Н. Н. ЛЕОНЕНКО, мл. научн. сотр.
(*Институт кибернетики АН УССР*)

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

В этой статье рассматриваются утверждения типа центральной предельной теоремы и принципа инвариантности для случайных полей, родственных случайным последовательностям, являющимся мартингал-разностями. Такие последовательности впервые были введены С. Н. Бернштейном [1, стр. 331]. Центральная предельная теорема для мартингал-разностей разными способами была доказана П. Биллингсли [2], И. А. Ибрагимовым [3] и Б. Розеном [4].

Пусть Z_+^k — множество целочисленных точек k-мерного арифметического пространства с неотрицательными координатами. Рассмотрим однородное в узком смысле случайное поле $\xi(x)$, $x \in Z_+^k$, определенное на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Пусть, далее, $\pi(z) = \{y \in Z_+^k : y_i \leqslant z_i, \ i = \overline{1, k}\}$ и $\mathfrak{F}_z$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные величины $\xi(y)$, $y \in \pi(z)$. Тогда будем говорить, что случайное поле $\xi(x)$ образует мартингал-разность, если для любой точки $x \overline{\in} \pi(z)$

$$M\{\xi(x)/\mathfrak{F}_z\} = 0 \tag{1}$$

с вероятностью 1.

Условимся в скобках $\{\cdot\}$ перед суммой указывать множество, на которое распространяется суммирование.

Теорема 1. Пусть $\xi(x)$, $x \in Z_+^k$ — однородное в узком смысле, ограниченное с вероятностью 1, эргодическое случайное поле с $M\xi^2(x) = \sigma^2$, $0 < \sigma < \infty$, образующее мартингал-разность. Тогда

$$P\{\sigma^{-1}n^{-k/2}\{1 \leqslant x_i \leqslant n,\ i = \overline{1, k}\} \Sigma\xi(x) < t\} \to \{2\pi\}^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du \tag{2}$$

в основном при $n \to \infty$.

Прежде чем приступать к доказательству теоремы 1, установим некоторые простые свойства случайных полей, образующих мартингал-разности:

1) $M\xi(x) = 0$;

2) если $y, z \in \pi(x)$, $y_i \neq z_i$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то

$$M\{\xi(y)\xi(z)/\mathfrak{F}_x\} = 0.$$

Действительно, если $\mathfrak{F}'_{x,y}$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные величины $\xi(z)$, $0 < z_i \leqslant \max\{x_i, y_i\}$, $i = \overline{1, k}$, то $\mathfrak{F}'_{x,y} \supset \mathfrak{F}_x$, и с учетом свойств условных математических ожиданий

$$M\{\xi(y)\xi(z)/\mathfrak{F}_x\} = M\{\xi(y) M\{\xi(z)/\mathfrak{F}'_{x,y}\}/\mathfrak{F}_x\} = 0$$

в силу (1).

Из 2) следует, что выполнены следующие свойства:

3) $M[\{m_i < x_i \leqslant n_i,\ i = \overline{1, k}\} \Sigma\xi(x)]^2 =$

$$= \{m_i < x_i \leqslant n_i,\ i = \overline{1, k}\} \Sigma M\xi^2(x) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i);$$

4) $M\{[\{m_i < u_i \leqslant n_i,\ i = \overline{1, k}\} \Sigma\xi(u)]^2/\mathfrak{F}_x\} =$

$$= \{m_i < u_i \leqslant n_i,\ i = \overline{1, k}\} \Sigma M\{\xi^2(u)/\mathfrak{F}_x\}.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую теорему Розена [4].

Теорема А. Пусть $\{S_\alpha^{(n)},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ — последовательность случайных процессов на $[0, 1]$, таких, что $S_0^{(n)} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и выполнены следующие условия:

С1) существует функция $\chi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, которая обращается в нуль при $s = 0$ и такая, что для $0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1$ выполнено условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} M(S_\alpha^{(n)} - S_\beta^{(n)})^2 \leqslant \chi(\alpha - \beta),\ 0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1;$$

C2) существует функция $\rho(\alpha)$, непрерывная при $\alpha \in [0, 1]$ и такая, что

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} M \{ M \{ S_{\alpha+\Delta}^{(n)} - S_\alpha^{(n)} / S_\alpha^{(n)} \} - \Delta\rho(\alpha) S_\alpha^{(n)} \} = 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

C3) существует функция $\sigma^2(\alpha)$, непрерывная при $0 \leqslant \alpha < 1$ и такая, что

$$\lim_{\Delta\to +0} \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} M \,|\, M \{ (S_{\alpha+\Delta}^{(n)} - S_\alpha^{(n)})^2 / S_\alpha^{(n)} \} - \Delta\sigma^2(\alpha) \,| = 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1;$$

C4) для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta\to+0} \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{|t|>\varepsilon} t^2 dF_{S_{\alpha+\Delta}^{(n)} - S_\alpha^{(n)}}(t) = 0, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

где $F_S(t) = P\{S < t\}$.

