Ю. С. МИШУРА, асп. (*Киевский университет*)

О СХОДИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ В J-ТОПОЛОГИИ

1. Пусть на множестве $T=[0,\ 1]^2$ задано семейство D_T функций $x(\vec t)$, $\vec t\in T$ таких, что для всех $\vec t\in T$ существует $\lim\limits_{\substack{|\vec s-\vec t|\to 0\\ \vec s\in M_{\vec t}^{(\alpha_1\alpha_2)}}} x(\vec s)$,

где $(\alpha_1\alpha_2)=(++),\ (+-),\ (-+),\ (--)$,

$$M_{\vec t}^{(++)}=\{\vec s=(s_1,\ s_2)\in T: s_1\geqslant t_1,\ s_2\geqslant t_2\},$$

$$M_{\vec t}^{(+-)}=\left\{\begin{matrix}\vec s\in T: s_1\geqslant t_1,\ s_2<t_2, \text{ если } t_2\neq 0,\\ s_1\geqslant t_1,\ s_2=0, \text{ если } t_2=0\end{matrix}\right\},$$

$$M_{\vec t}^{(-+)}=\left\{\begin{matrix}\vec s\in T: s_1<t_1,\ s_2\geqslant t_2, \text{ если } t_1\neq 0,\\ s_1=0,\ s_2\geqslant t_2, \text{ если } t_1=0\end{matrix}\right\},$$

$$M_{\vec t}^{(--)}=\left\{\begin{matrix}\vec s\in T: s_1<t_1,\ s_2<t_2, \text{ если } t_1\neq 0,\ t_2\neq 0,\\ s_1=0,\ s_2<t_2, \text{ если } t_1=0,\ t_2\neq 0,\\ s_1<t_1,\ s_2=0, \text{ если } t_1\neq 0,\ t_2=0,\\ s_1=s_2=0, \text{ если } t_1=t_2=0\end{matrix}\right\},$$

причем $x(\vec t)=\lim\limits_{|\vec s-\vec t|\to 0,\ \vec s\in M_{\vec t}^{(++)}} x(\vec s)$.

Пусть на T задано множество Λ гомеоморфизмов T на себя, $\Lambda \ni \lambda(\vec{t}) = (\lambda_1(t_1), \lambda_2(t_2))$, где $\lambda_i(t_i)$ — гомеоморфизмы $[0, 1]$ на себя, $\lambda_i(0) = 0$, $\lambda_i(1) = 1$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим в пространстве D_T метрику, введенную в работе [1] аналогично метрике Скорохода для функций, заданных на отрезке [2]:

$$d(x(\cdot), y(\cdot)) = \inf_{\lambda(\cdot)\in\Lambda} \{ \sup_{\vec{t}\in T} |x(\vec{t}) - y(\lambda(\vec{t}))| + |\vec{t} - \lambda(\vec{t})| \}.$$

Необходимые и достаточные условия компактности последовательности функций из пространства D_T приведены в работе [1].

Пусть заданы два разбиения отрезка $[0, 1]$ $0 = s_i^0 < s_i^1 < \ldots < s_i^{k_i} = 1$, $i = 1, 2$.

Определим S^c- и S_c- сеть на T следующим образом. Точки $\vec{s}_{ij} = (s_1^i, s_2^j)$ образуют S_c-сеть в T с элементами $S^{(i,j)} = [s_1^i, s_1^{i+1}) \times [s_2^j, s_2^{j+1})$, если $s_i^j - s_i^{j-1} < c$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, k_i}$, и S^c-сеть, если $s_i^j - s_i^{j-1} > c$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, k_i}$.

Определим теперь модуль непрерывности для произвольной функции $x(\vec{t})$, $\vec{t} \in T$ и $c > 0$

$$\Delta(x(\cdot), c) = \inf_{\{S^c\}} \max_{i,j} \sup_{\vec{t}, \vec{t}' \in S^{(i,j)}} |x(\vec{t}) - x(\vec{t}')|.$$

Теорема 1 [1]. Пусть для последовательности функций $x_n(\vec{t}) \in D_T$, $n \geqslant 0$, $\vec{t} \in T$ выполняются условия:

1) $\sup\limits_n \sup\limits_{\vec{t}\in T} |x_n(\vec{t})| < \infty$,

2) $\lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \Delta(x_n(\cdot), c) = 0$.

