Ю. П. ФИЛОНОВ, асп. (*Киевский университет*)

ВОЗВРАТНОСТЬ КОНЕЧНОМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Пусть $\xi_n \in I^d$, $n \geqslant 0$ — марковская последовательность, I^d — множество всех точек d-мерного пространства с целыми координатами, $P = P(x, y)$ — переходная матрица цепи ξ_n.

Решение многих вопросов, связанных с марковскими цепями (и простейших из них — возвратности и положительности), зависит от поведения элементов матрицы P^n при $n \to \infty$. Поэтому желательно иметь достаточно простые характеристики поведения, выраженные с помощью вероятностей $P(x, y)$. Нахождению таких характеристик и посвящена настоящая статья.

В работе [1] эта задача решена для случайных блужданий, т. е. когда $P(x, y) = P(0, y - x)$. Результаты, близкие к полученным в предлагаемой статье, имеются, например, в работах [2, 3].

1. **Радиальные условия возвратности, невозвратности и положительности.** Докажем предварительно две леммы.

Лемма 1. Если для некоторой функции f из I^d в R^1 при $|x| \to \infty$ выполняются условия $f \to \infty$ и $Pf \leqslant f$, то цепь возвратна.

Доказательство. Пусть ξ_n невозвратна и ξ_n' — цепь, которую получим из цепи ξ_n, если состояния ограниченного множества C сделаем поглощающими (C таково, что $Pf \leqslant f$ на $I^d \setminus C$). Нетрудно заметить, что $f(\xi_n')$ — почти наверное сходящийся супермартингал. Но из того, что $f \to \infty$ при $|x| \to \infty$, и невозвратности ξ_n следует, что $f(\xi_n')$ с положительной вероятностью стремится к бесконечности для некоторого начального состояния цепи, что противоречит допущению о невозвратности.

Лемма 2. Если ограниченная снизу функция f из I^d в R^1 не имеет минимума и при $|x| \to \infty$ $Pf \leqslant f$, то цепь невозвратна.

Доказательство. Пусть цепь ξ_n возвратна и цепь ξ_n' отлична от цепи ξ_n только тем, что из состояний ограниченного множества C п. н. происходит скачок в точку x_0 (x_0 и C таковы, что $Pf \leqslant f$ на $I^d \setminus C$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x \in C$). Тогда f P'-супергармонична, и следовательно, постоянна на замкнутом классе P'-возвратных состояний, содержащем точку x_0. Вместе с тем этот класс необходимо содержит точки множества C, что противоречит допущению о возвратности.

Пусть ν_x — случайная величина с распределением $P(x, x + y)$ и $M|\nu_x|^2 < \infty$ для любого x. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Цепь положительна, возвратна или невозвратна, если для некоторого $\varepsilon > 0$ при $|x| \to \infty$ выполняются условия

$$(x, M\nu_x) < -1/2\, M|\nu_x|^2 - \varepsilon; \tag{1}$$

$$(x, M\nu_x) \leqslant -1/2\, M|\nu_x|^2; \tag{2}$$

$$(x, M\nu_x) > 1/2 M|\nu_x|^2 + \varepsilon \tag{3}$$

(для невозвратности дополнительно требуется равномерная ограниченность $M|\nu_x|^{2+\varepsilon}$ по x).

Доказательство. Возвратность следует из леммы 1, если положить $f(x)=|x|^2$ (условие $Pf\leqslant f$ эквивалентно условию $M(x+\nu_x, x+\nu_x)\leqslant(x, x)$, т. е (2)).

Для доказательства невозвратности применим лемму 2 к функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<2\\ \ln^{-1}|x|^2, & |x|\geqslant 2.\end{cases}$$

Используя формулу Тейлора для функции $\ln^{-1}z$, можно получить неравенство

$$Pf-f=\sum_y P(x, x+y)\ln^{-1}|x+y|^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|y|\leqslant|x|^{1-\delta}} P(x, x+y)\ln^{-1}|x+y|^2+P\{|\nu_x|>|x|^{1-\delta}\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{|y|\leqslant|x|^{1-\delta}} P(x, x+y)[-(2(x, y)+|y|^2)|x|^{-2}\ln^{-2}|x|^2+$$

$$+1/2(\ln^2|x|^2+2\ln|x|^2)|x|^{-4}\ln^{-4}|x|^2(2(x, y)+|y|^2)^2+$$

$$+C|x|^{-6}|2(x, y)+|y|^2|^3]+P\{|\nu_x|>|x|^{1-\delta}\}\qquad(4)$$

при $|x|\to\infty$, $0<\delta<1$, C, $\delta=\text{const}$.