Тогда функции распределения $F_{S_\alpha^{(n)}}(t)$ при $n \to \infty$ сходятся в основном к функции распределения нормального закона с нулевым средним и дисперсией

$$\Psi(\alpha) = \begin{cases} \int\limits_0^\alpha \sigma^2(s) \exp\left\{ 2 \int\limits_s^\alpha \rho(u)\, du \right\} ds, & 0 \leqslant \alpha < 1; \\ \lim\limits_{s\uparrow 1} \Psi(s), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 сводится к проверке условий теоремы А. Заметим, что без ограничения общности можно считать $\sigma^2 = 1$. Пусть

$$S_\alpha^{(n)} = n^{-k/2} \sum_{\substack{0 < x_1 \leqslant \alpha n \\ 0 < x_i \leqslant n, \; i = \overline{2, k}}} \xi(x), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Тогда из 3) следует, что выполнено условие C1 теоремы А, а из 2) следует, что при $\rho(\alpha) \equiv 0$ выполнено условие C2. Проверим C3 при $\sigma^2(\alpha) = 1$. Используя 4) и однородность, получаем

$$\Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-k} M \,|\, M \left\{ \left[\sum_{\substack{\alpha n + 1 \leqslant x_1 \leqslant (\alpha+\Delta) n \\ 1 \leqslant x_i \leqslant n, \; i = \overline{2, k}}} \xi(x) \right]^2 / S_\alpha^{(n)} \right\} - \Delta \,| =$$

$$= \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{-k} M \,|\, M \left\{ M \left\{ \left[\sum_{\substack{\alpha n + 1 \leqslant x_1 \leqslant (\alpha+\Delta) n \\ 1 \leqslant x_i \leqslant n, \; i = i = \overline{2, k}}} \xi(x) \right]^2 / \xi(x), \right.\right.$$

$$\left.\left. x \in \{ 1 \leqslant x_1 \leqslant \alpha n, \; 1 \leqslant x_i \leqslant n, i = \overline{2, k} \} \right\} / S_\alpha^{(n)} \right\} - \Delta \,| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}} M \,|\, M n^{-k} \sum_{\substack{\alpha n + 1 \leqslant x_1 \leqslant (\alpha+\Delta) n \\ 1 \leqslant x_i \leqslant n, \; i = \overline{2, k}}} (\xi^2(x) - 1) \,| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} M \,|\, (\Delta n)^{-k} \sum_{\substack{1 \leqslant x_1 \leqslant \Delta n \\ 1 \leqslant x_i \leqslant n, \; i = \overline{2, k}}} (\xi^2(x) - 1) \,| \to 0$$

при $\Delta \to +0$ в силу эргодичности. Условие C3 выполнено.

Приведем формулировку леммы 10.3 [4].

Лемма. Если

$$\overline{\lim_{\Delta\to+0}}\, \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, M\, |S^{(n)}_{\alpha+\Delta} - S^{(n)}_{\alpha}|^{2+\delta} = 0, \quad \delta > 0,$$

то C4 выполнено.

В силу этой леммы и предположения однородности для проверки C4 достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{\Delta\to+0}}\, \Delta^{-1} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, M \left[n^{-k/2} \sum_{\substack{1 \le x_1 \le \Delta n \\ 1 \le x_i \le n,\ i = \overline{2, k}}} \xi(x) \right]^4 = 0. \tag{3}$$

Но (3) следует из оценки

$$M \left[\sum_{\substack{1 \le x_i \le m_i \\ i = \overline{1, k}}} \xi(x) \right]^4 = O\left(\left(\prod_{i=1} m_i \right)^2 \right). \tag{4}$$

Чтобы доказать (4), запишем

$$M \left[\sum_{\substack{1 \le x_i \le m_i \\ i = \overline{1, k}}} \xi(x) \right]^4 = \sum_{\substack{1 \le x_i^{(j)} \le m_i \\ i = \overline{1, k}, \\ j = 1, 2, 3, 4}} M \prod_{j=1}^{4} \xi(x^{(j)}). \tag{5}$$

