И. К. МАЦАК, асп. (*Киевский университет*)

О ЧИСЛЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ КРИВОЙ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

В настоящей работе предлагаются достаточные условия конечности среднего числа пересечений случайным процессом кривой. Пусть $u(t)$, $t \in [0, 1]$ — вещественная непрерывная функция. Назовем числом пересечений случайного процесса $\xi(t)$ с кривой, описываемой функцией $u(t)$, величину $Cu(\xi)$, равную числу моментов времени на $[0, 1]$, в которых $\xi(t) = u(t)$. Мы включаем в пересечения и точки касания процесса $\xi(t)$ с кривой $u(t)$. $C_u(\xi)$ — случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры β исходного вероятностного пространства (Ω, β, P) [1].

Введем обозначения

$$\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}, \quad |\Pi| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |t_k - t_{k-1}|,$$

$$\bigvee_a^b [\varphi(t, s)] = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k, t_{k-1})|, \quad \bigvee_a^b (f) = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|,$$

где $f(t)$, $\varphi(t, s)$ — вещественные непрерывные функции, заданные на $[a, b]$ и $[a, b] \times [a, b]$ соответственно.

Положим $m(t, s) = M|\xi(t) - \xi(s)|$,

$$Q = P\{\xi(t+h) < a/\xi(t) \in [a, b]\} - P\{\xi(t+h) > b/\xi(t) \in [a, b]\},$$

$C_x(\xi)$ — число пересечений уровня x процессом $\xi(t)$, μ — мера Лебега на прямой.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$ — случайный процесс с непрерывными выборочными функциями.

А. Если

$$\bigvee_0^1 [m(t, s)] < \infty, \tag{1}$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} MC_x(\xi)\,\mu(dx) = \bigvee_0^1 [m(t, s)] < \infty.$$

В. Если выполнено условие (1), $M\xi(t) = 0$ и для всех $t \in [0, 1]$, достаточно малого $|h|$

$$Q \geqslant 0,\ 0 < a < b; \qquad Q \leq 0,\ a < b < 0, \tag{2}$$

то для любого уровня $x \neq 0$ $MC_x(\xi) < \infty$.

Условие (2) рассматривается только для случая $P\{\xi(t) \in [a, b]\} > 0$.

При доказательстве теоремы 1 и в дальнейшем мы существенно используем следующий результат [2] (стр. 212), принадлежащий Банаху.

Лемма 1. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция на $[0, 1]$ и $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} f(t)$, $m = \inf\limits_{t \in [a,b]} f(t)$.

Тогда функция $C_x(f)$ измерима и

$$\int_m^M C_x(f)\,\mu(dx) = \bigvee_a^b (f).$$

Доказательство теоремы 1. А. Рассмотрим случайный процесс $C_x(\xi)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Можно показать, что $C_x(\xi)$ — измеримый процесс. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Банаха измеримости функции $C_x(f)$ для непрерывной $f(t)$. Условие (1) обеспечивает ограниченность вариации выборочных функций случайного процесса с вероятностью 1 (в. 1) [3] и, более того $M\bigvee\limits_0^1(\xi) = \bigvee\limits_0^1 [m(t, s)]$.

Пусть $L(\xi) = \sup\limits_{t \in [0,1]} \xi(t)$, $l(\xi) = \inf\limits_{t \in [0,1]} \xi(t)$. Из леммы 1 имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\xi)\,\mu(dx) = \int_{l(\xi)}^{L(\xi)} C_x(\xi)\,\mu(dx) = \bigvee_0^1(\xi),$$

$$\bigvee_0^1 [m(t, s)] = M\int_{-\infty}^{+\infty} C_x(\xi)\,\mu(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} MC_x(\xi)\,\mu(dx).$$

Последнее равенство справедливо в силу теоремы Фубини [4] (стр. 214), так как $C_x(\xi)$ — неотрицательный измеримый случайный процесс.

В. Пусть $\xi_n(t)$ — кусочно-линейный процесс,

$$\xi_n(t) = \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) + 2^n\left(t - \frac{k}{2^n}\right)\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)$$

при $\frac{k}{2^n} \leq t \leq \frac{k+1}{2^n}$, $n \geqslant 1$, $k=0, 1, \ldots, 2^n-1$; $C_x(n)$—число пересечений процессом $\xi_n(t)$ уровня x на отрезке $[0, 1]$.

