И. Ш. ИБРАМХАЛИЛОВ, доц.
(Азербайджанский институт народного хозяйства)

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим семейство стационарных гауссовских процессов $x(t)$, имеющих спектральные плотности $f(\lambda)$. Будем предполагать, что среднее значение всех процессов, входящих в семейство, равно нулю, спектральные плотности принадлежат некоторому множеству F функций $f(\lambda)$, определенных, равномерно непрерывных и ограниченных на $(-\infty, +\infty)$; для всех f_1 и f_2 из F

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_1(\lambda) - f_2(\lambda)]^2}{f_1^2(\lambda)} d\lambda < \infty.$$

При выполнении этого условия и справедливости некоторых оценок на скорость убывания $f(\lambda)$ гауссовы меры, соответствующие двум любым процессам из нашего семейства, будут эквивалентны на всяком конечном отрезке. Поэтому, наблюдая процесс на конечном отрезке, нельзя достоверно определить спектральную плотность, т. е. построить состоятельную для нее оценку.

Наша задача — построить состоятельную оценку для спектральной плотности по наблюдению процесса на бесконечном временном промежутке. Такая оценка будет задаваться последовательностью функций $f_T^*(\lambda, x)$, определяемых при каждом $T > 0$ траекторией процесса на $[-T, T]$. Состоятельная оценка должна сходиться по вероятности к истинному значению $f_0(\lambda)$ спектральной плотности в некоторой метрике, введенной в пространстве плотностей.

Заметим, что по ряду причин здесь неудобно применять результаты работ [1, 2]. Во-первых, подпространства, на которых проекции мер абсолютно непрерывны (те, которые должны играть роль X_n), бесконечномерны. Во-вторых, мы не можем ни вычислить отношения правдоподобия, ни обратить интегральный оператор, ядром которого служит корреляционная функция на конечном промежутке (чтобы воспользоваться результатом [2]). Наконец, если рассматривать непосредственно $L_2(-\infty, +\infty)$, то соответствующие меры окажутся обобщенными.

Мы пойдем по пути, который уже использован в работе [2], строя такое видоизменение максимизируемого функционала, чтобы оно могло вычисляться эффективно. В работах [3, 4] использовалось обращение корреляционного оператора, соответствующего стационарному процессу, наблюдаемому на бесконечном промежутке. При переходе к преобразованиям Фурье оно превращается в оператор деления на спектральную плотность. Это подсказывает, что можно рассматривать функционал, главной частью которого, зависящей от наблюдения, есть величина

$$\xi_T(x, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1^2(\lambda)} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\, x(s)\, e^{i\lambda(t-s)} dt\, ds\, d\lambda. \qquad (1)$$

При построении функционала, аналогичного функционалу из работы [2], естественно из него вычитать величину, асимптотически эквивалентную половине математического ожидания.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функционал

$$F_T(x, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1^2(\lambda)} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)\, x(s)\, e^{i\lambda(t-s)} dt\, ds\, d\lambda -$$

$$- \frac{\pi T}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda) d\lambda. \qquad (2)$$

Для того, чтобы он был определен, а также для построения состоятельной оценки, нужно наложить на F некоторые дополнительные условия.

1. Существует $f_1 \in F$ такое, что при всех $f \in F$:

$$\text{а) } 0 < c_1 < |f(\lambda) f_1^{-1}(\lambda)| < c_2 < \infty,$$

$$\text{б) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| f_1^{-2}(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

$$\text{в) } \int\limits_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-1}(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

2. Если L_{f_1} — гильбертово пространство функций $\varphi(\lambda)$, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f_1^{-2}(\lambda)\, d\lambda < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2)_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda)\, \varphi_2(\lambda)\, f_1^{-2}(\lambda)\, d\lambda, \quad \|\varphi\|_1 = \sqrt{(\varphi, \varphi)_1}, \qquad (3)$$

то F является компактом в L_{f_1}, причем существует такой неотрицательный вполне непрерывный оператор S в L_{f_1}, для которого $\mathrm{Sp}\, S^\beta < \infty$, $F \subset \{f : \|S^{-1} f\|_1 \leq 1\}$ при некотором $\beta < \frac{2}{3}$.