Учитывая равномерную ограниченность $M|\nu_x|^{2+\varepsilon}$, очевидные неравенства

$$|(x, y)|\leqslant|x||y|;$$

$$M\{|\nu_x|^a;\ |\nu_x|>|x|^b\}\leqslant|x|^{-bc}M|\nu_x|^{a+c},$$

$$M\{|\nu_x|^{a+b};\ |\nu_x|\leq|x|^c\}\leq|x|^{bc}M|\nu_x|^a\quad(a, b, c>0)$$

и выбирая подходящим образом δ, из неравенства (4) можно получить

$$Pf-f\leq-(2(x, M\nu_x)+M|\nu_x|^2)|x|^{-2}\ln^{-2}|x|^2+$$

$$+1/2(\ln^2|x|^2+2\ln|x|^2)|x|^{-4}\ln^{-4}|x|^2\cdot 4|x|^2M|\nu_x|^2+$$

$$+C_1|x|^{-(2+\alpha)},\quad C_1,\ \alpha>0,\ C_1,\ \alpha=\text{const}$$

при $|x|\to\infty$.

Тогда из (3) следует, что при $|x|\to\infty$ $Pf\leq f$. Лемма 2 очевидным образом выполняется и, значит, цепь невозвратна.

Докажем положительность. Пусть условие (1) выполняется вне шара радиуса R, T — целое число большее R.

Введем следующие обозначения: $\tau_x(T)$ — момент первого выхода цепи ξ_n из шарового кольца $\{x:R<|x|<T\}$ при условии $\zeta_0=x$;

τ_x — момент первого достижения шара $\{x: |x| \leq R\}$ при условии $\xi_0 = x$; $m_x(T) = M\tau_x(T)$; $m_x = M\tau_x$.

Легко видеть, что: $\tau_x(T)$, $m_x(T) = 0$ при $|x| \leq R$ или $|x| \geq T$; $\tau_x(T_1) \leq \tau_x(T_2)$ при $T_1 \leq T_2$, $\tau_x = \lim\limits_{T\to\infty} \tau_x(T)$; $m_x = \lim m_x(T)$ при $T \to \infty$; $m_x(T)$ конечно для любого T, так как в любом кольце число состояний конечно и каждое состояние не замкнуто в кольце;

$$m(T) = 1 + Pm(T),\ R < |x| < T. \tag{5}$$

Если в (5) сделать замену $m_x(T) = m'_x(T) + \frac{|x|^2}{2\varepsilon}$ и применить неравенство (1), то получим $m'(T) \leq Pm'(T)$. Значит, по принципу максимума $m_x(T) - \frac{|x|^2}{2\varepsilon} = m'_x(T) \leq \max\{m'_x(T): |x| \leq R \text{ или } |x| \geq T\}$, т. е.

$$m_x \leq \frac{|x|^2}{2\varepsilon}. \tag{6}$$

Определим полумарковский процесс, связанный с цепью ξ_n: $\xi(0) = \xi_0 = 0$, $\xi(t) = \xi_\eta$, $\eta = \max\{n: n < t,\ |\xi_n| \leq R\}$. Тогда момент возвращения в 0 цепи ξ_n совпадает с моментом возвращения в 0 процесса $\xi(t)$. Так как фазовое пространство вложенной цепи Маркова для процесса $\xi(t)$ состоит из конечного числа сообщающихся состояний, то для завершения доказательства нужно показать, что среднее время пребывания процесса $\xi(t)$ в любом состоянии конечно.

Пусть τ — время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии x. Тогда из неравенства (6) получим

$$M\tau = 1 + \sum_y P(x, x+y)\, m_{x+y} \leq 1 + \frac{M|\nu_x + x|^2}{2\varepsilon}.$$

2. Возвратность марковских цепей, достаточно близких к возвратным блужданиям. Как хорошо известно, блуждание в I^d может быть возвратным тогда и только тогда, когда $d = 1$ или 2. Наиболее общие условия возвратности, выраженные через моменты скачков, имеют вид $M\nu_x = 0$, если $d = 1$; $M\nu_x = 0$, $M|\nu_x|^2 < \infty$, если $d = 2$.

Теорема 2. Если $d = 1$, матрица P дважды стохастична (т. е. $\sum\limits_x P(x, y) = 1$), $M\nu_x = 0$, $M\{|\nu_x|;\ |\nu_x| > |x|\} \to 0$ при $|x| \to \infty$, то цепь возвратна.

Заметим, что для одномерных возвратных блужданий с конечным средним скачка условия теоремы 2 выполняются.