Тогда последовательность функций $x_n(\vec{t})$ компактна в топологии J.

Проверка условия 2) для последовательностей конкретных случайных функций затруднительна. Введем несколько иной модуль непрерывности

$$\Delta'(x(\cdot), c) = \Delta_1'(x(\cdot), c) + \Delta_2'(x(\cdot), c),$$

где

$$\Delta_1'(x(\cdot), c) = \max_{\substack{i=1, j=2\\ i=2, j=1}} \sup_{t_i, t_i' \in [0,1]} \sup_{t_j - c < t_j' \leqslant t_j \leqslant t_j'' < t_j + c} \{\min[\,|x(t_i, t_j) - x(t_i, t_j')|, \; |x(t_i', t_j) - x(t_i', t_j'')|\,]\},$$

$$\Delta_2'(x(\cdot), c) = \sup_{\substack{|\vec{t} - \vec{t}'| < c\\ \vec{t}\in T, \vec{t}' \in \partial T}} |x(\vec{t}) - x(\vec{t}')|,$$

$$\partial T=\{t_1=0,\ 0\leq t_2\leq 1\}\cup\{t_1=1,\ 0\leq t_2\leq 1\}\cup$$
$$\cup\{t_2=0,\ 0\leq t_1\leq 1\}\cup\{t_2=1,\ 0\leq t_1\leq 1\}.$$

Теорема 2. Пусть для последовательности функций $x_n(\vec{t})\in D_T$, $n\geqslant 0$, $\vec{t}\in T$ выполняются условия: 1) теоремы 1 и

$$(A):\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\Delta'(x_n(\cdot),c)=0.$$

Тогда выполняется условие 2) теоремы 1, и последовательность $x_n(\vec{t})$ компактна в J-топологии.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ задан. Выберем $c>0$ и N так, чтобы для $n>N$

$$\Delta_1'(x_n(\cdot),c)<\varepsilon,\quad \Delta_2'(x_n(\cdot),c)<\varepsilon. \tag{1}$$

Из определения пространства D_T следует, что функции $x(\vec{t})$, принадлежащие D_T, могут терпеть разрывы только вдоль линий $\{t_1=a_1,\ b_2\leq t_2\leq c_2\}$ и $\{t_2=a_2,\ b_1\leq t_1\leq c_1\}$, $0<a_1,\ a_2\leq 1$, $0\leq b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\leq 1$. Назовем линию $\{t_1=a_1,\ b_2\leq t_2\leq c_2\}$ линией разрыва модуля ε, если

$$\sup_{b_2\leqslant t_2\leqslant c_2}|x(a_1,t_2)-x(a_1-0,t_2)|>\varepsilon.$$

Аналогично определяется линия $\{t_2=a_2,\ b_1\leq t_1\leq c_1\}$ разрыва модуля ε.

Рассмотрим для некоторого $n>N$ функцию $x_n(\vec{t})$. Нетрудно убедиться, что при выполнении неравенств (1)

$$\min\{|x_n(t_1^{(1)},t_2)-x_n(t_1^{(2)},t_2)|,\ |x_n(t_1^{(4)},t_2')-x_n(t_1^{(3)},t_2')|\}<2\varepsilon$$

для всех $0\leq t_2,\ t_2'\leq 1$, $t_1^{(1)}<t_1^{(2)}<t_1^{(3)}<t_1^{(4)}$, $t_1^{(4)}-t_1^{(1)}<c$. Поэтому функция $x_n(\vec{t})$ не может иметь двух линий разрыва модуля 2ε $\{t_1=a_1,\ b_2\leq t_2\leq c_2\}$ и $\{t_1=a_1',\ b_2'\leq t_2\leq c_2'\}$, для которых $|a_1-a_1'|<c$. Аналогично можно показать, что $x_n(\vec{t})$ не может иметь двух линий разрыва модуля 2ε $\{t_2=a_2,\ b_1\leq t_1\leq c_1\}$ и $\{t_2=a_2',\ b_1'\leq t_1\leq c_1'\}$, для которых $|a_2-a_2'|<c$. Поэтому можно образовать $S^{c/2}$-сеть в T, такую, чтобы она была одновременно и $S_{c/2}$-сетью и чтобы линии этой сети содержали все линии разрыва модуля 2ε функции $x_n(\vec{t})$.

