Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Г. Т. ТУРСУНОВ, стажер
(*Киевский университет*)

ОБЩИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУММ УПРАВЛЯЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. I

1. В работе изучаются условия сходимости в топологии J сумм управляемых случайных величин.

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ $\mathrm{T}_j(\varepsilon)$, $j=1, 2$ — независимые совокупности случайных величин, определяемые следующим образом:

$\mathrm{T}_1(\varepsilon)=\{\eta_\varepsilon(k),\ k\geqslant 0\}$ — последовательность случайных величин, принимающих значения в конечном или счетном множестве $H=\{1, \ldots, m\}$, $m\leqslant\infty$ (управляющая последовательность);

$\mathrm{T}_2(\varepsilon)=\{\gamma_\varepsilon(k, i),\ k\geqslant 0,\ i\in H\}$ — множество независимых в совокупности случайных величин, распределение которых не зависит от k.

Введем случайный процесс ступенчатых сумм управляемых случайных величин

$$\xi_\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{[tT_\varepsilon]}\frac{\gamma_\varepsilon(k-1, \eta_\varepsilon(k-1))}{u_\varepsilon}, \qquad t\geqslant 0,$$

где T_ε, u_ε — неслучайные неотрицательные функции такие, что T_ε, $u_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Обозначим через $\nu_\varepsilon(n, i)=\sum_{k=1}^{n}\delta(\eta_\varepsilon(k-1), i)$*) число попаданий управляющей последовательности $T_1(\varepsilon)$ в состояние $i\in H$ за n переходов.

Используя независимость совокупностей случайных величин $T_j(\varepsilon)$, $j=1, 2$, нетрудно показать, что для процессов $\xi_\varepsilon(t)$ имеет место следующее представление:

$$\xi_\varepsilon(t)\simeq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon([tT_\varepsilon], i)}\frac{\gamma_\varepsilon(k-1, i)}{u_\varepsilon}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_{\varepsilon i}(\nu_{\varepsilon i}(t)), \qquad t\geqslant 0^{**}). \quad (1)$$

Здесь

$$\nu_{\varepsilon i}(t)=\frac{\nu_\varepsilon([tT_\varepsilon], i)}{V_\varepsilon}, \quad \xi_{\varepsilon i}(t)=\sum_{k=1}^{[tV_\varepsilon]}\frac{\gamma_\varepsilon(k-1, i)}{u_\varepsilon}, \qquad i\in H,$$

где V_ε — неслучайная, неотрицательная функция такая, что $V_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

*) $\delta(i, j)=\{0$, если $i\neq j$; 1, если $i=j$.

**) Символ $\xi_\varepsilon(t)\simeq\xi'_\varepsilon(t)$, $t\in\mathrm{T}$ означает совпадение всех конечномерных распределений случайных процессов $\xi_\varepsilon(t)$ и $\xi'_\varepsilon(t)$.

Относительно совокупностей $T_j(\varepsilon)$, $j=1, 2$ предположим выполненными условия

(A_1): $(\nu_{\varepsilon i}(t),\ i=\overline{1, \infty}) \Rightarrow (\nu_{0i}(t),\ i=\overline{1, \infty})$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $\nu_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ — монотонно возрастающие неотрицательные случайные процессы;

(A_2): $\xi_{\varepsilon i}(t) \Rightarrow \xi_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$ для $i=\overline{1, \infty}$, $\xi_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ — однородные процессы с независимыми приращениями с характеристической функцией

$$\mathbf{M} \exp \{i\lambda \xi_{0j}(t)\} = \exp \{t\Psi_j(\lambda)\},$$

$$\Psi_j(\lambda) = i\alpha_j\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2}\, d\psi_j(x),$$

$\alpha_j = \mathrm{const} \in R_1$, $\psi_j(x)$ — с точностью до постоянных функции распределения на R_1.

Условия (A_1) и (A_2) являются в некотором смысле минимальными для того, чтобы при $\varepsilon \to 0$

$$\xi_\varepsilon(t) \Rightarrow \xi_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t)), \qquad t \geqslant 0^{*)}. \tag{2}$$

Однако нетрудно привести примеры, показывающие, что условия (A_j), $j=1, 2$ недостаточны для выполнения (2).

В настоящей работе изучаются условия, при которых случайные процессы ступенчатых сумм управляемых случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ сходятся в топологии J Скорохода к процессам $\xi_0(t)$, задаваемым рядом (2) (для которого указаны условия сходимости по вероятности к процессу без разрывов второго рода).

В описанной выше постановке условия сходимости конечномерных распределений, а также условия сходимости в топологиях U и J для процессов ступенчатых сумм управляемых случайных величин изучались в различных ситуациях многими авторами. Наибольшее число работ посвящено случаю, когда управляющая последовательность $T_1(\varepsilon)$ представляет собой однородную цепь Маркова [1—9].

В настоящей работе получены условия сходимости процессов ступенчатых сумм управляемых случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ для произвольных асимптотических возвратных последовательностей без предположения, что суммируемые величины вырождаются в нуль вне некоторого конечного подмножества фазового пространства управляющей последовательности. Полученные результаты

---

*) Выражение $\xi_\varepsilon(s) \Rightarrow \xi_0(s)$, $s \in S$ при $\varepsilon \to 0$ означает слабую сходимость всех конечномерных распределений совокупности случайных величин $\xi_\varepsilon(s)$ к $\xi_0(s)$.

применены затем для изучения условий сходимости в топологии J процессов ступенчатых сумм случайных величин, определенных на асимптотически возвратных цепях Маркова.

