$.

Следующее утверждение является основой для доказательства состоятельности оценки a_T.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1.1 — 1.3 Тогда при любом $\gamma > 0$ справедливо соотношение

$$P\left\{\lim_{T\to\infty} \max_{a\in K} \left| \frac{1}{T^{1+\gamma}} \int_0^T \int_0^T a(u, v)\, x(u, v)\, w(du, dv) \right| = 0\right\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим для $T > 0$

$$\eta_T = \max_{a\in K} \left| \frac{1}{T^{1+\gamma}} \int_0^T \int_0^T a(u, v)\, x(u, v)\, w(du, dv) \right|.$$

Оценим $M\eta_T^2$. Из разложения в ряд Фурье функции a и условия 1.1 получаем

$$M\eta_T^2 \leqslant M\left\{\max_{a\in K}\left|\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk}(a)\frac{1}{T^{1+\gamma}}\int_0^T\int_0^T e^{i(ju+kv)}x(u, v)\,w(du, dv)\right|^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\left[\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{T^{1+\gamma}|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\left|\int_0^T\int_0^T e^{i(ju+kv)}x(u, v)\,w(du, dv)\right|\right]^2\right\}.$$

Здесь «$'$» у знака суммы означает, что вместо «$|j|^{-\alpha}$» при $j=0$ или «$|k|^{-\beta}$» при $k=0$ следует читать «1». Из свойств стохастического интеграла (1) получаем

$$M\eta_T^2 \leqslant \left\{\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{T^{1+\gamma}|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\left[M\left|\int_0^T\int_0^T e^{i(ju+kv)}x(u, v)\,w\,\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(du, dv)\right|^2\right]^{1/2}\right\}^2 \leqslant C_1T^{-2\gamma}, \tag{5}$$

$$C_1 = \left(\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\right)^2 Mx^2(0, 0).$$

Пусть p — целое фиксированное число такое, что $2p\gamma > 1$. Из оценки (5) для последовательности случайных величин $\{\eta_{T(n)}, n \geqslant 1\}$ со значениями $T(n) = n^p$, $p \geqslant 1$ на основании леммы Бореля — Кантелли имеем

$$P\{\lim_{n\to\infty}\eta_{T(n)} = 0\} = 1. \tag{6}$$

Пусть теперь $T \in [T(n), T(n+1)]$. Тогда, очевидно, имеем

$$\eta_T \leqslant \eta_{T(n)} + \zeta_n, \tag{7}$$

где $\zeta_n = \zeta_{1n} + \zeta_{2n}$ и

$$\zeta_{1n} = \frac{1}{T(n)^{1+\gamma}}\max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)}\max_{a\in K}\left|\int_{T(n)}^{T}\int_0^T a(u, v)\,x(u, v)\,w(du, dv)\right|,$$

$$\zeta_{2n} = \frac{1}{T(n)^{1+\gamma}}\max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)}\max_{a\in K}\left|\int_0^{T(n)}\int_{T(n)}^{T} a(u, v)\,x(u, v)\,w(du, dv)\right|.$$

Для $M\zeta_{1n}^2$ сначала имеем неравенство

$$M\zeta_{1n}^2 \leqslant \frac{1}{T(n)^{2(1+\gamma)}} M \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^{\alpha}|k|^{\beta}} \max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)} \times$$

$$\times \left| \int_{T(n)}^{T}\int_{0}^{T} e^{i(ju+kv)} x(u, v)\, w(du, dv) \right|\Bigg]^2\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T(n)^{2(1+\gamma)}} \left\{ \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^{\alpha}|k|^{\beta}} \left[M \max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)} \int_{T(n)}^{T}\int_{0}^{T} e^{iju} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\, e^{ikv} x(u, v)\, w(du, dv) \right|^2 \right]^{1/2} \Bigg\}^2.$$

С учетом оценки

$$M\left\{ \max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)} \left| \int_{T(n)}^{T}\int_{0}^{T} e^{i(ju+kv)} x(u, v)\, w(du, dv) \right|^2 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant 16T(n+1)[T(n+1) - T(n)]\, Mx^2(0, 0),$$