Покажем, что для всех $S^{(ij)}$ — элементов построенной сети, где $S^{(ij)}=[s_1^i,\ s_1^{i+1})\times[s_2^j,\ s_2^{j+1})$, выполняется неравенство

$$\alpha_{ij}(x_n(\cdot))=\sup_{\vec{t},\vec{t}'\in S^{(ij)}}|x_n(\vec{t})-x_n(\vec{t}')|<12\varepsilon.$$

Очевидно,

$$\alpha_{ij}(x_n(\cdot)) \leq \sup_{(t_1,t_2),(t'_1,t_2)\in S^{(i,j)}} |x_n(t_1, t_2) - x_n(t'_1, t_2)| +$$

$$+ \sup_{(t_1,t_2),(t_1,t'_2)\in S^{(ij)}} |x_n(t_1, t_2) - x_n(t_1, t'_2)|.$$

Далее, если фиксировать, например, t_2 и рассматривать $x_n(t_1, t_2)$ как функцию t_1, то $x_n(\cdot, t_2)$ будет функцией без разрывов второго рода, заданной на $[0, 1]$, причем ее скачки на каждом из интервалов $[s_i, s_{i+1})$ не превысят 2ε. Применим к $x_n(\cdot, t_2)$ теорему 14.4 [3], из которой следует, что для такой функции при каждом t_2

$$\sup_{s_1^i \leq t_1 \leq t'_1 < s_1^{i+1}} |x_n(\vec{t}) - x_n(t'_1, t_2)| < 6\varepsilon,$$

и, аналогично, при каждом t_1

$$\sup_{s_2^j \leq t_2 \leq t'_2 < s_2^{j+1}} |x_n(\vec{t}) - x_n(t_1, t'_2)| < 6\varepsilon,$$

откуда $\alpha_{ij}(x_n(\cdot)) < 12\varepsilon$.

Это означает, что для $S^{c/2}$-сети, выбранной таким образом,

$$\max_{i,j} \sup_{\vec{t}, \vec{t}'\in S^{(ij)}} |x_n(\vec{t}) - x_n(\vec{t}')| < 12\varepsilon,$$

то есть $\Delta(x_n(\cdot), c/2) < 12\varepsilon$, если только $\Delta'(x_n(\cdot), c) < 2\varepsilon$. Следовательно, выполняется условие 2 теоремы 1, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание 1. Можно показать, что при выполнении условия 2) имеет место (A), то есть эти условия эквивалентны.

2. Пусть $\xi_n(\vec{t}), \vec{t}\in T, n \geq 0$ — последовательность случайных полей, реализации которых принадлежат пространству $\mathbf{D}_T$ с вероятностью 1, $\mathbf{B}_T$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все цилиндрические множества из $\mathbf{D}_T$, $\mu_{\xi_0(\vec{t}),T}$ — мера, соответствующая случайному полю $\xi_0(\vec{t})$.

Через $\mathbf{J}_{\xi_0(\vec{t}),T}$ обозначим пространство измеримых относительно $\mathbf{B}_T$ функционалов на $\mathbf{D}_T$, непрерывных в топологии $\mathbf{J}$ почти всюду относительно меры $\mu_{\xi_0(\vec{t}),T}$.

В работе [1] приведен следующий критерий сходимости последовательности случайных полей в топологии $\mathbf{J}$.

Теорема 3. Для любого функционала $f(\cdot)\in \mathbf{J}_{\xi_0(\vec{t}),T}$

$$f(\xi_n(\vec{t})) \Rightarrow f(\xi_0(t))^{*)}, \quad n\to\infty$$

*) Символ $\Rightarrow$ обозначает сходимость конечномерных распределений.

тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$1)\ \xi_n(\vec{t}) \Rightarrow \xi_0(\vec{t}),\quad n \to \infty,\quad \vec{t} \in M,$$

где M — некоторое счетное, всюду плотное на T множество;

$$2)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta(\xi_n(\cdot), c) > \varepsilon\} = 0,\ \varepsilon > 0.$$

Учитывая теорему 2, сформулируем следующие достаточные условия сходимости последовательности случайных полей в топологии **J**.