Замечание 1. В силу независимости совокупностей случайных величин $\mathbf{T}_j(\varepsilon)$, $j=1, 2$ и определения совокупности $\mathbf{T}_2(\varepsilon)$ при выполнении условий $(\mathbf{A}_1)$ и $(\mathbf{A}_2)$ имеет место соотношение

$$(\nu_{\varepsilon i}(t),\ \xi_{\varepsilon i}(t)) \Rightarrow (\bar{\nu}_{0i}(t),\ \bar{\xi}_{0i}(t)),$$
$$t \geqslant 0,\quad i=\overline{1, \infty} \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{3}$$

которое удовлетворяет следующим условиям: а) процессы $\bar{\xi}_{0i}(t)$ независимы в совокупности и не зависят от последовательности процессов $\bar{\nu}_{0i}(t)$, $i=\overline{1, \infty}$;

б) $(\bar{\nu}_{0i}(t),\ i=1, \infty) \simeq (\nu_{0i}(t),\ i=\overline{1, \infty})$, $t \geqslant 0$,

в) $\bar{\xi}_{0i}(t) \simeq \xi_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ для $i=\overline{1, \infty}$.

В дальнейшем, не нарушая общности, будем опускать знак черты над предельными процессами в (3), считая, что процессы $\nu_{0i}(t)$ и $\xi_{0i}(t)$, где $i=\overline{1, \infty}$ в условиях $(\mathbf{A}_1)$ и $(\mathbf{A}_2)$ определены на одном вероятностном пространстве и удовлетворяют условию а).

Теорема 1. Пусть выполнены условия $(\mathbf{A}_j)$, $j=1,\ 2$ и $(\mathbf{A}_3)$: существует последовательность положительных чисел f_i, $i \in H$, такая, что:

$$1)\ \lim_{N\to 0}\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \mathbf{P}\left\{\sum_{i>N} f_i \nu_{\varepsilon i}(t) > c\right\}=0,\quad c, t>0,$$

$$2)\ \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \max_{i\in H} \frac{V_\varepsilon}{f_i u_\varepsilon} \left|\mathbf{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i)\right| \leq L_1(\delta),\text{*)}$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \max_{i\in H} \frac{V_\varepsilon}{f_i u_\varepsilon^2} \mathbf{D}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i) \leq L_2(\delta),$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \max_{i\in H} \frac{V_\varepsilon}{f_i} \mathbf{P}\{|\gamma_\varepsilon(0, i)| > \delta u_\varepsilon\} \leq L_3(\delta).$$

для $\delta > 0$, $L_j(\delta)$, $j=\overline{1, 3}$ — конечные константы.

Тогда 1) $\xi_\varepsilon(t) \Rightarrow \xi_0(t)$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$, где предельный процесс $\xi_0(t)$ определяется следующим образом:

$$\xi_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t)), \tag{4}$$

процессы $\xi_{0i}(t)$, $i \in H$ независимы в совокупности и не зависят от последовательности процессов $\nu_{0i}(t)$, $i \in H$; ряд (4) сходится по вероятности;

---

*) Для случайной величины ξ $\xi^{(\delta)}=\{\xi$, если $|\xi| \leqslant \delta$, 0 если $|\xi| > \delta$.

2) для каждого $T > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\sum_{i\geqslant N} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t))\right| > \delta\right\} = 0, \quad \delta > 0;$$

процесс $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$ с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода;

3) совместная характеристическая функция случайных величин $\xi_0(t_j)$, $j = \overline{1, k}$ $(t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k)$ имеет вид

$$\mathbf{M}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_0(t_j)\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_j + \ldots + \lambda_k)(\xi_0(t_j) - \xi_0(t_{j-1}))\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}[\nu_{0i}(t_j) - \nu_{0i}(t_{j-1})]\,\Psi_i(\lambda_j + \ldots + \lambda_k)\right\}, \qquad (5)$$

где $t_0 = 0$.

Ряд $\nu_{t_1,\ldots,t_k} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}[\nu_{0i}(t_j) - \nu_{0i}(t_{j-1})]\,\Psi_i(\lambda_j + \ldots + \lambda_k)$ сходится абсолютно с вероятностью 1, причем $|\exp\{\nu_{t_1,\ldots,t_k}\}| \leq 1$ с вероятностью 1, так что математическое ожидание в (5) существует;

4) если дополнительно к условиям $(\mathbf{A}_j)$, $j = \overline{1, 3}$ выполняется условие

$$(\mathbf{A}_4)\colon\ \lim_{c\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\,\mathbf{P}\{\Delta_J(\nu_\varepsilon^{(N)}(t), c, T) > \delta\} = 0, \quad \delta > 0, \quad N \geqslant 1,$$

где $\nu_\varepsilon^{(N)}(t) = (\nu_{\varepsilon i}(t),\ i = \overline{1, N})$ векторные случайные процессы, $\Delta_J(x(t), c, T) = \sup\limits_{\substack{t-c\leq t'\leq t\leq t''\leq t+c\\ 0\leq t, t', t''\leq T}} \min(|x(t') - x(t)|,\ |x(t) - x(t'')|)$ — модуль непрерывности Скорохода, то для точек T-стохастической непрерывности процесса $\xi_0(t)$

$$\mu_{\xi_\varepsilon(t),T}(\cdot) \Rightarrow \mu_{\xi_0(t)T}(\cdot) \text{ при } \varepsilon \to 0,\ T > 0^{*)}.$$

Замечание 2. В приложениях случайные процессы $\nu_{0i}(t)$, фигурирующие в условии $(\mathbf{A}_1)$, обычно являются непрерывными с вероятностью 1, и условие $(\mathbf{A}_4)$ в этом случае выполняется автоматически, поскольку для монотонных процессов из слабой сходимости к непрерывным процессам следует их компактность в равномерной топологии и, следовательно, в более слабой топологии J.

