И. В. ХРУЩЕВА, асп. (*Ленинградский университет*)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЗАКОНАХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрим последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых случайных величин (с. в.) с общей функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Обозначим $T_n = A_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных констант, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. В этой работе будем исследовать скорость сходимости к нулю вероятностей типа $P\{|T_n| > \varepsilon b_n\}$ и $P\{\sup_{k \geqslant n} |b_k^{-1} T_k| > \varepsilon\}$, где $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность. Всюду в дальнейшем $L(x)$, $x > 0$ — неотрицательная, неубывающая, медленно меняющаяся функция.

1. Пусть $r \geqslant 1$ и $t > 0$ — некоторые числа,

$$b_n \geqslant \begin{cases} cn^{1/t-1\,*)} & \text{при } 0 < t < 1,\ r = 1, \\ cn^{\theta} & \text{при } \theta > 0,\ r = t = 1, \\ cn^{\gamma r(1-t)/t-\varkappa} & \text{при } \varkappa > 0,\ r \leqslant t < 2r,\ t > 1,\ r \geqslant 1, \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

где γ — некоторое число, такое, что $\max[(r+1)/2r,\ 1/r,\ t/2r] < \gamma < 1$ при $r > 1$ и $\gamma = 1$ при $r = 1$.

*) Здесь и далее c (с индексами или без них) означает некоторую положительную постоянную, не всегда одну и ту же даже в пределах одной формулы.

Теорема 1. Пусть последовательности положительных констант $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют следующему условию:

$$b_n A_n / \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \geqslant c_1 n^{r/t}, \tag{1}$$

где $r \geqslant 1$, $t > 0$.

Пусть $\{b_n\}$ удовлетворяет условию (B) и для любого $\varepsilon > 0$

$$n^r L(n) P\{|X_1| > \varepsilon n^{r/t}\} \to 0. \text{*)} \tag{2}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

а) при $0 < t < r$ и $t = r = 1$

$$n^{r-1} L(n) P\{|T_n|\} > \varepsilon b_n\} \to 0; \tag{3}$$

b) при $r \leqslant t < 2r$, $t > 1$

$$n^{r-1} L(n) P\{|T_n - ET_n| > \varepsilon b_n\} \to 0. \tag{4}$$

Отметим, что из леммы 1 [1], приведенной ниже, вытекает существование $E|X_1|$ при $t > 1$.

Теорема 2. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условию (1) и выполняется условие (B). Пусть

$$E\{|X_1|^t L(|X_1|^{t/r})\} < \infty, \tag{5}$$

где $r \geqslant 1$, $t > 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

а) при $0 < t < r$ и $t = r = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|T_n| > \varepsilon b_n\} < \infty; \tag{6}$$

в) при $r \leqslant t < 2r$, $t > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|T_n - ET_n| > \varepsilon b_n\} < \infty. \tag{7}$$

Теорема 3. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условию

$$b_n A_n / \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \leqslant c_1 n^{r/t} \tag{8}$$

для $r \geqslant 1$, $t > 0$ и пусть выполняется условие

$$n^{r-1} L(n) P\{|T_n - \alpha| > \varepsilon b_n\} \to 0 \tag{9}$$

для любого $\varepsilon > 0$ и какого-либо вещественного числа α. Тогда имеет место (2).

---

*) Предельный переход, если не оговорено особо, совершается при $n \to \infty$.

Теорема 4. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют условию (8) и в случае $1 \leqslant r < 2$ одному из следующих двух условий:

(I) последовательность $\{b_n A_n\}$ — невозрастающая;

(II) последовательность $\{b_n A_n\}$ — неубывающая, но

$$b_{2n} A_{2n} / b_n A_n \leqslant c_3 < \infty. \tag{10}$$

Пусть α — произвольное вещественное число.

Тогда:

a) если $t > 0$, $r \geqslant 1$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|T_n - \alpha| > \varepsilon b_n\} < \infty, \tag{11}$$

то имеет место (5);

b) если $1 \leqslant r \leqslant t < 2r$, $a_k \leqslant c_4 < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, и $n^{-r/t} A_n \not\to 0$, то из условия (II) следует, что $EX_1 = \alpha$;

c) если $1 \leqslant r \leqslant t < 2r$ и $a_k \geqslant c_5 > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то для неотрицательных случайных величин из условия (II) следует, что $EX_1 = \alpha$.

Отметим, что для выполнения условия $n^{-r/t} A_n \not\to 0$ достаточно, чтобы $a_k \geqslant c > 0$, $k = 1, 2, \ldots, t \geqslant r \geqslant 1$.

Из теорем 1 — 4 получаются следующие результаты.

Теорема 5. Пусть $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$0 < c_6 \leqslant a_k \leqslant c_7 < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

a) при $0 < t < r$, $r \geqslant 1$ условие (2) равносильно

$$n^{r-1} L(n) P\{|Z_n| > \varepsilon n^{r/t}\} \to 0; \tag{13}$$

b) при $r \leqslant t < 2r$, $r > 1$ условие (2) равносильно

$$n^{r-1} L(n) P\{|Z_n - EZ_n| > \varepsilon n^{r/t}\} \to 0, \tag{14}$$

где $Z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$.