Теорема 4. Пусть для последовательности $\vec{\xi}_n(t)$ случайных полей, реализации которых принадлежат $\mathbf{D}_T$ с вероятностью 1, выполняются условия 1) теоремы 3 и

$$(B)\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} P\{\Delta'(\xi_n(\cdot), c) > \varepsilon\} = 0,\ \varepsilon > 0.$$

Тогда для всякого функционала $f(\cdot) \in \mathbf{J}_{\xi_0(\vec{t}),T}$

$$f(\xi_n(\vec{t})) \Rightarrow f(\xi_0(\vec{t})),\ n \to \infty.$$

3. Применим полученные результаты к полям с независимыми приращениями. Пусть $\vec{s} = (s_1, s_2) \in T$, $t = (t_1, t_2) \in T$, и $\vec{t} \in M_{\vec{s}}^{(++)}$. Приращением случайного поля $\xi(\cdot)$ на $[s_1, t_1]\times[s_2, t_2]$ назовем $\delta_{\vec{s}\,\vec{t}}(\xi(\cdot)) = \xi(\vec{t}) - \xi(s_1, t_2) - \xi(t_1, s_2) + \xi(\vec{s})$. Случайное поле $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in T$ называется полем с независимыми приращениями, если для любых двух разбиений отрезка $[0, 1]$ $0 = s_l^0 < s_l^1 < \ldots < s_l^{k_l} = 1$, $l = 1, 2$ приращения $\delta_{\vec{s}_{k,l}\,\vec{s}_{k+1,l+1}}(\xi(\cdot))$, где $\vec{s}_{k,l} = (s_1^k, s_2^l)$, независимы для всех $k = \overline{0, k_1}$ $l = \overline{0, k_2}$.

Лемма 1. Пусть γ_{ij}, $i, j > 0$ — совокупность независимых случайных величин, $s(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^{k_1}\sum_{j=1}^{k_2}\gamma_{ij}$. Если выполняется условие

$$(C){:}\, P\{|\,k_1, k_2) - s(k_1', k_2')\,| > \theta/16\} < \alpha < 1/2$$

для всех $i_m \leq k_m < k_m' \leq n_m$, $m = 1, 2$, то:

$$а)\ P\{\sup_{\substack{i_1\leq k_1<k_1'\leq n_1\\ i_2\leq k_2\leq n_2}} |s(k_1, k_2) - s(k_1', k_2)\,| > \theta\} \leq (1-\alpha)^{-1}(1-2\alpha)^{-1} \times$$

$$\times P\{|s(n_1, n_2) - s(i_1, n_2)\,| > \theta/8\};$$

$$б)\ P\{\sup_{\substack{i_1\leq k_1\leq n_1\\ i_2\leq k_2<k_2'\leq n_2}} |s(k_1, k_2) - s(k_1, k_2')\,| > \theta\} \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^{-1}(1-2\alpha)^{-1}\cdot P\{|\,s(n_1, n_2) - s(n_1, i_2)| > \theta/8\}.$$

Доказательство. Поскольку утверждения а) и б) доказываются аналогично, докажем, например, а). Пусть C — событие, заключающееся в том, что

$$\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2\leqslant n_2}} |s(k_1, k_2) - s(k_1', k)| > \theta,$$

$$C_{l_1l_2} = \{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<l_1\\ i_2\leqslant k_2<l_2}} |s(k_1, k_2) - s(i_1, k_2)| < \theta/2, \sup_{i_2\leqslant k_2<l_2} |s(l_1, k_2) -$$

$$- s(i_1, k_2)| < \theta/2\}. |s(l_1, l_2) - s(i_1, l_2)| > \theta/2\}.$$

Тогда

$$C \subseteq \{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2\leqslant n_2}} |s(k_1, k_2) - s(i_1, k_2)| > \theta/2\} \subseteq U_{l_1=i_1}^{n_1} U_{l_2=i_2}^{n_2} C_{l_1l_2}.$$

Пусть $D_{l_1l_2} = \{|s(n_1, l_2) - s(l_1, l_2)| < \theta/4\}$. Тогда

$$C \subseteq (U_{l_1=i_1}^{n_1} U_{l_2=i_2}^{n_2} \{C_{l_1l_2} \cap D_{l_1l_2}\}) \cup (U_{l_1=i_1}^{n_1} U_{l_2=i_2}^{n_2} \{C_{l_1l_2} \cap \overline{D}_{l_1l_2}\}),$$

$$U_{l_1=i_1}^{n_1} \{C_{l_1l_2} \cap D_{l_1l_2}\} \subseteq \sup_{i_2\leqslant l_2\leqslant n_2} |s(n_1, l_2) - s(i_1, l_2)| > \theta/4\}.$$