Слагаемые в (5), в которых хотя бы для одной пары (l, r) ($l \in \{1, 2, 3, 4\}$, $r \in \{1, 2, \ldots k\}$) $x_r^{(j)} > x_r^{(l)}$, $j \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{l\}$, обращается в нуль, в силу (1). Поэтому существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что (5) допускает оценку через

$$C_1 \left(\sum_{x \in \pi(m)} M\xi^4(x) + \sum_{\substack{x_i < y_i \\ i = \overline{1, k}}} M\xi(x)\, \xi^3(y) + \sum_{\substack{x_i, y_i < z_i \\ i = \overline{1, k}}} M\xi(x)\, \xi(y)\, \xi^2(z) \right), \tag{6}$$

а первые две суммы в (6) в силу ограниченности случайного поля допускают оценку через $C_2 \left(\prod_{i=1}^{k} m_i \right)^2$.

Последнее слагаемое в (6), учитывая 3), можно оценить так:

$$\sum_{\substack{x_i, y_i < z_i \\ i = \overline{1, k}}} \Delta M\xi(x)\, \xi(y)\, \xi^2(z) =$$

$$= O\left(\sum_{\substack{2 \le z_i \le m_i \\ i = \overline{1, k}}} \Sigma M \left[\sum_{\substack{1 \le u_i \le z_i - 1 \\ i = \overline{1, k}}} \xi(u) \right]^2 \xi^2(z) \right) =$$

$$= O\left(\left(\prod_{i=1}^{k} m_i \right)^2 \right).$$

Собирая все оценки, получаем (4), а вместе с тем и теорему 1.

Заметим, что из оценок, полученных при доказательстве теоремы 1, следует даже утверждение типа принципа инвариантности, которое обобщает принцип инвариантности П. Биллингсли [5] (стр. 205). Именно, пусть $(D, \mathcal{D})$ — пространство функций на $[0, 1]^k$ без разрывов II рода с топологией, родственной топологии Скорохода [6—8].

Пусть P_n — семейство распределений в $(D, \mathcal{D})$, порожденное элементами

$$\eta_n(x) = \sigma^{-1} n^{-k/2} \{1 \leq u_i \leq [x_i n],\ i = \overline{1, k}\} \Sigma \xi(u),\ u \in [0, 1]^k,$$

где $[a]$ — целая часть a.

Считаем, что $\eta_n(x) = 0$, если $x_i = 0$ хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Через W обозначим распределение в $(D, \mathfrak{D})$, порожденное винеровским случайным полем Ченцова [9], т. е. таким полем $w(x)$, $x \in [0, 1]^k$, что:

1) $w(x) = 0$, если $x_i = 0$, хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

2) случайные величины

$$\Delta_w^{(k)}[y, x] = \left\{\begin{matrix}(\nu_1, \ldots, \nu_k): \\ \nu_i = 0, 1;\ i = \overline{1, k}\end{matrix}\right\} \Sigma (-1)^{\sum_{i=1}^{k} \nu_i} w(y_i - \nu_i(y_i - x_i),\ i = \overline{1, k}) \tag{7}$$

имеют нормальные распределения с нулевыми средними и дисперсиями $\prod_{i=1}^{k} |y_i - x_i|$;

3) смешанные разности $\Delta_w^{(k)}[\cdot, \cdot]$, подсчитанные по непересекающимся параллелепипедам из $[0, 1]^k$, являются независимыми случайными величинами.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 последовательность мер P_n слабо сходится к мере W в пространстве $(D, \mathfrak{D})$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы 2 надо установить сходимость конечномерных распределений и слабую компактность последовательности мер P_n.

Сходимость конечномерных распределений выводится из теоремы 1, а компактность мер P_n следует из одной теоремы Ченцова [6—7] и оценки (4).

Заметим, что при других условиях на характер зависимости принцип инвариантности для случайных полей рассматривался в работах [10—13]. Целый ряд работ [14—19] посвящен центральной предельной теореме для различных классов случайных полей.

