Г. В. СЕРОВА, ас.
(Архангельский лесотехнический институт)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

1. **Введение.** В настоящей работе изучается скорость сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин (н. с. в.) и сумм случайного числа н. с. в.

Пусть $\{X_k\}$ — последовательность н. с. в. с $EX_k=0$ и $EX_k^2=$ $=b_k^2<\infty$. Положим $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$, $B_n^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2$, $B_0^2=0$.

Будем говорить, что последовательность $\{X_k\}$ н. с. в. удовлетворяет условию A, если $B_n\to\infty$ и существует с. в. X с конечной дисперсией и постоянные $\gamma>0$ и $x_0>0$, такие, что для всех n и $x\geqslant x_0$

$$\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|\geqslant x)\leqslant\gamma B_n^2P(|X|\geqslant x).$$

Последовательность $\{X_k\}$ н. с. в. удовлетворяет условию B, если эта последовательность удовлетворяет условию A и $EX^2\log(1+$ $+|X|<\infty$.

Пусть

$$X_{nk}=\begin{cases}X_k, & \text{если } |X_k|\leqslant B_n,\\ 0, & \text{если } |X_k|>B_n,\end{cases}\quad (k=1,2,\dots,n),$$

$$\sigma_n^2=\sum_{k=1}^{n}DX_{nk},\quad S_{nn}=\sum_{k=1}^{n}X_{nk},\ \mu_n=\sum_{k=1}^{n}EX_{nk}.$$

Пусть, кроме того, $F(x)$ и $F_k(x)$ — функции распределения с. в. X и X_k соответственно; $\Phi(x)$ —стандартная нормальная функция распределения; C, c — положительные постоянные, которые принимают различные значения.

Ф. Н. Галстяном [1] доказана следующая теорема. Если последовательность н. с. в. удовлетворяет условию В и существует постоянная $c>0$ такая, что

$$B_n^2 \geqslant cn \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

то $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| P\left(\frac{S_n}{B_n} < x\right) - \Phi(x) \right| < \infty$$

для любого x.

Условие, аналогичное (1), имеется и в статье [2], в которой изучается скорость сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайного числа н. с. в.

Целью этой работы является ослабить ограничение (1) и рассмотреть случаи, когда B_n^2 может расти медленнее n.

2. Скорость сходимости в центральной предельной теореме для сумм независимых случайных величин. Теорема 1. Если последовательность н. с. в. $\{X_k\}$ удовлетворяет условию А и существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$B_n^2 \leqslant c_0 B_{n-1}^2 \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

то $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (b_n^2/B_n^2) \left| P\left(\frac{S_n}{B_n} < x\right) - \Phi\left(\frac{xB_n}{\sigma_n}\right) \right| < \infty$ для всех x.

Теорема 2. Если последовательность н. с. в. $\{X_k\}$ удовлетворяет условиям B и (2), то

$$\sum_{n=2}^{\infty} (b_n^2/B_n^2) \,|\, P(S_n/B_n < x) - \Phi(x) \,| < \infty$$

для всех x.

Теорема 3. Если последовательность н. с. в. $\{X_k\}$ удовлетворяет условиям A, (2) и $E|X|^{2+\alpha} < \infty$ для некоторого $0 < \alpha < 1$, то

$$\sum_{n=2}^{\infty} (b_n^2/B_n^{2-\alpha}) \,|\, P(S_n/B_n < x) - \Phi(x) \,| < \infty$$

для любого x.

Для доказательства теорем нам потребуется ряд лемм.

Лемма 1. Пусть $\{X_k\}$ — последовательность н. с. в., удовлетворяющая условию A, и $E|X|^{2+s} < \infty$. $0 \leqslant s < 1$. Для любого $1 \leqslant r \leqslant 2 + s$ и $H \geqslant x_0^r$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqslant H} |x|^r \, dF_k(x) \leqslant c_1 B_n^2 \int\limits_{|x| \leqslant H} |x|^r dF(x).$$

Это неравенство доказывается точно так же, как и аналогичное неравенство в статье [2] (стр. 360).