Тогда

$$MC_x(n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) < x, \ \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) > x\right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2^n-1} P\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) > x, \ \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) < x\right\}.$$

Из условия (2) следует, что

$$MC_y(n) - MC_x(n) = \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(P\left\{\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) > y, \ x < \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) < y\right\} - \right.$$

$$\left. - P\left\{\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) < x, \ x < \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) < y\right\}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{2^n-1}\left(P\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) > y, \ x < \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) < y\right\} - \right.$$

$$\left. - P\left\{\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) < x, \ x < \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) < y\right\}\right) \leq 0,$$

если $y > x > 0$ или $0 > x > y$.

Известно [1] (стр. 203), что $C_x(n) \uparrow C_x^*(\xi)$ при $n \uparrow \infty$ и $MC_x(n) \uparrow \uparrow MC_x^*(\xi)$, где $C_x^*(\xi)$ — число пересечений процессом $\xi(t)$ уровня x без касаний.

Ясно, что $MC_x^*(\xi) \geqslant MC_y^*(\xi)$, если $y > x > 0$ или $0 > x > y$. Из п. А следует, что почти для всех x по мере Лебега μ $MC_x^*(\xi) \leq \leq MC_x(\xi) < \infty$. Поэтому для любого $y \neq 0$ найдется x такой, что $0 < |x| < |y|$,

$$MC_y^*(\xi) \leq MC_x^*(\xi) < \infty.$$

Если обозначить число выходов процесса $\xi(t)$ за уровень x через $U_x(\xi)$, а число входов — через $D_x(\xi)$, то справедливо следующее равенство [1] (стр. 207):

$$C_x(\xi) \leq \varliminf_{n\to\infty} U_{x-\frac{1}{n}}(\xi) + \varliminf_{n\to\infty} D_{x+\frac{1}{n}}(\xi).$$

Отсюда имеем, что при $x \neq 0$ $MC_x(\xi) < \infty$.

Замечание 1. Условие (1) выполняется, если $M|\xi(t+h) - \xi(t)| \leq Ch$.

Приведем пример непрерывно дифференцируемого стационарного случайного процесса $\xi(t)$, который удовлетворяет условию (1) и для которого $P\{C_0(\xi)=\infty\}=1$.

Пусть $f(t)$, $t\in[-1, 1]$ — произвольная, четная, непрерывно дифференцируемая функция такая, что $C_0(f)=\infty$, и точка $t=0$ является точкой сгущения нулей. Например,

$$f(t)=\begin{cases} t^3\sin\frac{1}{t}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$$

Рассмотрим ряд Фурье функции $f(t)$ на $[-1, 1]$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\pi t.$$

Известно, что для непрерывно дифференцируемой функции $f(t)$ ряд Фурье сходится к $f(t)$ при каждом $t\in[-1, 1]$. Предположим, что ξ — равномерно распределенная случайная величина на $[-1, 0]$,

$$\xi_n=\cos n\pi\xi,\quad \xi_n'=-\sin n\pi\xi,$$

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_n\cos n\pi t+\xi_n'\sin n\pi t).$$

Тогда

$$M\xi_k\xi_k'=M\xi_k\xi_j=M\xi_k'\xi_j'=0,\quad k\neq j,$$

$$M\xi_k^2=M(\xi_k')^2=\frac{1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что $\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos n\pi(t+\xi)$ и ряд сходится с в. 1 для всех $t\in[0, 1]$. Понятно, что для любого $\omega\in[-1, 0]$ выборочная функция $\xi(t, \omega)$ пересекает уровень $x=0$ бесконечное число раз при $t\in[0, 1]$ и точкой сгущения нулей является точка $t=-\omega$. Из определения $\xi(t)$ имеем

$$M\xi(t+s)\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{2}\cos n\pi t,\quad M|\xi(t+s)-\xi(s)|\leq\sup_{s\in[-1,1]} f'(s)\,t.$$

Этот пример является аналогом одного примера работы [5].

Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t),\tag{3}$$

где ξ_k, $k\geqslant 1$ — последовательность независимых случайных величин, $M\xi_k=0$, $M\xi_k^2=c_k^2$, $\varphi_k(t)$ — непрерывные функции на $[0, 1]$.