---

*) Символ $\mu_{\xi(t),T}(\cdot)$ означает меру, порожденную процессом $\xi(t)$ на μ-алгебре борелевских подмножеств пространства $D_{[0,T]}$ функций без разрывов второго рода на $[0, T]$ с метрикой Скорохода; символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость мер.

Процесс $\xi_0(t)$ — стохастически непрерывен в каждой точке $T \in \mathrm{T}^*$, где T^* — множество точек стохастической непрерывности процессов $\nu_{0i}(t)$, $i=\overline{1,\infty}$ (множество $\overline{\mathrm{T}}^*$ не более чем счетно). В том случае, когда процессы $\nu_{0i}(t)$, $i=\overline{1,\infty}$ непрерывны с вероятностью 1, процесс $\xi_0(t)$ — непрерывен стохастически на $[0, \infty)$.

Замечание 3. Если управляющая последовательность $T_1(\varepsilon)$ асимптотически эргодична, т. е. $V_\varepsilon \sim T_\varepsilon$, то из неравенства

$$\sum_{i \in H} \nu_{\varepsilon i}(t'') - \sum_{i \in H} \nu_{\varepsilon i}(t') \leq \frac{(t''-t')\,T_\varepsilon}{V_\varepsilon}$$

получаем, что для предельного процесса $\nu_{0i}(t)$ с вероятностью 1 для любых $t' \leq t''$ выполняется неравенство $\sum_{i \in H}[\nu_{0i}(t'') - \nu_{0i}(t')] \leq$ $\leq t''-t'$. Отсюда следует, в частности, что процессы $\nu_{0i}(t)$ непрерывны с вероятностью 1 и условие (A_4) выполняется.

Замечание 4. В том случае, когда управляющая последовательность $T_1(\varepsilon)$ асимптотически эргодична ($V_\varepsilon \sim T_\varepsilon$), теорема 1 обобщает соответствующие результаты, полученные в работе [9].

Заметим также, что если управляющая последовательность $T_1(\varepsilon)$ подчиняется слабому закону больших чисел, т. е. существует стационарное распределение $\bar{q} = \langle q_i, i \in H\rangle$ $\left(q_i \geqslant 0, \sum_{i \in H} q_i = 1\right)$ такое, что для любой последовательности положительных чисел $\bar{f} = \langle f_i, i \in H\rangle$, такой, что $\sum_{i \in H} f_i q_i = a_{\bar{f}} < \infty$,

$$\sum_{k=1}^{[tT_\varepsilon]} \frac{f_{\eta_\varepsilon(k-1)}}{T_\varepsilon} \xrightarrow{p} a_{\bar{f}} t \text{ при } \varepsilon \to 0,\ t \geqslant 0,$$

то в этом случае условия (A_1) и (A_4) автоматически выполняются, причем процессы $\nu_{0i}(t) = q_i t$, вырождены и в качестве согласующей последовательности $\bar{f} = \langle f_i, i \in H \rangle$, фигурирующей в условии (A_3), можно выбрать любую последовательность $\bar{f}$ такую, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i q_i < \infty. \qquad \text{(a)}$$

При этом если фазовое пространство управляющей последовательности $T_1(\varepsilon)$ счетно, то для того чтобы в условии (A_3), 2) был как можно менее ограниченным рост соответствующих характеристик суммируемых величин, необходимо в качестве f_i выбрать по возможности быстро растущие последовательности $f_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, удовлетворяющие условию (a).

Заметим также, что условие (A_3) представляется более удобным для проверки, чем аналогичное условие, выраженное в терминах характеристических функций [9].

2. Доказательство теоремы 1 основывается на использовании следующих вспомогательных утверждений.

Лемма 1. При выполнении условий (A_j), $j=1,2$ для любого конечного множества индексов $R \subseteq H$

$$\zeta_{\varepsilon,R}(t) = (\zeta_{\varepsilon i}(\nu_{\varepsilon i}(t)), \quad i \in R) \Rightarrow \zeta_{0,R}(t) =$$

$$= (\xi_{0i}(\nu_{0i}(t)), \ i \in R), \ t \geqslant 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где процессы $\xi_{0i}(t)$, $i \in R$ и $(\nu_{0i}(t), \ i \in R)$ независимы в совокупности.

Если, кроме того, выполнено условие (A_4), то

$$\lim_{c \to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \mathbf{P}\{\Delta_J(\zeta_{\varepsilon,R}(t), c, T) > \delta\} = 0, \ T > 0.$$

Доказательство леммы следует из теоремы 3.4.3 [7] (стр. 145), в которой установлены условия сходимости в топологии J многомерных суперпозиций случайных процессов без разрывов второго рода.

Введем в рассмотрение случайные процессы

$$\xi_{\varepsilon,R_N}(t) = \sum_{i \in R_N} \xi_{\varepsilon i}(\nu_{\varepsilon i}(t)),$$

где множества $R_N \subseteq H_N = \{i \in H : i \geqslant N\}$.

Лемма 2. При выполнении условий (A_j), $j=\overline{1,3}$ имеет место соотношение

$$\lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \sup_{R_N \subseteq H_N} \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\xi_{\varepsilon,R_N}(t)| > \delta\} = 0, \ T, \delta > 0.$$

Доказательство. Для случайных процессов $\xi_{\varepsilon,R_N}(t)$ имеет место представление

$$\xi_{\varepsilon,R_N}(t) \simeq \sum_{k=1}^{[tT_\varepsilon]} \frac{\gamma_\varepsilon(k-1, \eta_\varepsilon(k-1))}{u_\varepsilon} \chi(\eta_\varepsilon(k-1) \in R_N),^{*)}$$

являющееся частным случаем представления (1).