Поэтому

$$U_{l_1=i_1}^{n_1} U_{l_2=i_2}^{n_2} \{C_{l_1l_2} \cap D_{l_1l_2}\} \subseteq \{\sup_{i_2\leqslant l_2\leqslant n_2} |s(n_1, l_2) - s(i_1, l_2)| > \theta/4\},$$

откуда в силу независимости событий $C_{l_1l_2}$ и $D_{l_1l_2}$ для любой пары (l_1, l_2)

$$P\{C\} \leqslant (1-\alpha)^{-1} P\{\sup_{i_2\leqslant l_2\leqslant n_2} |s(n_1, l_2) - s(i_1, l_2)| > \theta/4\} \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha)^{-1}(1-2\alpha)^{-1} \sum_{l_2=i_2}^{n_2} P\{\sup_{i_2\leqslant k_2<l_2} |s(n_1, k_2) - s(i_1, k_2)| <$$

$$< \theta/4, |s(n_1, l_2) - s(i_1, l_2)| > \theta/4, |s(n_1, n_2) - s(i_1, n_2) -$$

$$- s(n_1, l_2) + s(i_1, l_2)| < \theta/8\} \leqslant (1-\alpha)^{-1}(1-2\alpha)^{-1} P\{|s(n_1, n_2) -$$

$$- s(i_1, n_2)| > \theta/8\}.$$

Лемма 2. Если выполняются условия леммы 1, то:

а) $$P\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'<k_1''\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2<k_2'\leqslant n_2}} \min[|s(k_1', k_2) - s(k_1, k_2)|, |s(k_1'', k_2') -$$

$$- s(k_1', k_2')|] > \theta\} \leqslant (1-\alpha)^{-2}(1-2\alpha)^{-2} P\{|s(n_1, n_2) -$$

$$- s(n_1, i_2)| > \theta/16\}^2;$$

б) $P\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2<k_2'<k_2''\leqslant n_2}} \min[|s(k_1,k_2')-s(k_1,k_2)|,|s(k_1',k_2'')-$

$$-s(k_1',k_2')|]>\theta\}\leqslant(1-\alpha)^{-2}(1-2\alpha)^{-2}P\{|s(n_1,n_2)-$$

$$-s(n_1,i_2)|>\theta/16\}^2.$$

Доказательство. Приведем доказательство утверждения а); б) доказывается аналогично. Пусть

$$C_1=\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'<k_1''\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2<k_2'\leqslant n_2}} \min[|s(k_1',k_2)-s(k_1,k_2)|,|s(k_1'',k_2')-s(k_1',k_2')|]>\theta\}$$

$$C_{l_1l_2}=\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<l_1\\ i_2\leqslant k_2<l_2}}|s(k_1,k_2)-s(i_1,k_2)|<\theta/2,\ \sup_{i_2\leqslant k_2<l_2}|s(l_1,k_2)-s(i_1,k_2)|<\theta/2,$$

$$|s(l_1,l_2)-s(i_1,l_2)|>\theta/2,\ \sup_{\substack{l_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ l_2\leqslant k_2\leqslant n_2}}|s(k_1,k_2)-s(k_1',k_2)|>\theta\}.$$

Тогда $C_1\subseteq U_{l_1=i_1}^{n_1}U_{l_2=i_2}^{n_2}C_{l_1l_2}$, причем события $C_{l_1l_2}$ и $C_{l_1'l_2'}$ попарно не пересекаются, если $(l_1,l_2)\neq(l_1',l_2')$. Кроме того, события $\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<l_1\\ i_2\leqslant k_2<l_2}}|s(k_1,k_2)-s(i_1,k_2)|<\theta/2,\ \sup_{i_2\leqslant k_2<l_2}|s(l_1,k_2)-s(i_1,k_2)|<\theta/2,$ $|s(l_1,l_2)-s(i_1,l_2)|>\theta/2\}$ и $\{\sup_{\substack{l_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ l_2\leqslant k_2\leqslant n_2}}|s(k_1,k_2)-s(k_1',k_2)|>\theta\}$ независимы при всех (l_1,l_2). Поэтому

$$P\{C_1\}\leqslant P\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2\leqslant n_2}}|s(k_1,k_2)-s(k_1',k_2)|>$$

$$>\theta\}P\{\sup_{\substack{i_1\leqslant k_1<k_1'\leqslant n_1\\ i_2\leqslant k_2\leqslant n_2}}|s(k_1,k_2)-s(k_1',k_2)|>\theta/2\}.$$