Будем предполагать, что ряд (3) сходится для всех $t \in [0, 1]$ с в. 1. Пусть $r(t, s)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t)$,

$$\sigma^2(t, s) = M|\xi(t) - \xi(s)|^2 = r(t, t) + r(s, s) - 2r(t, s)$$

На процесс $\xi(t)$ наложим следующие условия:

$$\bigvee_0^1 [\sigma(t, s)] < \infty, \tag{4}$$

для любого $t \in [0, 1]$

$$r(t, t) > 0, \tag{5}$$

$$P\{\xi_k < x\} = F_k(x) = \int_{-\infty}^{x} f_k(y)\,\mu(dy), \tag{6}$$

т. е. $F_k(x)$, $k \geqslant 1$ — абсолютно непрерывная функция.

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с непрерывными выборочными функциями, представимый в виде (3); $u(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $[0, 1]$.

А. Если выполнены условия (4) — (6), то

$$P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1.$$

В. Если в условиях п. А $f_k(x) < C_k$, то $MC_u(\xi) < \infty$.

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие предложения.

Лемма 2. Пусть $\xi(t) = \xi$, $t \in [0, 1]$; $u(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации на $[0, 1]$; $P\{\xi < x\} = F(x)$ абсолютно непрерывна.

Тогда $P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1$.

Доказательство леммы 2 вытекает из следующего утверждения. Если $u(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации, то

$$\mu\{x : C_x(u) = \infty\} = 0,$$

что следует непосредственно из леммы 1.

Лемма 3. Пусть $u(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации и $\xi(t) = \tilde{\xi}(t) + \eta$, где η, $\tilde{\xi}(t)$ взаимно независимы, $\tilde{\xi}(t)$ имеет непрерывные выборочные функции и удовлетворяет условию (1) или (4),

$$P\{\eta < x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mu(dy), \quad f(y) \leq C.$$

Тогда $MC_u(\xi) < \infty$.

Доказательство леммы вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$MC_u(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} MC_{-x}(\tilde{\xi} - u)\,f(x)\,\mu(dx) \leq$$

$$\leq CM \bigvee_0^1 (\tilde{\xi}-u) \leq C\left[M \bigvee_0^1 (\tilde{\xi}) + \bigvee_0^1 (u)\right] < \infty,$$

справедливость которой следует из теоремы 1.

Лемма 4. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс, представимый в виде (3). Если выполнено условие (5), то существуют последовательности $\{t_k, k=\overline{0, n+1}\}$, $\{m_k, k=\overline{0, n}\}$ такие, что $t_k < t_k+1$, $t_0=0$, $t_{n+1}=1$, $\varphi_{m_k}(t) \neq 0$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Если, кроме того, выполнено (6) и при любом x, $f_k(x) > 0$, то для произвольного C

$$P\{\inf_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \xi(t) > C\} > 0,$$

$$P\{\sup_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \xi(t) < C\} > 0.$$

Доказательство. Обозначим через Π_k совокупность интервалов (a, b) таких, что $\varphi_k(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$. Пусть $\Pi = \bigcup_{k\geq 1} \Pi_k$. Если $t \in (0, 1)$ и t не принадлежит никакому интервалу из Π_k, то $\varphi_k(t)=0$. Поэтому предположение, что $t \overline{\in} \Pi$, противоречит условию (5) и для любых $0 < a < b < 1$ $[a, b] \in \Pi$. По теореме Гейне-Бореля существует конечное множество интервалов (a_k, b_k) таких, что $[a, b] \in \bigcup_{k=1}^{n-1} (a_k, b_k)$, $\varphi_{m_k}(t) \neq 0$ при $t \in (a_k, b_k)$. Из условия (5) следует, что существуют функции $\varphi_{m_0}(t)$, $\varphi_{m_n}(t)$ такие, что $\varphi_{m_0}(0) \neq 0$, $\varphi_{m_n}(1) \neq 0$. Тогда для некоторых $0 < b_0 < a_n < 1$ $\varphi_{m_0}(t) \neq 0$ при $t \in [0, b_0]$, $\varphi_{m_n}(t) \neq 0$ при $t \in [a_n, 1]$.