Доказательство. Пусть цепь невозвратна, матрица $\|P_n(x, y)\| = P^n$, $P'(y, x) = P(x, y)$. Тогда из двойной стохастичности следует, что $P'_n(y, x) = P_n(x, y)$ и из известного неравенства $G(x, y) = \sum_n P_n(x, y) \leq \sum_n P_n(y, y) = G(y, y)$ получаем

$$G(0, x) = G'(x, 0) \leq G'(0, 0) = G(0, 0).$$

С другой стороны, из равенства $M\nu_x = 0$ следует

$$0 \leq M(|\xi_{n+1}| - |\xi_n|) = \sum_{l,k} (|k + l| - |k|) P(\nu_k = l) P(\xi_n = k) =$$

$$= 2\left(\sum_{k \geq 0, l < -k} + \sum_{k < 0, l > -k}\right) |l + k| P(\nu_k = l) P(\xi_n = k) \leq$$

$$\leq 2 \sum_k M\{|\nu_k| : |\nu_k| > |k|\} P(\xi_n = k) \to 0$$

при $n \to \infty$ (так как цепь предположили невозвратной). Поэтому $P\left\{\frac{|\xi_n|}{n} \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{M|\xi_n|}{n\varepsilon} \to 1$ при $n \to \infty$.

Осталось использовать метод Чжун Кай-лая и Орнштейна, предложенный ими для случайных блужданий [1]:

$$G(0, 0) \geq \frac{1}{2n\varepsilon + 1} \sum_{l=0}^{n} \sum_{|x| \leq n\varepsilon} P_l(0, x) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\varepsilon + n^{-1}} \frac{\sum_{l=0}^{n} P\left(\frac{|\xi_l|}{l} \leq \varepsilon\right)}{n} \to 1/2\varepsilon$$

при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Значит, $G(0, 0) = \infty$ и цепь возвратна, что противоречит исходному допущению.

3. Пример. Рассмотрим поведение цепи вида

$$(x, M\nu_x) = cM|\nu_x|^2, \quad |c| < 1/2. \tag{7}$$

Частные случаи в такой схеме изучались в работе [2], где рассматривалась простейшая цепь вида (7) при $d = 1$ и было показано, что она возвратна, и в работе [3], где доказана возвратность цепей с условиями $(x, M\nu_n) \leq cM|\nu_x|^2$, $c < 1/2$, $M|\nu_x|^{2+\varepsilon} < \infty$.

Примеры возвратных цепей (7) при $d > 1$ несложно построить, используя одномерные цепи. Однако интервал «неопределенности» $(-1/2, 1/2)$ в теореме 1 при $d > 1$ не может быть уменьшен даже для класса простых цепей (т. е. таких цепей, у которых $P(x, y) \neq 0$ только тогда, когда $y - x = l_i$, где $l_1, l_2, \ldots, l_\alpha$ — базис в I^α).

Докажем это утверждение.

Пусть $-1/2 < c \leqslant 0$. Определим переходные вероятности цепи $\xi_n \in I^2$:

$$P\{\xi_{n+1} = (x \overset{+}{\underset{(-)}{}} 1;\ y)/\xi_n = (x;\ y)\} = 1/2\,(1 \overset{+}{\underset{(-)}{}} c/x)$$

при $(x;\ y) \in I^2,\ y > x > 0$;

$$P\{\xi_{n+1} = (0;\ y-1)/\xi_n = (0;\ y)\} = -c/y,$$

$$P\{\xi_{n+1} = (\pm 1;\ y)/\xi_n = (0;\ y)\} = 1/2\,(1 + c/y),$$

$$P\{\xi_{n+1} = (y \overset{+}{\underset{(-)}{}} 1;\ y)/\xi_n = (y;\ y)\} =$$

$$= P\{\xi_{n+1} = (y;\ y \overset{+}{\underset{(-)}{}} 1)/\xi_n = (y;\ y)\} = 1/4\,(1 \overset{+}{\underset{(-)}{}} c/y)$$

при $y > 0$.

В остальных точках переходные вероятности определяем из условия симметричности переходов относительно осей координат и биссектрис координатных углов, а в начале координат — произвольно. Докажем невозвратность. Пусть y_n — вероятность достичь начала координат раньше, чем точки $(T-1;\ T)$ (или ей симметричной), при условии, что цепь выходит из точки $(0;\ n)$ (или из одной из симметричных ей точек); x_n — вероятность достичь начала координат раньше, чем точки $(T-1;\ T)$ (или ей симметричной), если цепь выходит из точки $(n-1;\ n)$ (или симметричной).