которая является следствием неравенства (4), имеем

$$M\zeta_{1n}^2 \leqslant 16C_1 \frac{T(n+1)[T(n+1) - T(n)]}{T(n)^{2(1+\gamma)}} = 16C_1 \frac{T(n+1) - T(n)}{T(n)^{1+2\gamma}} \times$$

$$\times \frac{T(n+1)}{T(n)} = \frac{16C_1}{n^{2p\gamma}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right] \left(\frac{n+1}{n} \right)^p.$$

Таким образом,

$$P\{\lim_{n\to\infty} \zeta_{1n}^2 = 0\} = 1. \tag{8}$$

Аналогично можно показать, что

$$P\{\lim \zeta_{2n}^2 = 0\} = 1. \tag{9}$$

Из (6) — (9) следует утверждение леммы.

Замечание 1. Утверждение леммы 2 верно и в случае, когда вместо функции $a \in K$ стоит разность функций из K.

Лемма 3. Пусть $\{\xi(u, v), (u, v) \in R \times R\}$ — действительное однородное поле со средним нуль и корреляционной функцией $r(u, v) = M\{\xi(u, v)\, \xi(0, 0)\}$, $(u, v) \in R \times R$ такой, что для всех $T > 1$ справедливо неравенство

$$\int_0^T\int_0^T |r(u, v)|\, du dv \leqslant L_8 T^{2-\delta}$$

с некоторыми положительными числами L_3 и δ. Тогда

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\sup_{a\in K}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T a(u, v)\,\xi(u, v)\,du\,dv\right| = 0\right\} = 1.$$

Доказательство. Пусть для $T>0$

$$\tilde{\eta}_T = \sup_{a\in K}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T a(s, t)\,\xi(s, t)\,ds\,dt\right|$$

и для $n \geqslant 1$

$$\tilde{\zeta}_n = \max_{T(n)\leqslant T\leqslant T(n+1)} \tilde{\eta}_T$$

с последовательностью $\{T(n) = n^p, n \geqslant 1\}$, где p — фиксированное число, удовлетворяющее условию $\delta p > 1$. Разлагая a в ряд Фурье, получаем

$$\tilde{\eta}_T = \sup_{a\in K}\left|\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk}(a)\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T e^{i(ju+kv)}\xi(u, v)\,du\,dv\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T e^{i(ju+kv)}\xi(u, v)\,du\,dv\right|, \qquad (10)$$

причем ряд в правой части (10) сходится с вероятностью 1. Для величины $\tilde{\zeta}_n$ справедливы неравенства

$$\tilde{\zeta}_n \leqslant \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{T^2(n)|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\left|\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)} e^{i(ju+kv)}\xi(u, v)\,du\,dv\right| +$$

$$+ \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{T^2_{(n)}|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\int_{T(n)}^{T(n+1)}\int_0^{T(n+1)} |\xi(u, v)|\,du\,dv +$$

$$+ \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \frac{L}{T^2(n)|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\int_0^{T(n)}\int_{T(n)}^{T(n+1)} |\xi(u, v)|\,du\,dv = \tilde{\zeta}_{1n} + \tilde{\zeta}_{2n} + \tilde{\zeta}_{3n}.$$

Оценим $M[\tilde{\zeta}_{1n}]^2$:

$$M[\tilde{\zeta}_{1n}]^2 \leqslant \left\{\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^{\alpha}|k|^{\beta}}\left[M\left|\frac{1}{T(n)^2}\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)} e^{i(ju+kv)}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\,\xi(u, v)\,du\,dv\right|^2\right]^{1/2}\right\}^2.$$

В силу условий леммы 3

$$M\left\{\frac{1}{T(n)^4}\left|\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)} e^{i(ju+kv)}\xi(u, v)\,dudv\right|^2\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T(n)^4}\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)}\int_0^{T(n)} |r(u-\bar{u}, v-\bar{v})|\,dudvd\bar{u}d\bar{v} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T(n)^2}\int_0^T\int_0^T |r(s, t)\,dsdt \leqslant \frac{4L_3}{T^\delta}.$$