Лемма 2. [3] (стр. 339). Пусть $\{a_n\}$—последовательность неотрицательных чисел, $A_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \to \infty$, и пусть $\psi(x)$—неубывающая функция в

$x > 0$. Тогда если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(n\psi(n))^{-1}$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/A_n^*\psi(A_n^*)$.

Доказательство теоремы 1. Справедливы неравенства

$$P(S_{nn}/B_n < x) - \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n) \leqslant P(S_n/B_n < x) \leqslant$$

$$\leqslant P(S_{nn}/B_n < x) + \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n). \tag{3}$$

Пусть

$$A_n = b_n^2(B_n^2)^{-1}\left(P(S_n/B_n < x) - \Phi\left(x\frac{B_n}{\sigma_n}\right)\right),$$

$$D_n = b_n^2(B_n^2)^{-1}\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n),$$

$$C_n = b_n^2(B_n^2)^{-1}(P(S_{nn}/B_n < x) - \Phi(xB_n/\sigma_n)).$$

Из (3) следует, что $C_n - D_n \leqslant A_n \leqslant C_n + D_n$. Итак, чтобы доказать теорему 1 достаточно показать, что сходятся ряды $\sum_{n=2}^{\infty} D_n$ и $\sum_{n=2}^{\infty}|C_n|$.

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} D_n$. Из условия А следует

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n = c + \sum_{n: B_n \geqslant x_0} b_n^2 B_n^{-2}\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n) \leqslant$$

$$\leq c + \gamma\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 P(|X| > B_n) = c +$$

$$+ \gamma\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k^2 < X^2 \leqslant B_{k+1}^2) \leqslant c + \gamma\sum_{k=2}^{\infty} B_k^2 P(B_k^2 < X^2 \leqslant B_{k+1}^2) \leqslant$$

$$\leqslant c + \gamma EX^2 < \infty.$$

Нам осталось доказать, что $\sum_{n=2}^{\infty}|C_n| < \infty$. Из условия $EX_k = 0$

и леммы 1 следует, что

$$1 \geqslant \sigma_n^2/B_n^2 \geqslant 1 - 2(B_n^2)^{-1}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>B_n} x^2 dF_k(x) \geqslant 1 - c\int_{|x|>B_n} x^2 dF(x).$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n/B_n = 1. \tag{4}$$

Представим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} C_n$ в виде суммы двух рядов $\sum_{n=2}^{\infty} E_n + \sum_{n=2}^{\infty} K_n$, где

$$E_n = b_n^2(B_n^{-2})[P(S_{nn} - \mu_n/\sigma_n < xB_n - \mu_n/\sigma_n) - \Phi(xB_n - \mu_n/\sigma_n)],$$

$$K_n = b_n^2 B_n^{-2}[\Phi(xB_n - \mu_n/\sigma_n) - \Phi(xB_n/\sigma_n)].$$

По неравенству Эссена

$$|E_n| \leq cb_n^2 B_n^{-2}\sigma_n^{-3}\sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}|^3.$$

Отсюда и из (4) можно заключить, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}|E_n|$ сходится, если

сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-5}\sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}|^3$. Принимая во внимание равенство

$$E|X_{nk}|^3 = -B_n^3 P(|X_k| \geqslant B_n) + 3\int_0^{B_n} x^2 P(|X_k| \geqslant x)\,dx, \tag{5}$$

получаем, согласно условию A,

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-5}\sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}|^3 \leq 3x_0\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{x_0} xP(|X_k| \geqslant x)\,dx + \tag{6}$$

$$+ 3\gamma\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3}\int_0^{B_n} x^2 P(|X| \geqslant x)\,dx.$$

Интегрируя по частям правую часть неравенства (6), получаем следующую оценку:

$$3x_0/2\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3} + \gamma\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 P(|X| \geqslant B_n) +$$

$$+ \gamma\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3}\sum_{k=1}^{n} B_k^3 P(B_{k-1}^2 \leq X^2 < B_k^2). \tag{7}$$

В силу леммы 2 с $a_k = b_k^2$ и $\psi(u) = u^{1/2}$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3}$ сходится, так как сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-3/2}$.

Сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 P(|X| \geqslant B_n)$ вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} D_n$.

Оценим третье слагаемое в правой части (7). Изменяя порядок суммирования, получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 P(B_{k-1}^2 \leq X^2 < B_k^2) \sum_{n=2\vee k}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3}, \tag{8}$$

где $a \vee b$ обозначает наибольшее из чисел a, b.

Используя условие (2), приходим к следующей оценке для (8):

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 P(B_{k-1}^2 \leq X^2 < B_k^2) \int\limits_{B_1^2 \vee B_{k-1}^2}^{\infty} x^{-3/2}\, dx \leq$$

$$\leq c \sum_{k=1}^{\infty} (B_1^2 \vee B_{k-1}^2) P(B_{k-1}^2 \leq X^2 < B_k^2) \leq cEX^2 < \infty.$$

Осталось показать, что $\sum_{n=2}^{\infty} |K_n| < \infty$. По теореме о среднем значении получаем $|K_n| \leq c b_n^2 B_n^{-2} \sigma_n^{-1} |\mu_n|$. Теперь из (4) следует, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} |K_n|$ будет сходиться, если сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-3} \times \left| \sum_{k=1}^{n} EX_{nk} \right|$. В силу леммы 1

$$\sum_{n=2}^{n} b_n^2 B_n^{-3} \left| \sum_{k=1}^{n} EX_{nk} \right| \leq c + c_1 \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-1} \times$$

$$\times \sum_{k=n}^{\infty} B_{k+1} P(B_k \leq |X| < B_{k+1}). \tag{9}$$

Изменяя порядок суммирования и учитывая условие (2), можно доказать сходимость ряда в правой части (9):

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_{k+1} P(B_k \leq |X| < B_{k+1}) \sum_{n=2}^{k} b_n^2 B_n^{-1} \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} B_{k+1} P(B_k \leq |X| < B_{k+1}) \int_{B_1^2}^{B_k^2} x^{-1/2}\, dx \leq 2C_0^{1/2} EX^2 < \infty.$$

Итак, доказана сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} |C_n|$, а вместе с этим доказана теорема 1.

Доказательство теоремы 2. Чтобы показать, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-2} |P(S_n/B_n < x) - \Phi(x)| < \infty$$

для любого x, достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-2} |\Phi(xB_n/\sigma_n) - \Phi(x)|. \tag{10}$$

Применяя теорему о среднем и учитывая (4), можно заключить, что ряд (10) и ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-4} (B_n^2 - \sigma_n^2)$ ведут себя одинаково. Из леммы 1 и условия $EX_k = 0$ следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-4} (B_n^2 - \sigma_n^2) = \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-4} \sum_{k=1}^{n} \Big\{ \int\limits_{|x|>B_n} x^2 dF_k(x) +$$

$$+ \Big[\int\limits_{|x|>B_n} x dF_k(x) \Big]^2 \Big\} \leq c + 2 \sum_{n: B_n \geq x_0^2} b_n^2 B_n^{-4} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>B_n} x^2 dF_k(x) \leq$$

$$\leq c + 2 \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{-2} \int\limits_{|x|>B_n} x^2 dF(x).$$

Положим в лемме 2 $a_k = b_k^2$, тогда $A_n^* = B_n^2$. Функция $\varphi(u) = \Big\{ \int\limits_{|x|>\sqrt{u}} x^2 dF(x) \Big\}^{-1}$ — неубывающая в области $u > 0$. Согласно лемме 2, последний ряд будет сходиться вместе с рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \int\limits_{|x|>\sqrt{n}} x^2 dF(x) \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} (k+1) P(k \leq x^2 < k+1) =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (k+1) P(k \leq X^2 < k+1) \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n} \leq cEX^2 \log(1 + |X|) < \infty.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 3 проводится теми же методами, которыми мы пользовались при доказательстве теорем 1 и 2. Чтобы доказать теорему 3, достаточно доказать сходимость рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n); \tag{11}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-5} \sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}|^3; \tag{12}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3} \left| \sum_{k=1}^{n} EX_{nk} \right|; \tag{13}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-4} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>B_n} x^2 dF_k(x). \tag{14}$$