Теорема 6. Пусть $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (12). Тогда для любого $\varepsilon > 0$:

a) при $0 < t < r$, $r \geqslant 1$ условие (5) равносильно

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|Z_n| > \varepsilon n^{r/t}\} < \infty; \tag{15}$$

b) при $r \leqslant t < 2r$, $r > 1$ совокупность условий (5) и $EX_1 = \alpha$ равносильна

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|Z_n - \alpha A_n| > \varepsilon n^{r/t}\} < \infty. \tag{16}$$

С помощью простых вероятностных преобразований можно показать, что, если $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (12), то при $1 \leqslant t < r$ условия (13) и (14), (15) и (16) равносильны.

Сформулируем лемму 1 [1], поскольку она неоднократно будет использована в доказательствах.

Лемма 1 [1]. Если $n^r L(n) P\{|X_1| > n^{r/t}\} \to 0$, то для $\rho > 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$

$$\int\limits_{|x|<n^{\gamma r/t}} |x|^\rho dF(x) = \begin{cases} o(1), & \rho < t, \\ o(n^\eta [L(n^\gamma)])^{-1}, \ \eta > 0, & \rho = t, \\ o(n^{\gamma r(\rho/t-1)} [L(n^\gamma)]^{-1}, & \rho > t. \end{cases}$$

2. При доказательстве некоторых теорем будет использоваться модифицированный метод Эрдеша [3] (см. также [1, 2, 6, 7]).

Доказательство теоремы 1. Введем с. в.

$$X_{kn} = \begin{cases} X_k, & |X_k| \leqslant n^{\gamma r/t}, \\ 0, & |X_k| > n^{\gamma r/t}, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\gamma = 1$ при $r = 1$ и $\max[(r+1)/2r, 1/r] < \gamma < 1$ при $r > 1$. В случае а) $\gamma > t/r$, а в случае b) $\gamma > t/2r$ — то же самое число, что и в условии (В).

Обозначим $T_{nn} = A_n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_{kn}$. Без ограничения общности положим $\varepsilon = 1$, а $EX_1 = 0$ (случай b)). Отметим, что при $0 < t \leqslant r$, $r = 1$ и в случае b) из условия (В), леммы 1, того, что $EX_1 = 0$ (случай b)), и того, что $L(n) = o(n^\delta) \ \forall\ \delta > 0$ (см. [5], с. 504), вытекает $b_n^{-1} ET_{nn} \to 0$. Этот факт мы будем использовать ниже, не оговаривая особо. Следует заметить, что ограничение на последовательность $\{b_n\}$ (условие (В)) используется только в этом месте.

Рассмотрим сначала случай $r = 1$. При достаточно больших (д. б.) n имеем

$$P\{|T_n| > b_n\} \leqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > n^{1/t}\} + P\{|T_{nn}| > b_n\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > n^{1/t}\} + P\{|T_{nn} - ET_{nn}| > cb_n\}. \quad (17)$$

По условию,

$$\sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > n^{1/t}\} = nP\{|X_1| > n^{1/t}\} = o([L(n)]^{-1}).$$

Из леммы 1 [1], условия (1) и неравенства Чебышева имеем

$$P\{|T_{nn}-ET_{nn}|>cb_n\}\leqslant cb_n^{-2}E|T_{nn}-ET_{nn}|^2\leqslant$$
$$\leqslant cA_n^{-2}b_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2E|X_{kn}|^2\leqslant cA_n^{-2}b_n^{-2}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\int\limits_{|x|<n^{1/t}}x^2dF(x)\leqslant$$
$$\leqslant cn^{1-2/t}o(n^{2/t-1}[L(n)]^{-1})=o([L(n)]^{-1}).$$

Далее, пусть $r>1$. Тогда

$$P\{|T_n|>b_n\}\leqslant\sum_{k=1}^{n}P\{|X_k|>b_nA_n/3a_k\}+$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n}P\{|X_k|>n^{\gamma r/t}\}\right)^2+P\left\{|T_{nn}|>\frac{1}{3}b_n\right\}, \qquad (18)$$

причем в случае b) при д. б. n

$$P\{|T_{nn}|>1/3b_n\}\leqslant P\{|T_{nn}-ET_{nn}|>cb_n\}. \qquad (19)$$

Оценка первого слагаемого в (18) не представляет затруднения. По условию,

$$\sum_{k=1}^{n}P\{|X_k|>b_nA_n/3a_k\}\leqslant nP\{|X_1|>b_nA_n/3\max_{1\leqslant k\leqslant n}a_k\}\leqslant$$
$$\leqslant nP\{|X_1|>cn^{r/t}\}=o(n^{1-r}[L(n)]^{-1}).$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$\left(\sum_{k=1}^{n}P\{|X_k|>n^{\gamma r/t}\}\right)^2=n^2(P\{|X_1|>n^{\gamma r/t}\})^2=$$
$$=o(n^{2-2\gamma r}[L(n^\gamma)]^{-2}.$$

Здесь следует учесть, что $2-2\gamma r<1$, а $L(n)=o(n^\delta)\ \forall\ \delta>0$. Наконец, приступим к оценке третьего слагаемого в (18). В случае b) введем

$$U_k=\begin{cases}X_{kn}-EX_{kn} & \text{в случае b)}\\ X_{kn} & \text{в случае a).}\end{cases}$$

Имеем

$$P\left\{\left|A_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}a_kU_k\right|>cb_n\right\}\leqslant cA_n^{-M}b_n^{-M}E\left(\sum_{k=1}^{n}a_kU_k\right)^M, \qquad (20)$$

где $M>0$ — некоторое четное число, его мы выберем позднее.