Из этой оценки получаем

$$M[\tilde{\zeta}_{1n}]^2 \leqslant \frac{C_2}{T(n)^\delta} = \frac{C_2}{n^{\delta\rho}}, \tag{11}$$

где

$$C_2 = 4L_3\left(\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{L}{|j|^\alpha |k|^\beta}\right)^2.$$

С помощью оценки (11) и леммы Бореля — Кантелли имеем

$$P\{\lim_{n\to\infty}\tilde{\zeta}_{1n} = 0\} = 1. \tag{12}$$

Аналогично получаем

$$P\{\lim_{n\to\infty}\tilde{\zeta}_{2n} = 0\} = 1, \quad P\{\lim_{n\to\infty}\tilde{\zeta}_{3n} = 0\} = 1. \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует утверждение леммы 3.

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия 1.1 — 1.4. Тогда справедливо соотношение

$$P\{\lim_{T\to\infty}\max_{(s,t)\in R\times R}|a_T(s, t) - a_0(s, t)| = 0\} = 1.$$

Доказательство. По определению оценки a_T

$$Q_T(a_T) = \max_{a\in K} Q_T(a).$$

Поэтому $Q_T(a_T) \geqslant Q_T(a_0)$, откуда получаем неравенство

$$Q_T(a_T) - Q_T(a_0) = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [a_T(s, t) - a_0(s, t)]\,x(s, t)\,w(ds, dt) -$$

$$-\frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T [a_T(s, t) - a_0(s, t)]^2 x^2(s, t)\,dsdt \geqslant 0.$$

Простым следствием этого неравенства является такое соотношение:

$$\max_{a\in K}\left|\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [a(s,t)-a_0(s,t)]\,x(s,t)\,w(ds,dt)\right|+$$

$$+\max_{a\in K}\left|\frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T [a(s,t)-a_0(s,t)]^2\left[x^2(s,t)-Mx^2(0,0)\,dsdt\right]\right|^2\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2T^2}\int_0^T\int_0^T [a_T(s,t)-a_0(s,t)]^2\,dsdt\cdot Mx^2(0,0). \tag{14}$$

Оба слагаемых левой части неравенства (14) стремятся к 0 при $T\to\infty$ с вероятностью 1: первое — в силу леммы 2, а второе — в силу леммы 3. Поэтому

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [a_T(s,t)-a_0(s,t)]^2\,dsdt=0\right\}=1.$$

Таким образом, имеем

$$P\{\lim_{T\to\infty}\|a_T(s,t)-a_0(s,t)\|=0\}=1. \tag{15}$$

Используя компактность множества K относительно равномерной сходимости или неравенство Гельдера из (15), получаем утверждение теоремы.

3. **Асимптотическая нормальность.** Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. Пусть b—действительная, определенная на плоскости функция, 2π-периодическая по каждому аргументу и удовлетворяющая условиям:

1) b — непрерывна и ограничена в точках множества $[0, 2\pi]\times\times[0, 2\pi]$, исключая, возможно, конечное число отрезков вида $s=\mathrm{const}$ или $t=\mathrm{const}$;

2) $\|b\|=1$;

3) точка $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(s,t)\,a_0(s,t)\,dsdt$ является внутренней точкой отрезка

$$I=\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(s,t)\,a(s,t)\,dsdt,\ a\in K\right\}.$$

Предположим также, что выполнены условия 1.1 — 1.5. Тогда распределение случайной величины

$$T\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[a_T(s,t)-a_0(s,t)]\,b(s,t)\,dsdt$$

слабо сходится при $T \to \infty$ к нормальному распределению со средним 0 и дисперсией $[Mx^2(0, 0)]^{-1}$.