Из условий A и $E|X|^{2+\alpha} < \infty$ следует сходимость ряда (11)

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n) = c +$$

$$+ \sum_{n: B_n \geqslant x_0} b_n^2 B_n^{\alpha-2} \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > B_n) \leq c +$$

$$+ \gamma \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha} \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k^2 < X^2 \leq B_{k+1}^2) \leq c +$$

$$+ \gamma \sum_{k=2}^{\infty} B_k^{2+\alpha} P(B_k^2 < X^2 \leq B_{k+1}^2) < c + \gamma E|X|^{2+\alpha} < \infty.$$

Принимая по внимание равенство (5) и условие A, для (12) имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-5} \sum_{k=1}^{n} E|X_{nk}|^3 \leq 3x_0 \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-5} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \int_0^{x_0} xP(|X_k| \geqslant x)\, dx + 3\gamma \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3} \int_0^{B_n} x^2 P(|X| \geqslant x)\, dx. \tag{15}$$

Интегрируя по частям правую часть (15), приходим к следующей оценке для ряда (12):

$$\frac{3x_0}{2} \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3} + \gamma \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha} P(|X| \geqslant B_n) +$$

$$+ \gamma \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3} \sum_{k=1}^{n} B_k^3 P(B_{k-1}^2 \leq X^2 < B_k^2). \tag{16}$$

Первый ряд неравенства (16) по лемме 2 мажорируется сходящимся интегралом $\int\limits_2^\infty x^{(\alpha-3)/2}dx$. Сходимость второго ряда вытекает из доказательства сходимости ряда (11). Оценим третье слагаемое. Изменяя порядок суммирования, получаем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^3 P\left(B_{k-1}^2 \le X^2 < B_k^2\right) \sum_{n=2\vee k}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3}. \tag{17}$$

Используя условие (2), приходим к следующей оценке для (17):

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k^3 P\left(B_{k-1}^2 \le X^2 < B_k^2\right) \int\limits_{B_1^2 \vee B_{k-1}^2}^{\infty} x^{(\alpha-3)/2}dx \le$$

$$\le 2(1-\alpha)^{-1} C_0^{3/2} E|X|^{2+\alpha} < \infty.$$

Сходимость ряда (13) следует из леммы 1 и условия (2):

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-3} \left|\sum_{k=1}^{n} EX_{nk}\right| \le c + \sum_{n: B_n \ge x_0} b_n^2 B_n^{\alpha-3} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>B_n} |x|\, dF_k(x) \le c + c_1 \sum_{k=2}^{\infty} B_{k+1} \times$$

$$\times P\left(B_k \le |X| < B_{k+1}\right) \int\limits_{B_1^2}^{B_k^2} x^{(\alpha-1)/2}dx \le CE|X|^{2+\alpha} < \infty.$$

Осталось установить сходимость ряда (14). Вновь применяем лемму 1 и условие (2). Имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-4} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>B_n} x^2 dF(x) \le c + c_1 \times$$

$$\times \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 B_n^{\alpha-2} \sum_{k=n}^{\infty} B_{k+1}^2 P\left(B_k^2 \le X^2 < B_{k+1}^2\right) \le$$

$$\le c + c_1 c_0 \sum_{k=2}^{\infty} B_k^2 P\left(B_k^2 \le X^2 < B_{k+1}^2\right) \times$$

$$\times \int\limits_{B_1^2}^{B_k^2} x^{\alpha/2-1}dx \le CE|X|^{2+\alpha} < \infty.$$

Итак, теорема 3 доказана.