Обозначим для сокращения

$$S_{\varepsilon,R_N}(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\gamma_\varepsilon(k-1, \eta_\varepsilon(k-1))}{u_\varepsilon} \chi(\eta_\varepsilon(k-1) \in R_N),$$

$$S_{\varepsilon,R_N}(\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}, r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\gamma_\varepsilon(k-1, i_{k-1})}{u_\varepsilon} \chi(i_{k-1} \in R_N),$$

*) Через $\chi(A)$ обозначен индикатор события A.

для $r=\overline{0,[T T_\varepsilon]}$, $\bar{\mathrm{i}}_r=(i_0, \ldots, i_{r-1})$ — цепочка состояний из H длины r.

Пусть $\eta_\varepsilon^{[k]}=(\eta_\varepsilon(0), \ldots, \eta_\varepsilon(k-1))$ и $\nu(r, i, \bar{\mathrm{i}}_r)=\sum_{k=0}^{r-1} \delta(i, i_k)$ — число состояний $i_k=i$ в цепочке $\bar{\mathrm{i}}_r$.

Для фиксированной цепочки состояний $\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}$, используя соответствующий вариант неравенства Колмогорова, имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant k \leqslant [T T_\varepsilon]}|S_{\varepsilon, R_N}(\bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]}, k)|>\delta\} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{[T T_\varepsilon]}\left[\mathbf{P}\{|\gamma_\varepsilon(0, i_{k-1})|>\delta u_\varepsilon\}+\frac{1}{\delta^2 u_\varepsilon^2} \mathbf{D} \gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i_{k-1})\right] \chi(i_{k-1} \in R_N)+ \\
&\qquad+\left[\sum_{k=1}^{[T T_\varepsilon]} \frac{|\mathbf{M} \gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i_{k-1})|}{\delta u_\varepsilon} \chi(i_{k-1} \in R_N)\right]^2= \\
&=\sum_{i \in R_N} \nu([T T_\varepsilon], i, \bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]})\left[\mathbf{P}\{|\gamma_\varepsilon(0, i)|>\delta u_\varepsilon\}+\frac{\mathbf{D} \gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i)}{\delta^2 u_\varepsilon^2}\right]+ \\
&\qquad+\left[\sum_{i \in R_N} \nu([T T_\varepsilon], \bar{i}, \mathrm{i}_{[T T_\varepsilon]}) \frac{|\mathbf{M} \gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0, i)|}{\delta u_\varepsilon}\right]^2 .
\end{aligned}
$$

Пусть $A_{r, N, c}=\left\{\bar{\mathrm{i}}_r: \sum_{i \geqslant N} f_i \nu(r, i, \bar{\mathrm{i}}_r) \leqslant c\right\}$. С учетом условия ($\mathbf{A}_8$) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sup_{R_N \subseteq H_N} \mathbf{P}\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T}|\xi_{\varepsilon, R_N}(t)|>\delta\}= \\
&=\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sup_{R_N \subseteq H_N} \mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant k \leqslant [T T_\varepsilon]}|S_{\varepsilon, R_N}(k)|>\delta\}= \\
&=\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sup_{R_N \subseteq H_N} \sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]}} \mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant k \leqslant [T T_\varepsilon]}|S_{\varepsilon, R_N}(\bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]}, k)|>\delta\} \mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[T T_\varepsilon]}= \\
&=\bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]}\} \leqslant \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\left\{\sum_{i \geqslant N} \frac{\nu_\varepsilon([T T_\varepsilon], i)}{V_\varepsilon} f_i>c\right\}+ \\
&+\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]} \in A_{[T T_\varepsilon], N, c}}\left\{\sum_{i \geqslant N} f_i \frac{1}{V_\varepsilon} \nu([T T_\varepsilon], i, \bar{\mathrm{i}}_{[T T_\varepsilon]})\left[\frac{V_\varepsilon}{f_i} \times\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$\times \mathbf{P}\{|\gamma_\varepsilon(0,i)|>\delta u_\varepsilon\}+\frac{1}{f_i}V_\varepsilon\frac{\mathbf{D}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,i)}{\delta^2u_\varepsilon^2}\Big]\Big\}\mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[TT_\varepsilon]}=\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\}+$$

$$+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\in A_{[TT_\varepsilon],N,c}}\Big[\sum_{i\geqslant N}f_i\frac{\nu([TT_\varepsilon],i,\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]})}{\delta V_\varepsilon}\cdot\frac{V_\varepsilon}{f_i}\times$$

$$\times\frac{|\mathbf{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,i)|}{u_\varepsilon}\Big]^2\mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[TT_\varepsilon]}=\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i\geqslant N}\frac{\nu_\varepsilon([TT_\varepsilon],i)}{V_\varepsilon}f_i>c\Big\}+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\max_{i\geqslant N}\frac{V_\varepsilon}{f_i}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{|\gamma_\varepsilon(0,i)|>\delta u_\varepsilon\}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\in A_{[TT_\varepsilon],N,c}}\Big[\sum_{i\geqslant N}f_i\times$$

$$\times\frac{1}{V_\varepsilon}\nu([TT_\varepsilon],i,\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]})\Big]\mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[TT_\varepsilon]}=\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\}+$$

$$+\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\max_{i\geqslant N}\Big[\frac{V_\varepsilon}{f_i}\cdot\frac{\mathbf{D}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,i)}{\delta^2u_\varepsilon^2}\Big]\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\in A_{[TT_\varepsilon],N,c}}\Big[\sum_{i\geqslant N}f_i\times$$

$$\times\frac{1}{V_\varepsilon}\nu([TT_\varepsilon],i,\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]})\Big]\mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[TT_\varepsilon]}=\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\}+$$