Доказательство. Для любой $a \in K$ определим действительное число $\theta(a)$:

$$\theta(a) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(s, t)\, b(s, t)\, ds dt.$$

Для функций a имеет место представление

$$a(s, t) = \theta(a)\, b(s, t) + q_a(s, t), \quad (s, t) \in R \times R$$

с функцией $q_a = a - \theta(a)\, b$, причем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} q_a(s, t)\, b(s, t)\, ds dt = 0.$$

Будем рассматривать функционал $Q_T(a)$, $a \in K$ как функцию действительного параметра $\theta(a)$, $a \in K$:

$$Q_T(\theta(a)) = Q_T(a) = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\theta(a)\, b(s, t) + q_a(s, t)]\, x(s, t)\, w(ds, dt) +$$

$$+ \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\theta(a)\, b(s, t) + q_a(s, t)]\, a_0(s, t)\, x^2(s, t)\, ds dt -$$

$$- \frac{1}{2T^2} \int_0^T \int_0^T [\theta(a)\, b(s, t) + q_a(s, t)]^2 x^2(s, t)\, ds dt.$$

По определению a_T, $Q_T(a_T) \geqslant Q_T(a)$, $a \in K$, поэтому

$$Q_T(\theta(a_T)) \geqslant Q_T(\theta(a_0)). \tag{16}$$

При условиях леммы 4 выполнены условия теоремы 1 и, согласно последней справедливо соотношение

$$P\{\lim_{T \to \infty} \theta(a_T) = \theta(a_0)\} = 1.$$

Из условия 3) леммы 4 на функцию b следует, что значение $\theta(a_T)$ является внутренней точкой отрезка I с вероятностью, стремящейся к 1 при $T \to \infty$. С этой же вероятностью $\theta(a_T)$ в силу (16) удовлетворяет равенству

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T b(s, t)\, x(s, t)\, w(ds, dt) = [\theta(a_T) - \theta(a_0)] \times$$

$$\times \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T b^2(s,t)\,x^2(s,t)\,dsdt + \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)] \times$$
$$\times x^2(s,t)\,dsdt. \tag{17}$$

Следовательно, предельное распределение величины $T[\theta(a_T) - \theta(a_0)]$ при $T\to\infty$ совпадает с предельным распределением величины $T[\tilde\theta(a_T) - \tilde\theta(a_0)]$, которая определяется из (17):

$$T[\tilde\theta(a_T) - \theta(a_0)] = \left[\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T b^2(s,t)\,x^2(s,t)\,dsdt\right]^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T b(s,t)\,x(s,t)\,w(ds,dt) -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt\right\}. \tag{18}$$

Поскольку при условиях леммы 4 условия леммы 3 также выполнены, то

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T b^2(s,t)\,x^2(s,t)\,dsdt \to Mx^2(0,0) \tag{19}$$

по вероятности при $T\to\infty$.

Проверим, что интеграл

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt = \eta_{1T} + \eta_{2T} + \eta_{3T} + \eta_{4T}$$

сходится по вероятности к 0 при $T\to\infty$, при $N = \left[\frac{T}{2\pi}\right]$

$$\eta_{1T} = \frac{1}{T}\int_{2\pi N}^{T}\int_{2\pi N}^{T} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt,$$

$$\eta_{2T} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_{2\pi N}^{T} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt,$$

$$\eta_{3T} = \frac{1}{T}\int_{2\pi N}^{T}\int_0^{2\pi N} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt,$$

$$\eta_{4T} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi N} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t) - q_{a_0}(s,t)]\,x^2(s,t)\,dsdt.$$

Сходимость величины η_{1T} к 0 по вероятности при $T \to \infty$ легко проверяется непосредственно. Рассуждения, относящиеся к величинам η_{2T} и η_{3T}, аналогичны. Поэтому рассмотрим только величину

$$\eta_{2T} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_{2\pi N}^{T} b(s, t)\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\,x^2(s, t)\,dsdt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_{2\pi N}^{T} b(s, t)\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\,[x^2(s, t) - Mx^2(0, 0)]\,dsdt +$$

$$+ \frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_{2\pi N}^{T} b(s, t)\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\,dsdt\cdot Mx^2(0, 0) = \eta'_{2T} + \eta''_{2T}. \tag{20}$$

На основании неравенства Коши и простых преобразований получим

$$M|\eta''_{2T}| \leqslant Mx^2(0, 0)\frac{1}{T}\left[\int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi} b^2(s, t)\,dsdt\right]^{1/2}\times$$

$$\times\left[\int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi} M\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s. t)]^2\,dsdt\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi}\,Mx^2(0, 0)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]^2\,dsdt\right]^{1/2}.$$