Для доказательства невозвратности достаточно показать, что $\lim\limits_{T\to\infty} y_1 < 1$. Запишем уравнения

$$x_n = p_n x_{n+1} + q_n y_n,\quad y_n = r_n x_n + u_n y_{n-1}, \tag{8}$$

где p_n — вероятность достичь точки $(n;\ n+1)$ (или ей симметричной) раньше, чем точки $(0,\ n)$ (или симметричной), выходя из точки $(n-1;\ n)$ (или симметричной); $q_n = 1 - p_n$; r_n — вероятность достичь точки $(n-1;\ n)$ (или ей симметричной) раньше, чем точки $(0;\ n-1)$ (или симметричной), выходя из точки $(0,\ n)$ (или симметричной); $u_n = 1 - r_n$.

Из системы (8) получаем

$$y_n = p'_n y_{n+1} + q'_n y_{n-1},\quad n = 1, 2, \ldots, T-1, \tag{9}$$

где

$$p'_n = r_n p_n\,(r_{n+1}\,(1 - r_n) + r_n p_n)^{-1},$$

$$q'_n = 1 - p'_n,\quad y_0 = 1,\quad y_T = (1 - r_T)\,y_{T-1}.$$

Для нахождения r_n можно составить систему

$$r_n^x = 1/2\,(1 + c/x)\,r_n^{x+1} + 1/2\,(1 - c/x)\,r_n^{x-1},$$

$$x = 1, \ldots, n-2;\ r_n = r_n^0 = (1 + c/n)\,r_n^1;\ r_n^{n-1} = 1$$

(r_n^x определяется как r_n, только начальным состоянием считается точка $(x;\ n)$). Решая ее, получаем

$$r_n = (-S_{n-2}c\,(n+c)^{-1}+1)^{-1}, \tag{10}$$

где

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \Pi_k,\ \ \Pi_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{i-c}{i+c}. \tag{11}$$

Аналогично

$$p_n = S_{n-2}S_n^{-1}. \tag{12}$$

Поэтому

$$q_n'/p_n' = r_{n+1}(1-r_n)\,r_n^{-1}p_n^{-1} =$$
$$= -S_n c\,(n+c)^{-1}(1-S_{n-1}c\,(n+1+c)^{-1})^{-1}.$$

Несложно из представления (11) найти, что

$$-S_n c\,(n+c)^{-1} = An^{-2c}+\varepsilon, \tag{13}$$

где $A=\mathrm{const}$, $\varepsilon\to 0$ при $n\to\infty$.

Поэтому

$$q_n'/p_n' = 1-(B+\varepsilon)\,n^{2c}, \tag{14}$$

где $B=\mathrm{const}$, $\varepsilon\to 0$ при $n\to\infty$.

Решая систему (9), получаем

$$y_T - y_0 = S_{T-1}'(y_1-y_0),$$
$$y_{T-1}-y_0 = S_{T-2}'(y_1-y_0), \tag{15}$$

где

$$S_n' = \sum_{k=0}^{n} \Pi_k',\ \ \Pi_k' = \prod_{i=1}^{k} \frac{q_i'}{p_i'}. \tag{16}$$

Используя связь y_T и y_{T-1} и равенство $y_0=1$, из (13) находим

$$-S_{T-2}'S_{T-2}c\,(T+c)^{-1}-S_{T-1}'(-S_{T-2}c\,(T+c)^{-1}+1) = (y_1-1)^{-1}.$$

Так как $S_{T-1}' = S_{T-2}' + \Pi_{T-1}'$, то

$$(y_1-1)^{-1} = S_{T-2}' + \Pi_{T-1}'S_{T-2}(-c)\,(T+c)^{-1}+\Pi_{T-1}'. \tag{17}$$

Из (14) и (16) следует, что Π_T' при $T\to\infty$ убывает быстрее, чем T^{-k} при любом фиксированном $k>0$. Теперь, применяя равенство (13), можно убедиться, что правая часть равенства (17) ограничена при $T\to\infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{T\to\infty} y_1 < 1$ и, следовательно, цепь невозвратна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М., «Мир», 1969.
2. *Harris T. E.* First passage and recurrence distributions. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1952, 73, 3.
3. *Lamperti J.* Criteria for the recurrence or transience of stochastic process.— «I. J. Math. Analysis and Applic.», 1960, 1, 3.

Yu. P. Filonov

RECURRENCE OF MULTIDIMENSIONAL MARKOV CHAINS

This paper deals with homogeneous multidimensional Markov chains in the discrete time parameter with the state space consisting of all points with integer components.

Sufficient conditions for the recurrence, transience, and positivity are obtained.

Поступила в редколлегию 6.II 1976.