Теорема. Если выполнены условия 1 и 2 и $f_T^*(\lambda, x)$ есть точка максимума функционала (2) на множестве F, то при $T \to \infty$

$\| f_T^*(\lambda, x) - f_0(\lambda) \|_1 \to 0$ по вероятности, каково бы ни было истинное значение спектральной плотности $f_0(\lambda)$.

Доказательство. Обозначим через M^0 математическое ожидание, $R^0(\cdot)$ — корреляционную функцию стационарных гауссовских процессов $\{x(t), -\infty < t \infty <\}$, имеющих спектральную плотность $f_0(\lambda)$. Тогда

$$M^0 x(t) x(s) = R^0(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f_0(\lambda) d\lambda.$$

Учитывая (1), получаем

$$M^0 \xi_T(x, f) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} M^0 x(t) x(s) \times$$

$$\times \exp[i\lambda(s-t)]\, dt ds d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) \times$$

$$\times \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \exp[i\lambda(s-t)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\mu(s-t)] f_0(\mu)\, ds dt d\lambda d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_0(\mu) f_1^{-2}(\lambda) \times$$

$$\times \int_{-T}^{T}\int_{T}^{T} \exp[i(\lambda-\mu)(s-t)]\, dt ds d\lambda d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) f_0(\mu) \sin^2(\lambda-\mu) T \times$$

$$\times (\lambda-\mu)^{-2} d\lambda d\mu. \tag{4}$$

Заметим, что (4) после замены переменной интегрирования $\mu = \lambda + \frac{u}{T}$ можно записать так:

$$M^0 \xi_T(x, f) = T \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) f_0\left(\lambda + \frac{u}{T}\right) \times$$

$$\times \sin^2 u u^{-2} d\lambda du = \pi T \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) f_0(\lambda)\, d\lambda + o(1) \right]. \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$|o(1)| = \left| -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda)\left[f_0(\lambda) - f_0\left(\lambda + \frac{u}{T}\right)\right] \times\right.$$

$$\left.\times \sin^2 uu^{-2} d\lambda du\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| f_1^{-2}(\lambda) \times$$

$$\times \left|f_0(\lambda) - f_0\left(\lambda + \frac{u}{T}\right)\right| \sin^2 uu^{-2} d\lambda du \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| f_1^{-2}(\lambda) \sup_{s \leq T_1 T} |f_0(\lambda) - f_0(\lambda + s)| d\lambda \times$$

$$\times \int_{-T_1}^{T} \sin^2 uu^{-2} du + 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)| f_1^{-2}(\lambda) \times$$

$$\times \sup_s |f_0(s)| d\lambda \int_{|u| > T_1} \sin^2 uu^{-2} du.$$

Поэтому в силу условий (1) $o(1) \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $f \in F$.

Учитывая условия 1 в работе [1], функционал (2) можно представить следующим образом:

$$F_T(x, f) = \xi_T(x, f) - M^0\xi_T(x, f) + \pi T \times$$

$$\times \left[\pi T \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) [f_0(\lambda) - f_1(\lambda)] d\lambda - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_1(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda) d\lambda + o(1)\right] =$$

$$= \xi_T(x, f) - M^0\xi_T(x, f) + \frac{\pi T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [f_0(\lambda) - f_1(\lambda)]^2 \times$$

$$\times f_1^{-2}(\lambda) d\lambda - \frac{\pi T}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda) d\lambda - o(1)\right]. \qquad (6)$$

Очевидно, что точка максимума этого функционала (как функции f) совпадает с точкой максимума функционала

$$\Phi_T(x, f) = \frac{1}{\sqrt{T}} [\xi_T(x, f - f_0 + f_1) - M^0\xi_T(x, f - f_0 + f_1)] -$$

$$- \frac{\pi\sqrt{T}}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda)\, d\lambda - o(1) \right]. \qquad (7)$$

Заметим, что $\Phi_T(x, f) = 0$ при $f = f_0$.