При любых фиксированных s, $tM\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]^2 \to 0$, $T \to \infty$ в силу теоремы Лебега, так как $q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t) \to 0$, $T \to \infty$ с вероятностью 1. Поэтому по теореме Лебега $M|\eta''_{2T}| \to 0$, $T \to \infty$. Рассмотрим теперь оценку для $M|\eta'_{2T}|$:

$$M\left|\frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_{2\pi N}^{T} b(s, t)\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\,[x^2(s, t) - Mx^2(0, 0)]\,dsdt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left|\frac{1}{N}\int_0^{2\pi}\int_{2\pi N}^{T} b(s, t)\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\sum_{k=0}^{N-1}[x^2(s + 2k\pi, t) -\right.$$

$$\left. - Mx^2(0, 0)]\,dsdt\right| \leqslant \left\{\int_0^{2\pi}\int_{2\pi N}^{T} b^2(s, t)\,M\,[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]^2 dsdt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{2\pi}\int_{2\pi N}^{T} M\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[x^2(s + 2k\pi, t) - Mx^2(0, 0)\right]^2 dsdt\right\}^{1/2}. \tag{21}$$

Как и при оценке величины $M|\eta''_{2T}|$, легко проверить, что первый множитель правой части (21) стремится к 0 при $T\to\infty$, а второй — равномерно по $T\geqslant 2\pi$ ограничен. Таким образом, величина $M|\eta'_{2T}|\to 0,\ T\to\infty$.

Следовательно, $\eta_{2T}\to 0,\ T\to\infty$ по вероятности.

Величину η_{4T} в силу равенства

$$\int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi N} b(s,t)\left[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)\right]ds\,dt=0$$

можно представить в виде

$$\eta_{4T}=\frac{1}{T}\int_0^{2\pi N}\int_0^{2\pi N} b(s,t)\left[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)\right]\left[x^2(s,t)-Mx^2(0,0)\right]ds\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(s,t)\left[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)\right]\times$$

$$\times\frac{1}{T}\sum_{j,k=0}^{N-1}\left[x^2(s+2j,\pi,t+2k\pi)-Mx^2(0,0)\right]ds\,dt,$$

откуда с помощью неравенства Коши получим

$$M|\eta_{4T}|\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b^2(s,t)\,M\left[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)\right]^2 ds\,dt\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\left(\frac{1}{N}\sum_{j,k=0}^{N-1}\left[x^2(s+2j\pi,t+2k\pi)-Mx^2(0,0)\right]\right)^2 ds\,dt\right\}^{1/2}. \quad (22)$$

Первый множитель правой части (22) стремится к 0 при $T\to\infty$. На основании условия 1.5 для второго множителя получаем

$$\frac{1}{N^2}M\left(\sum_{j,k=0}^{N-1}\left[x^2(s+2j\pi,t+2k\pi)-Mx^2(0,0)\right]\right)^2=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{j_1,j_2=0}^{N-1}\ \sum_{k_1,k_2=0}^{N-1} M\left\{\left[x^2(s+2j_1\pi,t+2k_1\pi)-Mx^2(0,0)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[x^2(s+2j_2\pi,t+2k_2\pi)-Mx^2(0,0)\right]\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L_2}{N^2}\sum_{j_1,j_2=0}^{N-1}\ \sum_{k_1,k_2=0}^{N-1}\frac{1}{1+(j_1-j_2)^2 4\pi^2}\cdot\frac{1}{1+(k_1-k_2)^2 4\pi^2}\leqslant C$$

с постоянной C, не зависящей от N. Таким образом, $M|\eta_{4T}| \to 0$, $T \to \infty$, а $\eta_{4T} \to 0$, $T \to \infty$ по вероятности.

Докажем теперь, что величина

$$\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T b(s, t)\, x(s, t)\, w(ds, dt) = \lambda_T$$

асимптотически нормальна при $T \to \infty$. Для этого можно рассмотреть характеристическую функцию величины λ_T

$$\varphi_T(u) = Me^{iu\lambda_T} = M\{M_x[e^{iu\lambda_T}]\},$$

где M_x обозначает условное математическое ожидание относительно $\sigma\{x(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$.