Выбирая точки t_k из интервалов (b_{k-1}, a_k), $k=\overline{1, n}$ и полагая $t_0=0$, $t_{n+1}=1$, получаем

$$\varphi_{m_k}(t) \neq 0, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k=\overline{0, n}.$$

Пусть

$$\xi_k(t) = \xi_{m_k}\varphi_{m_k}(t), \quad \eta_k(t) = \xi(t) - \xi_k(t).$$

Случайные процессы $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ взаимно независимы. Нетрудно видеть, что для любого C

$$P\{\inf_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \xi_k(t) > C\} > 0.$$

Поэтому

$$P\{\inf_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \xi(t) > C\} \geq P\{\inf_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \xi_k(t) + \inf_{t\in[t_k, t_{k+1}]} \eta_k(t) > C\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P\{ \inf_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \xi_k(t) > C - x\} P\{ \inf_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \eta_k(t) \in dx\} > 0.$$

Неравенство $P\{ \sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \xi(t) < C\} > 0$ получается аналогично.

Доказательство теоремы 2. А. Из условия (4) следует (1), и выборочные функции процесса $\xi(t)$ имеют ограниченную вариацию с в. 1 [3]. Так как $c_k|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| \leq \sigma(t, s)$, то функции $\varphi_k(t)$ также имеют ограниченную вариацию.

Рассмотрим процесс $\xi(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$, определенном в лемме 4, и $\varphi_{m_k}(t) \neq 0$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Положим

$$\tilde{\xi}_k(t) = \xi_{m_k}, \quad \tilde{\eta}_k(t) = \frac{1}{\varphi_{m_k}(t)}\left(\sum_{i\neq m_k} \xi_i\varphi_i(t) - u(t)\right)$$

при $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Тогда число пересечений процесса $\xi(t)$ с кривой $u(t)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ равно числу пересечений процессом $\tilde{\xi}_k(t)$ процесса $\tilde{\eta}_k(t)$. Процессы $\tilde{\xi}_k(t)$, $\tilde{\eta}_k(t)$ взаимно независимы. Выборочные функции процесса $\tilde{\eta}_k(t)$ имеют с в. 1 ограниченную вариацию как частное от деления двух функций ограниченной вариации с отличным от нуля на замкнутом отрезке делителем. Из леммы 2 имеем

$$P\{C_u(\xi) < \infty, \ t \in [t_k, t_{k+1}]\} =$$

$$= \int_{C[t_k,t_{k+1}]} P\{C_{-x}(\tilde{\xi}_k) < \infty, \ t \in [t_k, t_{k+1}]\} P\{\tilde{\eta}_k(t) \in dx\} = 1,$$

где $C[t_k, t_{k+1}]$ пространство непрерывных функций на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$.

Число отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ конечно, отсюда следует утверждение п. А.

Доказательство п. В аналогично, если воспользоваться леммой 3.

Замечание 2. Для стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $r(t)$ условие (4) эквивалентно условию

$$r(t) = \lambda_0 - \frac{\lambda_2}{2} t^2 + o(t^2)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} MC_x(\xi)\,\mu(dx) \leq \sqrt{\lambda_2}.$$

Следствие 1. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ и функция $u(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, но условие (5) не выполняется в некоторых точках $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ и $u(t_k) \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. Тогда $P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1$.

Доказательство проводим для случая, когда условие (5) не выполняется только в одной точке. Для доказательства в общем случае отрезок [0, 1] разбиваем на элементы, содержащие лишь по одной точке t_k. Пусть

$$P\{\xi(t_0)=0\}=1,\ u(t_0)\neq 0.$$

Предположим, что $P\{C_u(\xi)=\infty\}>0$. Из теоремы 2 следует, что на отрезках $[0, t_0-\varepsilon]$, $[t_0+\varepsilon, 1]$ выборочные функции пересекают кривую $u(t)$ конечное число раз с в. 1. Поэтому для любых $\varepsilon>0$, $\omega\in\{C_u(\xi)=\infty\}$ функция $\xi(t,\omega)$ пересекает кривую $u(t)$ бесконечное число раз на отрезке $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. Из непрерывности процесса $\xi(t)$ вытекает, что

$$P\{C_u(\xi)=\infty\}\leq P\{\xi(t_0)=u(t_0)\}.$$

Но это неравенство противоречит предположению, что $\xi(t_0)=0$ с в. 1. Доказательство закончено.