Покажем, что при $T \to +\infty$ — $\sup \Phi_T(x, f) \to +\infty$ равномерно при $\|f - f_0\|_1 \geqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Оценим $D\xi_T(x, f - f_0 + f_1)$. Очевидно, что

$$M^0 \left\{ \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(s)\, K(t, s)\, dtds - M^0 \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(s) \times \right.$$

$$\left. \times K(t, s)\, dtds \right\}^2 = 2 \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left[\int_{-T}^{T} K(t, s)\, R^0(s - u)\, ds \right]^2 dtdu, \qquad (8)$$

где

$$K(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]\, f_1^{-2}(\lambda) \exp[i\lambda(t - s)]\, d\lambda.$$

Подставив значения $K(t, s)$ и $R^0(s - u)$ в (8), получим

$$D\xi_T(x, f - f_0 + f_1) = 2 \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \left[\int_{-T}^{T} \left[(f(\lambda) - f_0(\lambda)) f_1^{-2}(\lambda) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \exp(i\lambda(t - s))\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\mu) \exp[i\mu(s - u)]\, d\mu \right] ds \right]^2 dtdu =$$

$$= 2 \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]\, f_1^{-2}(\lambda) \exp[i\lambda(t - s)] \times$$

$$\times f_0(\mu) \exp[i\mu(s - u)]\, [f(\nu) - f_0(\nu)]\, f_1^{-2}(\nu) \exp[-i\nu(t - v)]\, f_0(\pi) \times$$

$$\times \exp[-i\pi(v - u)]\, d\lambda d\mu d\nu d\pi dt ds du dv =$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]\, f_1^{-2}(\lambda)\, [f(\nu) - f_0(\nu)]\, f_1^{-2}(\nu) \times$$

$$\times f_0(\mu)\, f_0(\pi) \left[\int_{-T}^{T} \exp[i(\lambda - \nu)t] \right] dt \int_{-T}^{T} \exp[i(\mu - \nu)s]\, ds \times$$

$$\times \int_{-T}^{T} \exp[i(\pi-\mu)u]\,du \int_{-T}^{T} \exp[i(\nu-\pi)\,v dv]\,d\lambda d\mu d\nu d\pi =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda)-f_0(\lambda)]\,f_1^{-2}(\lambda)\,[f(\nu)-f_0(\nu)]\times$$

$$\times f_1^{-2}(\nu)\,f_0(\mu)\,f_0(\pi)\sin(\lambda-\nu)T(\lambda-\nu)^{-1}\sin(\mu-\lambda)T\times$$

$$\times(\mu-\lambda)^{-1}\sin(\pi-\mu)T(\pi-\mu)^{-1}\sin(\nu-\pi)T(\nu-\pi)^{-1}\times$$

$$\times d\lambda d\mu d\nu d\pi. \qquad (9)$$

В (9) делаем замену переменных $\nu=\lambda+\frac{\alpha}{T}$, $\mu=\lambda+\frac{\beta}{T}$, $\pi=\lambda+\frac{\gamma}{T}=\frac{\beta+\gamma}{T}$, $\nu-\pi=\lambda+\frac{\alpha}{T}-\left(\lambda+\frac{\beta+\gamma}{T}\right)=\frac{\alpha-\beta-\gamma}{T}$. Тогда $d\nu=\frac{d\alpha}{T}$, $d\mu'=\frac{d\beta}{T}$, $d\pi=\frac{d\gamma}{T}$ и, следовательно, с учетом (1) и (3) получаем

$$D\xi_T(x, f-f_0+f_1)=2T\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)-f_0(\lambda)]\times$$

$$\times f_1^{-2}(\lambda)\left[f\left(\lambda+\frac{\alpha}{T}\right)-f_0\left(\lambda+\frac{\alpha}{T}\right)\right]f_1^{-2}\left(\lambda+\frac{\alpha}{T}\right)f_0\left(\lambda+\frac{\beta}{T}\right)\times$$

$$\times f_0\left(\lambda+\frac{\beta'+\gamma}{T}\right)\sin\alpha\alpha^{-1}\sin\beta\beta^{-1}\sin\gamma\,\gamma^{-1}\times$$

$$\times\sin(\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)^{-1}d\alpha d\beta d\gamma d\lambda\sim$$

$$\sim 2T\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)-f_0(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda)\,f_0^2(\lambda)\,f_1^{-2}(\lambda)\times$$

$$\times\sin\alpha\alpha^{-1}\sin\beta\,\beta^{-1}\sin\gamma\gamma^{-1}\sin(\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)^{-1}\times$$

$$\times d\alpha d\beta d\gamma d\lambda\leq TL\int_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda)-f_0(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda)\,d\lambda=TL\,\|f-f_0\|_1^2, \qquad (10)$$