В силу независимости полей $\{w(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ и $\{x(s, t),\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\}$ получаем

$$\varphi_T(u) = M\exp\left\{-\frac{u^2}{2T^2}\int_0^T\int_0^T b^2(s, t)\, x^2(s, t)\, ds dt\right\}, \quad u \in R,$$

откуда, учитывая соотношение (19) и применяя теорему Лебега, для каждого $u \in R$ имеем

$$\lim_{T\to\infty}\varphi_T(u) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2} Mx^2(0, 0)\right\}.$$

Утверждение леммы 4 следует теперь обычным образом из (19), асимптотической нормальности величины λ_T и сходимости к 0 величин η_{iT}, $i=1, 2, 3, 4$ при $T \to \infty$.

Теорема 2. Предположим, что условия 1.1—1.5 выполнены и a_0 является внутренней точкой множества K. Тогда конечномерные распределения случайного поля

$$\left\{\frac{T}{2\pi}\sqrt{MX^2(0, 0)}\int_0^s\int_0^t [a_T(u, v) - a_0(u, v)]\, du dv, \quad 0 \leq s,\ t \leq 2\pi\right\}$$

слабо сходятся при $T \to \infty$ к соответствующим конечномерным распределениям стандартного винеровского поля на множестве $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Утверждение теоремы 2 является следствием леммы 4 и доказывается обычным образом [11].

4. **Слабая сходимость мер, отвечающих оценке.** В том случае, когда $x(s, t) = 1$ для всех $s, t \in R$, для оценки a_T имеет место более сильное утверждение, чем теорема 2. Для доказательства этого утверждения нам нужна следующая лемма.

Лемма 5. Пусть выполнены условия 1.1,—1.5 и a_0 есть внутренняя точка множества K. Тогда существует число C такое, что при всех $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 2\pi$, $T \geqslant 4\pi$ выполняется неравенство

$$M\left\{T\int\limits_{s_1}^{s_2}\int\limits_{t_1}^{t_2}[a_T(u, v) - a_0(u, v)]\,du\,dv\right\}^6 \leq C[(s_2 - s_1)^3 + (t_2 - t_1)^3]. \tag{23}$$

Доказательство. Для доказательства (23) достаточно доказать неравенство

$$M\{T[\theta(a_T) - \theta(a_0)]\}^6 \leq C$$

для функции b, определяемой на $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ равенством

$$b(u, v) = 2\pi(s_2 - s_1)^{-\frac{1}{2}}(t_2 - t_1)^{-\frac{1}{2}}\chi_{[s_1,s_2]}(u)\chi_{[t_1,t_2]}(v),$$

$$0 \leq s_1 < s_2 \leq 2\pi, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$$

с постоянной C, не зависящей от T, s_1, s_2, t_1, t_2.

Пусть $\nu(T) = M\{\max\limits_{(s,t)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]}|a_T(s, t) - a_0(s, t)|^6\}$. Из теоремы 1 и теоремы Лебега следует, что $\nu(T) \to 0$, $T \to \infty$.

Пусть число C' таково, что $\sqrt[3]{\nu(T)} \leq C'$. Легко проверить, что

$$\rho_T = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T b^2(s, t)\,ds\,dt > \frac{4}{9}.$$

Заметим, что случайная величина

$$\lambda_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T b(s, t)\,w(ds, dt)$$

имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией

$$M\lambda_T^2 = \frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T b^2(s, t)\,ds\,dt \leq \frac{9}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$M(\rho_T^{-1}\lambda_T)^6 \leq C'', \tag{24}$$

где C'' — некоторая постоянная.