$$+\Big[\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\max_{i\in N}\frac{V_\varepsilon}{f_i}\frac{|\mathbf{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,i)|}{u_\varepsilon}\Big]^2\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sum_{\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\in A_{[TT_\varepsilon],N,c}}\Big[\sum_{i\geqslant N}f_i\times$$

$$\times\frac{1}{V_\varepsilon}\nu[TT_\varepsilon],i,\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]})\Big]^2\mathbf{P}\{\eta_2^{[TT_\varepsilon]}=\bar{\mathrm{i}}_{[TT_\varepsilon]}\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i\geqslant N}\frac{\nu_\varepsilon([TT_\varepsilon],i)}{V_\varepsilon}f_i>c\Big\}+\Big\{\Big[L_3(\delta)+\frac{1}{\delta^2}L_2(\delta)\Big]c+$$

$$+\frac{1}{\delta^2}L_1(\delta)^2c^2\Big\}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\mathbf{P}\{\eta_\varepsilon^{[TT_\varepsilon]}\in A_{[TT_\varepsilon],N,c}\}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i\geqslant N}\frac{\nu_\varepsilon([TT_\varepsilon],i)}{V_\varepsilon}f_i>c\Big\}+$$

$$+\Big[L_3(\delta)+\frac{1}{\delta^2}L_2(\delta)\Big]c+\frac{1}{\delta^2}L_1(\delta)^2c^2. \qquad (6)$$

Для произвольного $\sigma > 0$ можно выбрать $c > 0$ так, чтобы $\left[L_3(\delta) + \frac{1}{\delta^2} L_2(\delta)\right] c + \frac{1}{\delta^2} L_1(\delta)^2 c^2 < \sigma$.

Продолжая оценку (6) и используя условие (A_3), 1), имеем

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{R_N \subseteq H_N} \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_{\varepsilon,R_N}(t)| > \delta\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\left\{\sum_{i\geqslant N} \frac{\nu_\varepsilon([TT_\varepsilon], i)}{V_\varepsilon} f_i > c\right\} + \sigma = \sigma.$$

В силу произвольности выбора σ последнее соотношение доказывает лемму 2.

Лемма 3. При выполнении условий (A_j), $j=\overline{1,3}$ ряд $\xi_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t))$ сходится по вероятности для каждого t равномерно на каждом конечном промежутке, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \left|\sum_{i\geqslant N} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t))\right| > \delta\right\} = 0, \ \delta, \ T > 0.$$

Следствие 1. Поскольку процессы $\xi^+_{0,N}(t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t))$, по определению, не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа, то в силу леммы 3 и процесс $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$ не имеет разрывов второго рода.

Доказательство леммы 3. Достаточно показать, очевидно, что последовательность процессов $\xi^+_{0,N}(t)$, $t \in [0, T]$, $N \geqslant 1$, рассматриваемая как последовательность случайных величин со значениями в пространстве $D_{[0,T]}$ с равномерной метрикой, фундаментальна по вероятности, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \max_{m\geqslant 1} \mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^+_{0,N+m}(t) - \xi^+_{0,N}(t)| > \delta\} = 0. \qquad (7)$$

Очевидно, для этого достаточно проверить, что (7) выполняется для $t \in \mathbf{T}^*$ (см. замечание 2) и δ, являющихся точками непрерывности функций распределения случайной величины $\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^+_{0,N+m}(t) - \xi^+_{0,N}(t)|$ для всех N, $m \geqslant 1$. Поскольку для $t \in \mathbf{T}^*$ функционал $m(\bar{x}(\cdot)) = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \sum_{i\in R} |x_i(t)|$ (здесь $\bar{x}(t) = (x_i(t), \ i \in R)$, R—конечное множество) является непрерывным почти всюду в метрике Скорохода на $D_{[0,T]}$, то, используя лемму 1 для множеств $R_N^{(m)} = \{N+1, \ldots, N+m\}$, $m \geqslant 1$, имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^+_{0,N+m}(t) - \xi^+_{0,N}(t)| > \delta\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi_{\varepsilon,R_N^{(m)}}(t)| > \delta\right\}, \qquad (8)$$

где $\xi_{\varepsilon, R_N^{(m)}}(t)$ процессы, определенные в лемме 2 для множества $R_N^{(m)} = \{N+1, \ldots, N+m\}$.

Для доказательства (7) теперь достаточно воспользоваться леммой 2.

Лемма 4. При выполнении условий (A_1) и (A_3), 1) ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \nu_{0i}(t)$ сходится с вероятностью 1 для $t \geqslant 0$.

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \nu_{0i}(t)$ состоит из неотрицательных случайных величин, то достаточно доказать, что он сходится по вероятности, для чего достаточно показать, что

$$p_\delta = \lim_{N\to\infty} \max_{m\geqslant 0} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=N}^{N+m} f_i \nu_{0i}(t) > \delta \right\} = 0, \tag{9}$$

проверив, что (9) выполняется для всех δ, являющихся точкой непрерывности функции распределения случайной величины $\sum_{i=N}^{N+m} f_i \nu_{0i}(t)$, $N, m \geqslant 1$. Используя условия (A_1) и (A_3), 1), имеем

$$p_\delta = \lim_{N\to\infty} \max_{m\geqslant 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=N}^{N+m} f_i \nu_{\varepsilon i}(t) > \delta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=N}^{\infty} f_i \nu_{\varepsilon i}(t) > \delta \right\} = 0.$$

Лемма 5. При выполнении условий (A_2) и (A_3), 2) для кумулянт $\Psi_j(\lambda)$ предельных процессов $\xi_{0j}(t)$, фигурирующих в условии (A_2), имеет место оценка

$$\max_{j\in H} \frac{1}{f_j} |\Psi_j(\lambda)| \leqslant L_3(\delta) \left[L_\lambda + \frac{\lambda}{\delta} \right] + \lambda L_1(\delta) + L_2(\delta) [L_\lambda + \lambda\delta],$$

где $L_\lambda = \sup_{-\infty<x<\infty} \left| \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \right|$ и $L_j(\delta)$, $j = \overline{1, 3}$ — константы в условии (A_3), 2), δ — точка непрерывности функций $\psi_j(\pm x)$, $j = \overline{1, \infty}$.