3. **Скорость сходимости в центральной предельной теореме для сумм случайного числа независимых случайных величин.** Пусть $\{X_n\}$ — последовательность н. с. в., определенная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Предположим $EX_n = 0$, $EX_n^2 = b_n^2 < \infty$. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, $\{N_n\}$ — последовательность случайных индексов, определенная на том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Закон распределения с. в. N_n определим следующим образом: $p_k(n) = P(N_n = k)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $p_k(n) \geqslant 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(n) = 1$.

Положим $S_{N_n} = \sum_{k=1}^{N_n} X_k$. Предположим, что $DS_{N_n} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k^2 p_k(n) = L_n^2 < \infty$ для всех n. Пусть $l_n^2 = L_n^2 - L_{n-1}^2$. Определим

$$X_{nk} = \begin{cases} X_k, & \text{если } |X_k| \leqslant L_n, \\ 0, & \text{если } |X_k| > L_n \end{cases}$$

для $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$M_n^* = \sum_{k=1}^{n} DX_{nk}, \quad L_n^* = EM_n^*.$$

Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ н. с. в. удовлетворяет условию C, если $L_n \to \infty$ и существуют постоянные $x_0 > 0$, $\gamma > 0$ и с. в. X такая, что

$$E\left\{\sum_{k=1}^{N_n} P(|X_k| \geqslant x) \leqslant \gamma L_n^2 P(|X| \geqslant x)\right.$$

для любого $x \geqslant x_0$ и всех $n = 1, 2, \ldots$.

Теорема 4. Пусть X_n — последовательность н. с. в., удовлетворяющая условию С, и пусть $\{N_n\}$ — последовательность случайных индексов, независимых от X_n, $n = 1, 2, \ldots$. Предположим, что существует положительная постоянная C_0 такая, что для всех $n \geqslant 2$

$$L_n^2 \leqslant C_0 L_{n-1}^2. \tag{18}$$

Если $EX^2 < \infty$ и

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{-4} \sqrt{DM_n^*} < \infty, \tag{19}$$

то

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{-2} \left| P(S_{N_n} < xL_n) - \Phi\left(\frac{xL_n}{L_n^*}\right)\right| < \infty$$

для любого x.

Теорема 5. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность н. с. в., удовлетворяющая условию C, и $\{N_n\}$ — последовательность случайных индексов, независимых от X_n, $n=1, 2, \ldots$. Предположим, что условия (18) и (19) выполнены. Если $EX^2 \log(1+|X|) < \infty$, то

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{-2} |P(S_{N_n} < xL_n) - \Phi(x)| < \infty$$

для всех x.

Теорема 6. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность н. с. в., удовлетворяющая условию C, со с. в. X такой, что $E|X|^{2+\alpha} < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $\{N_n\}$ — последовательность случайных индексов, независимых от X_n, $n=1, 2, \ldots$. Если выполнены условия (18) и $\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{\alpha-4} \sqrt{DM_n^*} < \infty$, то

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{\alpha-2} \left| P(S_{N_n} < xL_n) - \Phi\left(\frac{xL_n}{L_n^*}\right) \right| < \infty,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} l_n^2 L_n^{\alpha-2} |P(S_{N_n} < xL_n) - \Phi(x)| < \infty$$

для любого x.

Доказательства теорем 4—6 проводятся методами § 2 и работы [2].

Автор выражает глубокую благодарность Л. В. Осипову за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галстян Ф. Н.* О скорости сходимости в центральной предельной теореме.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1971, вып. 5.

2. *Rychlik Z., Szynal D.* Convergence rates in the central limit theorem for sums of a random number of independent random variables.. — «Теория вероятностей и ее применения», 1975, **10**, 3.

3. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972.

G. V. Serova

ON THE RATE OF CONVERGENCE IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM

In this paper some results are obtained for the rate of convergence of sums of independent random variables and for sums of a random number of independent random variables to the normal law.

Поступила в редколлегию 10.III 1976.