Рассмотрим с учетом определения функций q_{a_T} и q_{a_0} следующую величину:

$$\mu_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^T b(s, t)[q_{a_T}(s, t) - q_{a_0}(s, t)]\,ds\,dt = \mu_{1T} + \mu_{2T} + \mu_{3T},$$

где для $N = \left[\frac{T}{2\pi}\right]$

$$\mu_{1T}=\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{2\pi N}\int\limits_{2\pi N}^{T} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)]\,dsdt,$$

$$\mu_{2T}=\frac{1}{T}\int\limits_{2\pi N}^{T}\int\limits_{0}^{2\pi N} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)]\,dsdt,$$

$$\mu_{3T}=\frac{1}{T}\int\limits_{2\pi N}^{T}\int\limits_{2\pi N}^{T} b(s,t)\,[q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)]\,dsdt.$$

Для $M\,|\mu_{1T}|^6$ имеем

$$M\mu_{1T}^6\leq\frac{1}{T^6}M\left\{\int\limits_{0}^{2\pi N}\int\limits_{2\pi N}^{2\pi(N+1)} b(s,t)\,|q_{a_T}(s,t)-q_{a_0}(s,t)|\,dsdt\right\}^6\leq$$

$$\leq\frac{N^6}{T^6}(s_2-s_1)^3(t_2-t_1)^3(4\pi)^6\nu(T).$$

Также получается оценка для $M\mu_{2T}^6$ и $M\mu_{3T}^6$.

Таким образом, с некоторой постоянной C''' имеем неравенство $M(\rho_T^{-1}\mu_T)^6\leq C'''$, $T\geqslant 4\pi$.

Следовательно, с учетом оценки (24) из равенства (17) получим оценку

$$M\{T[\tilde\theta(a_T)-\theta(a_0)]\}^6\leq C,\ T\geqslant 4\pi \tag{25}$$

с некоторой постоянной C, не зависящей от функции b.

Заметим, что величина $\tilde\theta(a_T)$ не является внутренней точкой I, если $\theta(a_T)\neq\tilde\theta(a_T)$. Поэтому

$$M\{T[\theta(a_T)-\theta(a_0)]\}^6=M\{[T[\tilde\theta(a_T)-\theta(a_0)]]^6\chi(\theta(a_T)=$$

$$=\tilde\theta(a_T))\}+M\{[T[\tilde\theta(a_T)-\theta(a_0)]]^6\chi(\theta(a_T)\neq\tilde\theta(a_T))\}\leq$$

$$\leq M\{T[\tilde\theta(a_T)-\theta(a_0)]\}^6+\left[\frac{C_0}{\pi}T(s_2-s_1)^{\frac{1}{2}}(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}\right]^6\times$$

$$\times P\{|\tilde\theta(a_T)-\theta(a_0)|>\varepsilon\sqrt[3]{(s_2-s_1)(t_2-t_1)}\}$$

с $\varepsilon>0$, $C_0=\max\limits_{a\in K}\ \max\limits_{(s,t)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]}|a(s,t)|$; ε будет определено ниже.

Рассмотрим функцию H, определенную на множестве

$$\{(s_1,s_2,t_1,t_2):0\leq s_1\leq s_2\leq 2\pi,\ 0\leq t_1\leq t_2\leq 2\pi\}\times K \tag{26}$$

следующим образом:

$$H(s_1, s_2, t_1, t_2, a) = \begin{cases} H_1(s_1, s_2, t_1, t_2, a), & 0 \le s_1 < s_2 \le 2\pi, \\ & 0 \le t_1 < t_2 \le 2\pi, \\ H_2(s_1, t_1, t_2, a), & s_1 = s_2 \\ & 0 \le t_1 < t_2 \le 2\pi, \\ H_3(s_1, s_2, t_1, a), & 0 \le s_1 < s_2 \le 2\pi, \\ & t_1 = t_2 \\ H_4(s_1, t_1, a), & s_1 = s_2, \\ & t_1 = t_2, \end{cases}$$

где

$$H_1(s_1, s_2, t_1, t_2, a) = \frac{2\pi}{(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} [a(s, t) - a_0(s, t)]\, ds dt,$$

$$H_2(s_1, t_1, t_2, a) = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a(s_1, t) - a_0(s_1, t)]\, dt,$$

$$H_3(s_1, s_2, t_1, a) = \frac{2\pi}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} [a(s, t_1) - a_0(s, t_1)]\, ds,$$