Доказательство. В силу определения $\Psi_j(\lambda)$ имеем

$$\max_{j\in H} \frac{1}{f_j} |\Psi_j(\lambda)| \leqslant \lambda \max_{j\in H} \frac{\alpha_j}{f_i} +$$

$$+ \max_{j\in H} \frac{1}{f_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+x^2} \right| \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi_j(x).$$

Используя центральный критерий сходимости [10] и условие (A_3), 2), получаем следующие оценки:

$$\max_{j\in H}\frac{1}{f_j}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|e^{i\lambda x}-1-\frac{i\lambda x}{1+x^2}\right|\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi_j(x)\leq$$

$$\leq\max_{j\in H}\frac{L_\lambda}{f_j}\int\limits_{|x|>\delta}\frac{1+x^2}{x^2}d\Psi_j(x)+\max_{j\in H}\frac{L_\lambda}{f_j}[\psi_j(\delta)-\psi_j(-\delta)]=$$

$$=L_\lambda\max_{j\in H}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{V_\varepsilon}{f_j}\mathrm{P}\{|\gamma_\varepsilon(0,j)|>\delta u_\varepsilon\}+L_\lambda\max_{j\in H}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{V_\varepsilon}{f_j}\times$$

$$\times\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{x^2}{1+x^2}d\mathrm{P}\left\{\frac{\gamma_\varepsilon(0,j)}{u_\varepsilon}-a_{\varepsilon j}(\delta)<x\right\}\leq L_\lambda L_3(\delta)+$$

$$+L_\lambda\max_{j\in H}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{V_\varepsilon}{f_j}\int\limits_{-\delta+a_{\varepsilon j}(\delta)}^{\delta+a_{\varepsilon j}(\delta)}(x-a_{\varepsilon j}(\delta))^2d\mathrm{P}\left\{\frac{\gamma_\varepsilon(0,j)}{u_\varepsilon}<x\right\}\leq$$

$$\leq L_\lambda L_3(\delta)+L_\lambda\max_{j\in H}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{V_\varepsilon}{f_j}\int\limits_{-\delta}^{\delta}[x-a_{\varepsilon j}(\delta)]^2d\mathrm{P}\left\{\frac{\gamma_\varepsilon(0,j)}{u_\varepsilon}<x\right\}\leq$$

$$\leq L_\lambda L_3(\delta)+L_\lambda\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\max_{j\in H}\frac{V_\varepsilon}{f_j}\frac{D\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,j)}{u_\varepsilon^2}\leq L_\lambda(L_3(\delta)+L_2(\delta)),\qquad(10)$$

где $a_{\varepsilon j}(\delta)=u_\varepsilon^{-1}\mathrm{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,j)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Далее,

$$\left|\frac{\alpha_j}{f_j}\right|=\frac{1}{f_j}\left|\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}V_\varepsilon\frac{\mathrm{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,j)}{u_\varepsilon}+\int\limits_{|x|>\delta}\frac{1}{x}d\psi_j(x)-\int\limits_{|x|<\delta}xd\psi_j(x)\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{f_j}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}V_\varepsilon\left\{\frac{\mathrm{M}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,j)}{u_\varepsilon}+\frac{1}{\delta}\mathrm{P}\{|\gamma_\varepsilon(0,j)|>\delta u_\varepsilon\}+\right.$$

$$\left.+\delta\frac{\mathrm{D}\gamma_\varepsilon^{(\delta)}(0,j)}{u_\varepsilon^2}\right\}\leq L_1(\delta)+\frac{1}{\delta}L_3(\delta)+\delta L_2(\delta).\qquad(11)$$

Из соотношений (10) и (11) получаем утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1. Случайные процессы $\xi_\varepsilon(t)$ можно представить в виде

$$\xi_\varepsilon(t)=\xi_{\varepsilon,N}^{+}(t)+\xi_{\varepsilon,N}^{-}(t),\quad t\geqslant 0,$$

где $\xi_{\varepsilon,N}^{+}(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}\xi_{\varepsilon i}(\nu_{\varepsilon i}(t))$, $\xi_{\varepsilon,N}^{-}(t)=\sum\limits_{i>N}\xi_{\varepsilon i}(\nu_{\varepsilon i}(t))$.

В силу леммы 1 при выполнении условий $(\mathbf{A}_j)$, $j=1, 2$

$$\xi^{+}_{\varepsilon,N}(t) \Rightarrow \xi^{+}_{0,N}(t) = \sum_{i=1}^{N} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t)) \quad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Если выполняется условие $(\mathbf{A}_4)$, то

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\{\Delta_J(\xi^{+}_{\varepsilon,N}(t), c, T) > \delta\} = 0, \delta, T > 0. \tag{13}$$

Из леммы 2 следует соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^{-}_{0,N}(t)| > \delta\right\} = 0, \quad \delta, T > 0. \tag{14}$$

Наконец, из леммы 3 получаем

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^{+}_{0,N}(t) - \xi_0(t)| > \delta\right\} = 0, \quad \delta, \ T > 0, \tag{15}$$

где $\xi_0(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_{0i}(\nu_{0i}(t))$.

Из (13), (12) и (15) следует (см. например, лемму 2.2.2 [7], стр. 53), что процессы $\xi_\varepsilon(t) \Rightarrow \xi_0(t)$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Второе следует из леммы 3.