Теорема 3. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с непрерывными выборочными функциями, $M\xi(t)=0$. Если $u(t)$ — непрерывная функция ограниченной вариации и выполнены условия (4), (5), то $MC_u(\xi)<\infty$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} MC_x(\xi)\,\mu(dx)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bigvee_0^1[\sigma(t,s)]. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть $\varphi_k(t)$ — собственные функции корреляционного ядра $r(t,s)$ и

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t) \qquad (8)$$

разложение Карунена-Лоэва процесса $\xi(t)$. Известно [6], что для гауссовского процесса с непрерывными выборочными функциями ряд (8) сходится равномерно с в. 1.

Для гауссовской случайной величины ξ, $M\xi=0$, справедливо равенство $M|\xi|=\sqrt{\frac{2}{\pi}M\xi^2}$. Отсюда, используя теоремы 1, 2, получаем утверждение теоремы 3.

Отметим, что для гауссовского стационарного процесса $\bigvee_0^1[\sigma(t,s)]=\sqrt{\lambda_2}$, $MC_x(\xi)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda_0}\right)$ и нетрудно проверить, что (7) выполняется.

Теорема 4. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс с непрерывными выборочными функциями и

$$\overline{\lim}\, h^{-1}\inf_{|t-s|\geq h}\sigma(t,s)=\infty, \qquad (9)$$

$$A_y=\{\inf_{t\in[0,1]}\xi(t)<y<\sup_{t\in[0,1]}\xi(t)\}.$$

Тогда для любого y такого, что $P\{Ay\}>0$, имеем

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} C_x(\xi)\,\mu(dx)=\infty\right)/A_y\right\}=1.$$

Доказательство. Из условия (9) следует, что $\bigvee_a^b[\sigma(t,s)]=\infty$ для любого отрезка $[a,b]\subset[0,1]$. Поэтому, согласно [3], $P\left\{\bigvee_a^b(\xi)=\infty,\ [a,b]\subset[0,1]\right\}=1.$

Для любого $\omega\in A_y$ и любого n такого, что

$$\inf_{t\in[0,1]}\xi(t,\omega)<y-\frac{1}{n}<y+\frac{1}{n}<\sup_{t\in[0,1]}\xi(t,\omega),$$

по лемме 1 имеем

$$\int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} C_x(\xi)\,\mu(dx)=\bigvee_{a_n}^{b_n}(\xi)=\infty,$$

где $\xi(a_n)=y-\frac{1}{n}$, $\xi(b_n)=y+\frac{1}{n}$.

Доказательство закончено.

Следствие 2. Пусть $\xi(t)$ невырожденный гауссовский стационарный процесс и $\lambda_2=\infty$. Тогда

$$P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} C_x(\xi)\,\mu(dx)=\infty\right)/A_y\right\}=1.$$

Если гауссовский процесс вырожден, то $P\{A_y\}>0$.

Доказательство следствия 2 вытекает из теоремы 4, так как если $\lambda_2=\infty$, то, согласно [3],

$$P\left\{\bigvee_a^b(\xi)=\infty,\ [a,b]\subset[0,1]\right\}=1.$$

Таким образом, если выборочная функция гауссовского стационарного процесса пересекает уровень y и $\lambda_2=\infty$, то для произвольного k в ε-окрестности y существует уровень y_k, который она пересекает не менее k раз, для любого $\varepsilon>0$.

Автор выражает благодарность М. И. Ядренко и В. В. Булдыгину за полезные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М., «Наука», 1974.
3. *Мацак І. К.* Умови обмеженості та необмеженості варіації випадкового процесу. — «ДАН УРСР. Сер. А», 1973, 9.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971.
5. *Jain C., Marcus M. B.* Sufficient for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random series of functions.—«Ann. Inst. Four.», 1974. 24, 2, p. 117—141.
6. *Jain C., Kallianpur G.* A note on uniform convergence of stochastic processes. — «Ann. Math. Statist.», 1970, 41, 4, p. 1360—1362.

I. K. Matsak

ON THE NUMBER OF INTERSECTIONS OF CURVE BY A STOCHASTIC PROCESS

The sufficient conditions are shown for a boundedness of the mean number of intersections of curve by a stochastic process.

Поступила в редколлегию 27.II 1975.