$$H_4(s_1, t_1, a) = 2\pi [a(s_1, t_1) - a_0(s_1, t_1)].$$

Функция $H(s_1, s_2, t_1, t_2, a)$ непрерывна на множестве (26), поэтому функция

$$G^*(s_1, s_2, t_1, t_2) = \max_{a \in K} H(s_1, s_2, t_1, t_2, a)$$

также непрерывна в области $\{0 \le s_1 \le s_2 \le 2\pi,\ 0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi\}$. В силу условий леммы 5 a_0 является внутренней точкой K, поэтому $G^*(s_1, s_2, t_1, t_2) > 0$, $\{0 \le s_1 \le s_2 \le 2\pi,\ 0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi\}$, следовательно,

$$\min_{\substack{0 \le s_1 \le s_2 \le 2\pi \\ 0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi}} G^*(s_1, s_2, t_1, t_2) = \varepsilon_1 > 0.$$

Аналогично

$$\max_{\substack{0 \le s_1 \le s_2 \le 2\pi \\ 0 \le t_1 \le t_2 \le 2\pi}} \min_{a \in K} H(s_1, s_2, t_1, t_2, a) = -\varepsilon_2 < 0.$$

В качестве ε можно взять любое число из интервала $(0, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Из неравенства Чебышева и оценки (25) теперь следует нужное неравенство

$$M\{T(\theta(a_T) - \theta(a_0))\}^6 \le C.$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия 1.1—1.5 и a_0 — внутренняя точка множества K. Семейство мер, соответствующих семейству непрерывных случайных полей

$$\left\{w_T(s, t) = \frac{T}{2\pi} \int_0^s \int_0^t [a_T(u, v) - a_0(u, v)]\, du dv,\ 0 \leq s,\ t \leq 2\pi,\ T > 0\right\},$$

слабо сходится при $T \to \infty$ к мере, отвечающей стандартному винеровскому полю на $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 2, конечномерные распределения поля $\{w_T(s, t),\ 0 \leqslant s,\ t \leqslant 2\pi\}$ при $T \to \infty$ сходятся к конечномерным распределениям стандартного винеровского поля. Из результатов работы [12] следует, что утверждение леммы 5 обеспечивает слабую компактность мер, отвечающих полям $\{w_T(s, t),\ 0 \leqslant s,\ t \leqslant 2\pi\}$. Таким образом, теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cairoli R., Walsh I. B.* Stochastic integrals in the plane. — «Acta mathematica», 1975, 134, 1—2.

2. *Гихман И. И.* Разностные мартингалы двух аргументов. — Труды школы-семинара по теории случайных процессов. Друскининкай, 1974.

3. *Гихман И. И., Пясецкая Т. Е.* Два типа стохастических интегралов по мартингальным мерам на плоскости. — «Докл. АН УССР. Сер. А», 1975, 11.

4. *Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В.* Определение среднего для винеровского процесса, наблюдаемого на бесконечном интервале. — «Теория вероятностей и ее применения», 1973, 18, 4.

5. *Дороговцев А. Я.* Замечания о свойствах одной непараметрической оценки максимального правдоподобия.— «Математический сборник», К., «Наукова думка», 1976.

6. *Дороговцев А. Я.* Свойства непараметрической оценки коэффициента переноса простейшего стохастического дифференциального уравнения. — «Теория случайных процессов», 1976, вып. 4.

7. *Кнопов П. С., Штатланд Э. С.* Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих некоторым полям на плоскости. — В сб.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. К., ИМ АН УССР, 1973.

8. *Cairoli R.* Sur une equation differentielle stochastique. — «C. r. Acad. sci.», 1972, 274A, 24.

9. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М., «Мир», 1973.

10. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. М., ИЛ, 1956.

11. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М., «Наука», 1968.

12. *Козаченко Ю. В., Ядренко М. И.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. II. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, вып. 15.

A. Ya. Dorogovtsev, P. S. Knopov

THE ESTIMATE OF TWO-DIMENSIONAL SIGNAL ON OBSERVATION WITH THE ADDITIVE RANDOM NOISE

The properties of non-parametric estimate of the periodical function on both variables observed on the widening part of the plane with the additive random errors are discussed in this article. It is supposed that unknown function belongs to the set of functions, compact with the uniform convergence. The limit distribution of some functionals is described and strong consistency for the estimate is proved.

Поступила в редколлегию 12.IV 1976.