Предположим теперь, что в дополнение к условиям $(\mathbf{A}_j)$, $j=\overline{1,3}$ выполнено условие $(\mathbf{A}_4)$. Поскольку

$$\Delta_J(\xi_\varepsilon(t), c, T) \leqq \Delta_J(\xi^{+}_{\varepsilon,N}(t), c, T) + \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^{-}_{\varepsilon,N}(t)|, \tag{16}$$

используя (13) и (15), получаем

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\{\Delta_J(\xi_\varepsilon(t), c, T) > \delta\} \leqq$$

$$\leqq \lim_{N\to\infty} \lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \left[\mathbf{P}\left\{\Delta_J(\xi^{+}_{\varepsilon,N}(t), c, T) > \frac{\delta}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^{-}_{\varepsilon,\nu}(t)| > \frac{\delta}{2}\right\}\right] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\xi^{-}_{\varepsilon,N}(t)| > \frac{\delta}{2}\right\} = 0. \tag{17}$$

Соотношения (16) и (17) доказывают четвертое утверждение теоремы. Остается доказать третье утверждение теоремы. В силу (15) имеем

$$\mathbf{M} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi_0(t_j)\right\} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{M} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \xi^{+}_{0,N}(t_j)\right\}.$$

Используя независимость процессов $\xi_{0i}(t)$, $i=\overline{1,N}$ и $(\nu_{0i}(t)$, $i=\overline{1,N})$, $t \geqslant 0$, совместную характеристическую функцию величин $\xi^{+}_{0,N}(t_j)=\sum_{i=1}^{N}\xi_{0i}(\nu_{0i}(t_j))$ можно представить в виде

$$\mathbf{M}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi^{+}_{0,N}(t_j)\right\}=$$

$$=\mathbf{M}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j+\ldots+\lambda_k)\left[\xi_{0i}(\nu_{0i}(t_j))-\xi_{0i}(\nu_{0i}(t_{j-1}))\right]\right\}=$$

$$=\mathbf{M}\exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\Psi_i(\lambda_j+\ldots+\lambda_k)\left[\nu_{0i}(t_j)-\nu_{0i}(t_{j-1})\right]\right\}. \qquad (18)$$

В силу лемм 4 и 5 ряд

$$\nu_{t_1,\ldots,t_k}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\Psi_i(\lambda_j+\ldots+\lambda_k)\left[\nu_{0i}(t_j)-\nu_{0i}(t_{j-1})\right]$$

сходится абсолютно с вероятностью 1. Следовательно, и случайная величина $\exp\{\nu^{(N)}_{t_1,\ldots,t_k}\}\to\exp\{\nu_{t_1,\ldots,t_k}\}$ с вероятностью 1 при $N\to\infty$, $\nu^{(N)}_{t_1,\ldots,t_k}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\Psi_i(\lambda_j+\ldots+\lambda_k)\left[\nu_{0i}(t_j)-\nu_{0i}(t_{j-1})\right]$ — частичные суммы ряда $\nu_{t_1,\ldots,t_k}$.

Кроме того, по определению, $|\exp\{\nu^{(N)}_{t_1,\ldots,t_k}\}|\leqslant 1$, значит, и $|\exp\{\nu_{t_1,\ldots,t_k}\}|\leqslant 1$ с вероятностью 1. Поэтому в силу теоремы Лебега имеем

$$\mathbf{M}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\xi_0(t_j)\right\}=\lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\exp\{\nu^{(N)}_{t_1,\ldots,t_k}\}=\mathbf{M}\exp\{\nu_{t_1,\ldots,t_k}\}.$$

Теорема доказана.

4. Применим полученные результаты к случаю, когда управляющая последовательность $\mathbf{T}_1(\varepsilon)$ представляет собой счетную однородную цепь Маркова. Будем предполагать, что цепь Маркова $\mathbf{T}_1(\varepsilon)$ асимптотически возвратна в том смысле, что ее переходные вероятности $p_{ij}(\varepsilon)$ удовлетворяют условию

$(\mathbf{B}_1)$: $p_{ij}(\varepsilon)\to p_{ij}(0)$ при $\varepsilon\to 0$, $i,j\in H$, где $P_0=\|p^{(0)}_{ij}\|_{i,j\in H}$ — матрица переходных вероятностей некоторой возвратной цепи Маркова $\mathbf{T}_1(0)=\{\eta_0(k),\ k=0,1,\ldots\}$.

Не нарушая общности, можем считать, что для всех $\varepsilon>0$ множество состояний цепи Маркова $\mathbf{T}_1(\varepsilon)$ образует один сообщающийся класс состояний.

Через $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{P}_i(\cdot)$ будем обозначать соответственно математическое ожидание и вероятность событий для цепи Маркова $\mathbf{T}_1(\varepsilon)$ с начальным распределением, сосредоточенным в состоянии $i \in H$.

Через $\Delta_i(\varepsilon) = \min(n \geqslant 1 : \eta_\varepsilon(n) = i)$ обозначим момент первого достижения цепью Маркова $\mathbf{T}_1(\varepsilon)$ состояния i.