Последовательности, образующие мартингал-разности, естественны в силу того обстоятельства, что их суммы образуют мартингал. Для случайных полей установившегося понятия мартингала пока еще нет, но одним из подходов может быть следующий [20]: если $(\Omega, \mathfrak{F}', P)$—некоторое вероятностное пространство $\mathfrak{F}'_x$, $x \in Z_+^k$ — некоторый поток σ-алгебр ($\mathfrak{F}'_x \subset \mathfrak{F}'_y$ при $x < y$ ($x < y$ тогда и только тогда, когда $x_i < y_i$, $i=\overline{1, k}$)), то тройку $(\zeta(x), \mathfrak{F}'_x, x \in Z^n_+)$ будем называть мартингалом, если:

1) $\zeta(x) - \mathfrak{F}'_x$ — измеримо;

2) $M\{\Delta^{(k)}_\zeta[y, x]/\mathfrak{F}'_x\} = 0$, $x < y$, где $\Delta^{(k)}_\zeta$ определяется по (7) с заменой $w(\cdot)$ на $\zeta(\cdot)$;

3) семейства $\{\zeta(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\mathfrak{F}'_{x_i}, x_i > 0\}$, $i=\overline{1, k}$ являются мартингалами одного аргумента.

Тогда суммы $\zeta(x) = \{u \in \pi(x)\} \Sigma\xi(u)$ случайного поля $\xi(x)$, $x \in Z^k_+$ образуют мартингал в смысле определений 1)—3) относительно потока $\mathfrak{F}_x$. Действительно, если $x < y$, то

$$M\{\Delta^{(k)}_\xi[y, x]/\mathfrak{F}_x\} = M\left\{\left\{\begin{matrix} x_i < u_i \leq y_i \\ i=\overline{1, k}\end{matrix}\right\} \Sigma\xi(u)/\mathfrak{F}_x\right\} = 0$$

в силу (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений, т. 4. М., «Наука», 1964.
2. *Billingsley P.* The Lindeberg — Levy theorem for martingales. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1961, 12, 5.
3. *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для одного класса зависимых случайных величин. — «Теория вероятностей и ее применения», 1963, 8, 1.
4. *Rosen B.* On the central limit theorem for sums of dependent random variables. — «Z. Wahrsch.», 1967, 7, 48—82..
5. *Billingsley P.* Convergence of Probability Mesures. New York, John Wiley, 1968.
6. *Ченцов Н. Н.* Предельные теоремы для некоторых классов случайных функций. — Тр. Всесоюзн. совещ. по теории вероятностей и математической статистике. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1960.
7. *Ченцов Н. Н.* Обоснование статистических критериев методами теории случайных процессов. Канд. дис., М., МИ АН СССР им. В. А. Стеклова, 1958.
8. *Bickel P. J.*, *Wichura M. J.* Convergence criteria for multiparameter stoshastic process and some applications. — «Ann. Math. Stat.», 1971, 42.
9. *Ченцов Н. Н.* Винеровские случайные поля от нескольких параметров. — «ДАН СССР», 1956, 106, 4.
10. *Леоненко Н. Н.* О принципе инвариантности для однородных случайных полей. — «ДАН УССР. Сер. А», 1975, 6.
11. *Chandrakant M. Deo.* A functional central limit theorem for stationary random fields. — «Ann. of Probab.», 1975, 3, 4.
12. *Леоненко Н. Н.* О принципе инвариантности для однородных случайных полей. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, 14.
13. *Малышев В. А.* Центральная предельная теорема для гиббсовских случайных полей. — «ДАН СССР», 1975, 224, 1.
14. *Rosen B.* A note on asymptotic normality of sums of higher demonsionally indexed random variables. — «Ark. Math.», 1969, 8,33—43.
15. *Rosenblatt M.* Central limit theorem for stationary processes. — Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Probab, 1970, vol. 2.
16. *Леоненко М. М.* Центральна гранична теорема для однорідних випадкових полів і асимптотична нормальність оцінок коефіцієнтів регресії. — «ДАН УРСР. Сер. А», 1974, 8.
17. *Леоненко Н. Н.* Об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей. — «Математические заметки», 1975, 1, 129—132.

18. *Леоненко М. М., Ядренко М. Й.* Центральна гранична теорема для однорідних та ізотропних випадкових полів. — «ДАН УРСР. Сер. А», 1975, 4.
19. *Булинский А. В., Журбенко И. Г.* Центральная предельная теорема для случайных полей. — «ДАН СССР», 1976, **226**, 1.
20. *Гіхман Й. І., Пясецька Т. Є.* Два типи стохастичних інтегралів за мартингальними мірами на площині. — «ДАН УРСР. Сер. А», 1975, 11.

N. N. Leonenko

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM FOR SOME CLASS OF RANDOM FIELDS

The central limit theorem and the invariance principle for some class of homogeneous random fields are proved.

Поступила в редколлегию 16.III 1976.