Используя лемму 1, получаем

$$P\{C_1\}\leqslant(1-\alpha)^{-2}(1-2\alpha)^{-2}P\{|s(n_1,n_2)-s(i_1,n_2)|>\theta/16\}^2.$$

С помощью лемм 1 и 2 можно доказать следующие теоремы, аналогичные приведенным в работе [4] для случайных процессов с независимыми приращениями.

Теорема 5. Пусть для случайного поля $\xi(\vec{t}),\ \vec{t}\in T$ с независимыми приращениями, реализации которого принадлежат пространству $\mathbf{D}_T$ с вероятностью 1, и некоторого $\theta>0$ выполняется условие

(D): если $|\vec{t}-\vec{t}'|<2c$, то

$$P\{|\xi(\vec{t})-\xi(\vec{t}')|>\theta/32\}<\alpha<1/2.$$

Тогда

$$P\{\Delta'(\xi(\cdot),c)>\theta\}\leq 2\alpha(1-\alpha)^{-2}(1-2\alpha)^{-2}\left[\sum_{k=0}^{r_1-1}P\{|\xi(t_{k+1},1)-\right.$$

$$-\xi(t_k,1)|>\theta/32\}+\sum_{k=0}^{r_2-1}P\{|\xi(1,t'_{k+1})-\xi(1,t'_k)|>$$

$$>\theta/32\}+2\alpha[(1-\alpha)(1-2\alpha)]^{-1},$$

где $0=t_0<t_1<\ldots<t_{r_1}=1$, $0=t'_0<\ldots<t'_{r_2}=1$ — разбиения отрезка [0, 1] такие, что $c<|t_{k+1}-t_k|<2c$, $c<|t'_{k+1}-t'_k|<2c$.

Теорема 6. Пусть $\xi_n(\vec{t}), n\geqslant 0, \vec{t}\in T$ — последовательность случайных полей с независимыми приращениями, реализации которых принадлежат пространству $\mathbf{D}_T$ с вероятностью 1. Пусть выполняются условия

$$(\mathrm{E}):\xi_n(\vec{t})\Rightarrow\xi_0(\vec{t}),\ n\to\infty,$$

$\xi_0(\vec{t})$ — стохастически непрерывное поле;

$$(\mathrm{F}):\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|\vec{t}-\vec{t}'|<c}P\{|\xi_n(\vec{t})-\xi_n(\vec{t}')|>\varepsilon\}=0,\ \varepsilon>0.$$

Тогда для любого $f(\cdot)\in \mathbf{J}_{\xi_0(\vec{t}),T}$ $f(\xi_n(\vec{t}))\Rightarrow f(\xi_0(\vec{t}))$, $n\to\infty$.

Замечание 2. Как показано в работе [5], реализации стохастически непрерывного поля с независимыми приращениями с точностью до стохастической эквивалентности принадлежат пространству $\mathbf{D}_T$ с вероятностью 1. Поэтому в условии теоремы 6 можно не требовать принадлежности реализаций поля $\xi_0(\vec{t})$ пространству $\mathbf{D}_T$.

Замечание 3. Все полученные результаты можно перенести на случай функций, заданных на множестве $[0, 1]^k$ и принимающих значения в R_m, $k>2$, $m>1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Straf M.* Stochastic processes with several parameters. — Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium of Mathematical Statistics and Probability, 1971.

2. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1956, 1, № 3.

3. *Billingsley P.* Convergence of Probability Measures. N. Y., Wiley, 1968.

4. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., «Наука», 1964.

5. *Каткаускайте Л. А.* Случайные поля с независимыми приращениями.— «Литовский математический сборник», 1972, № 4.

Yu. S. Mishura

ON CONVERGENCE OF STOCHASTIC FIELDS IN J-TOPOLOGY

The sufficient conditions of convergence of stochastic fields in J-topology are considered and applied to the fields with independent increments.

Поступила в редколлегию 17.II 1976.