Пусть $Q_i(\varepsilon) = \mathbf{P}\{\Delta_i(\varepsilon) = +\infty / \eta_\varepsilon(0) = i\}$ и $\Delta_i(\varepsilon, k)$, $k \geqslant 1$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, для которых

$$\mathbf{P}\{\Delta_i(\varepsilon, k) < u\} = \mathbf{P}_i\{\Delta_i(\varepsilon) < u / \Delta_i(\varepsilon) < \infty\}.$$

Наконец, пусть $\varphi_\varepsilon(i, j) = \sum_{k=1}^{\Delta_i(\varepsilon)} \delta(j, \eta_\varepsilon(k-1))$ — число посещений состояния j цепью Маркова за время $\Delta_i(\varepsilon)$. Как показано в работе [7], при выполнении условия $(\mathbf{B}_1)$ $\mathbf{M}_i\varphi_\varepsilon^l(i, j) < \infty$ для всех $i, j \in H$, $l \geqslant 1$ и $\mathbf{M}_i\varphi_\varepsilon^l(i, j) \to \mathbf{M}_i\varphi_0^l(i, j)$, $i, j \in H$, $l \geqslant 1$.

Условия, достаточные для выполнения (A_1) и (A_3), 1), дает следующая лемма, являющаяся вариантом теоремы 2.4.7 [7].

Лемма 6. Пусть выполняются условия $(\mathbf{B}_1)$ и

$(\mathbf{B}_2)$: 1) $Q_i(\varepsilon) V_\varepsilon \to \rho_i \in [0, \infty)$ при $\varepsilon \to 0$,

2) $\sum_{k=1}^{[tV_\varepsilon]} \frac{\Delta_i(\varepsilon, k)}{T_\varepsilon} \Rightarrow \varkappa_i(t)$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $\varkappa_i(t)$, $t \geqslant 0$ — строго монотонно возрастающий однородный процесс с независимыми приращениями.

Тогда:

1) $\left(\frac{\nu_\varepsilon([tT_\varepsilon], j)}{V_\varepsilon}, j \in H\right) \Rightarrow (c_{ij}\nu_{0i}(t), j \in H)$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$, где $c_{ij} = \mathbf{M}_i\varphi_0(i, j)$; $\nu_{0i}(t) = \min(L(\rho_i), \nu_i(t))$, $\nu_i(t) = \inf(s : \varkappa_i(s) \geqslant t)$, $t \geqslant 0$: $L(\rho_i)$ — показательно распределенные величины с параметром ρ_i; $L(\rho_i)$ и процесс $\nu_i(t)$, $t \geqslant 0$ независимы; процесс $c_{ij}\nu_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ непрерывен с вероятностью 1;

2) если, кроме того, выполняется условие

$$(\mathbf{B}_3): \lim_{N \to \infty} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \sum_{j \geqslant N} \mathbf{M}_i\varphi_\varepsilon(i, j) f_j = 0,$$

где $\bar{f} = \langle f_j, j \in H \rangle$ — последовательность положительных чисел, то

$$\sum_{k=1}^{[tT_\varepsilon]} \frac{f_{\eta_\varepsilon(k-1)}}{V_\varepsilon} = \sum_{j \in H} \frac{\nu_\varepsilon([tT_\varepsilon], j)}{V_\varepsilon} f_j \Rightarrow a_{i,\bar{f}}\nu_{0i}(t), \quad t \geqslant 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

причем $a_{i,\bar{f}} = \sum_{j \in H} c_{ij} f_j < \infty$;

3) условия $(\mathbf{B}_j)$, $j=2, 3$ если выполняются, то одновременно для всех $i \in H$; при этом совместные конечномерные распределения процессов $c_{ij}\nu_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$, $j \in H$ и конечномерные распределения процессов $a_{i,\bar{f}}\nu_{0i}(t)$, $t \geqslant 0$ не зависят от выбора состояния $i \in H$.

Следствие 2. При выполнении условий $(\mathbf{B}_j)$, $j=\overline{1, 3}$ имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, \mathbf{P}\left\{\sum_{j\geqslant N} f_j \frac{\nu_\varepsilon([tT_\varepsilon], j)}{V_\varepsilon} > c\right\} = 0, \quad c, t > 0,$$

т. е. выполняется условие $(\mathbf{A}_3)$, 1).

Суммируя условия, сформулированные в лемме 6, и условия теоремы 1, получаем следующие условия сходимости в топологии J процессов ступенчатых сумм случайных величин, определенных на однородной цепи Маркова.

Теорема 2. Если выполняются условия $(\mathbf{B}_j)$, $j=\overline{1, 3}$, $(\mathbf{A}_2)$ и $(\mathbf{A}_3)$, 2) (с последовательностью f_j, $j \geqslant 1$, заданной в условии $(\mathbf{B}_3)$), то меры $\mu_{\xi_\varepsilon(t),T}(\cdot) \Rightarrow \mu_{\xi_0(t),T}(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$, $T > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kesten H.* Occupation times for Markov and semi-Markov chains. — «Trans. Amer. Math., Soc.», 1962, **103**, p. 82—112.
2. *Kembleton S. R.* A stable limit theorems for Markov chain. — «Ann. Math. Stat.,» 1969, 40, p. 1467—1473.
3. *Freedman D.* Some invariance principles for functionals of a Markov chain.— «Ann. Math. Stat»., 1967, 38, p. 1—7.
4. *Волконский В. А.* Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний. — «Теория вероятностей и ее применение», 1957, т. 2.
5. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций Автореферат докт. дис. КГУ, 1972.
6. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1972, вып. 8.
7. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Изд-во при КГУ, 1974.
8. *Анисимов В. В.* Некоторые предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний в схеме серий. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1972, вып. 6.
9. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для случайных функций и их применения к процессам с дискретной компонентой. Автореферат докт. дис., КГУ, 1975.
10. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.

D. S. Silvestrov, G. T. Tursunov

GENERAL LIMIT THEOREMS FOR SUMS OF CONTROLLED RANDOM VARIABLES. I

Conditions of convergence in a topology J of the processes of stepped sums of controlled random variables and of the processes of stepped sums of random variables defiinled on asymptotically recurrent Markov chains are obtained.

Поступила в редколлегию 21.X 1975.