где

$$L=2C_2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\alpha\alpha^{-1}\sin\beta\beta^{-1}\sin(\alpha-\beta-\gamma)\times$$

$$\times(\alpha-\beta-\gamma)^{-1}d\alpha d\beta d\gamma.$$

Теперь покажем, что функция

$$\frac{1}{\sqrt{T}}[\xi_T(x, f-f_0+f_1)-M^0\xi_T(x, f-f_0+f_1)]$$

равномерно относительно T ограничена по $f \in F$. При условии 2 это утверждение вытекает из теоремы А. В. Скорохода о непрерывности случайной функции на компакте в гильбертовом пространстве L_{f_1} [5]. Действительно, учитывая (1), (9) и (10), можно написать следующее неравенство (для всяких $f', f'' \in F$):

$$M\left|\frac{1}{\sqrt{T}}\xi_T(x, f' - f_0 + f_1) - M^0\xi_T(x, f' - f_0 + f_1) - \right.$$

$$\left. - \xi_T(x, f'' - f_0 + f_1) + M^0\xi_T(x, f'' - f_0 + f_1)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{T} M^0 |\xi_T(x, f' - f'' + f_1) - M^0\xi_T(x, f' - f'' + f_1)|^2 \leq$$

$$\leq L\| f' - f''\|_1^2. \qquad (11)$$

Очевидно, что при $T \to +\infty$

$$\sqrt{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)] f_1^{-2}(\lambda) - 0(1)\right] d\lambda \to \infty.$$

Тогда из (7) согласно условию 2, следует, что при $T \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}[\xi_T(x, f - f_0 + f_1) - M^0\xi_T(x, f - f_0 + f_1)] -$$

$$- \frac{\sqrt{T}}{2}\pi\left[\int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f_0(\lambda)]^2 f_1^{-2}(\lambda)\, d\lambda - 0(1)\right] \to -\infty.$$

Следовательно, при $T \to \infty - \sup \Phi_T(x, f) \to +\infty$ равномерно при $\| f - f_0\|_1 \geq \varepsilon$. Поэтому можно записать

$$\mu(\{x : \| \widehat{f_T^*}(\lambda, x) - f_0(\lambda)\|_1 > \varepsilon\}) \leq \mu(\{x : - \sup_{\|f - f_0\|_1 > \varepsilon} \Phi_T(x, f) \leq 0\}) \leq$$

$$\leq 1 - \mu(\{x : - \sup_{\|f - f_0\|_1 > \varepsilon} \Phi(x, f) > 0\}).$$

Следовательно, при $T \to +\infty$

$$\mu(\{x : \| \widehat{f_T^*}(\lambda, x) - f_0 \ \lambda)\|_1 > \varepsilon\}) \to 0.$$

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрамхалилов И. Ш.* О существовании состоятельных оценок для корреляционного оператора гауссовского распределения. — В сб.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. К., ИМ АН УССР, 1973.

2. *Ибрамхалилов И. Ш.* Одна общая теорема о байесовских оценках корреляционного оператора гауссовских величин в гильбертовом пространстве. — «Теория случайных процессов», 1975, вып. 3.

3. *Ибрамхалилов И. Ш.* О существовании состоятельных оценок для среднего стационарных гауссовских процессов с непрерывным параметром. — «Теория случайных процессов», 1974, № 3.

4. *Ибрамхалилов И. Ш.* О состоятельных оценках среднего стационарного гауссовского процесса наблюдаемого на бесконечном интервале. — «Теория случайных процессов», 1974, № 2.

5. *Скороход А. В.* Теорема о непрерывности случайной функции на компакте, в гильбертовом пространстве. — «Теория вероятностей и ее применения», 1973, 18,4.

I. Sh. Ibramkhalilov

THE ESTIMATE OF THE STATIONARY GAUSSIAN PROCESS SPECTRAL DENSITY

The paper deals with the problem of constructing consintent estimate for spectral density of stationary gaussian process considered on infinite interval of time.

Поступила в редколлегию 12.IV 1976.