Далее

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} a_k U_k\right)^M = \sum_{\lambda}\binom{M}{m}\sum_{\mu} Ea_{i_1}^{p_1}U_{i_1}^{p_1}\dots Ea_{i_m}^{p_m}U_{i_m}^{p_m} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda}\binom{M}{m}\sum_{\mu_1} Ea_{i_1}^{p_1}|U_{i_1}|^{p_1}\dots Ea_{i_m}^{p_m}|U_{i_m}|^{p_m} =$$

$$= \sum_{\lambda}\binom{M}{m}\prod_{l=1}^{m} E|U_1|^{p_l}\prod_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^{p_l}\right). \qquad (21)$$

Здесь $\lambda=(p_1, \dots, p_m)$ — разбиение M на целые числа с упорядочением, т. е. $\sum_{k=1}^{m} p_k = M$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \dots p_m \geqslant 1$ (случай a)), $p_m \geqslant 2$ (случай b)) $\mu=(i_1, \dots, i_m)$ — набор индексов $1 \leqslant i_k \leqslant n$ таких, что $i_s \neq i_l$ при $j \neq l$: μ_1 — любой набор m индексов $1 \leqslant i_k \leqslant n$; $\binom{M}{m} = M!/p_1! \dots, p_m!$. Имеем

$$\prod_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{p_l}\right) \leqslant \prod_{l=1}^{m} n\,(\max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k)^{p_l} \leqslant c\prod_{l=1}^{m} b_n^{p_l}A_n^{p_l}n^{1-rp_l/t} =$$

$$= cn^{m-rM/t}b_n^M A_n^M. \qquad (22)$$

Нетрудно получить $E|U_1|^{p_l} \leqslant c \int\limits_{|x|\leqslant n^{\gamma r/t}} |x|^{p_l}dF(x)$. Применим лемму 1 [1]:

$$E|U_1|^{p_l} = \begin{cases} O(1), & \text{если } p_l < t, \\ O(n^{\eta}[L(n^{\gamma})]^{-1}),\ \eta > 0, & \text{если } p_l = t, \\ O(n^{\gamma r(p_l(t-1))}[L(n^{\gamma})]^{-1}), & \text{если } p_l > t. \end{cases}$$

Пусть u — число p_l, меньших t, v — число p_l, больших t; w — число p_l, равное t. Очевидно $u+v+w=m$. Имеем

$$\prod_{l=1}^{m} E|U_1|^{p_l} = o\left(n^{\eta w+\gamma r\sum_{p_l>t} p_l/t-v\gamma r}[L(n^{\gamma})]^{-(v+w)}\right). \qquad (23)$$

Собирая оценки в формулах (20) — (23), исследуем общий показатель степени у n в верхней границе для выражения $n^{r-1}P\left\{\left|A_n^{-1}\times\right.\right.$ $\left.\left.\times\sum_{k=1}^{n} a_k U_k\right| > cb_n\right\}$. Выберем $\eta = 1/M$. Имеем

$$\nu = r - 1 + m - r/tM + wM^{-1} + \gamma r t^{-1} \sum_{p_l > t} p_l - v\gamma r \leqslant r + m -$$
$$- rMt^{-1} + \gamma r M t^{-1} - \gamma r t^{-1} \sum_{p_l \leqslant t} p_l - v\gamma r.$$

Рассматривая отдельно случай a) ($t \leqslant 1$ и $1 < t < r$) и случай b) ($r \leqslant t < 2$ и $\max(2, r) \leqslant t < 2r$), нетрудно получить, что $\nu < 0$ при $M \geqslant t/(1-\gamma)$. Так как $L(n) = o(n^{\delta})$ $\forall \delta > 0$, то теорема доказана.

В доказательстве теоремы 2 мы будем иногда использовать оценки, полученные при доказательстве теоремы 1. Это обоснованно, так как из условия (5) следует (2).

В случае $r = 1$ воспользуемся неравенством (17). Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > n^{1/t}\} = \sum_{n=1}^{\infty} L(n) P\{|X_1| > n^{1/t}\} < \infty.$$

(Сходимость последнего ряда равносильна условию (5) при $r = 1$). Далее, по условию (1) и неравенству Чебышева, действуя, как и при доказательстве теоремы 1 [7], получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) P\{|T_{nn} - ET_{nn}| > cb_n\} \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{j=1}^{\infty} j^{2/t-1} P\{|X_1|^t \geqslant j\} \sum_{n=j}^{\infty} n^{-2/t} L(n).$$

В работе [1] было доказано, что при $0 < t < 2$ $\sum_{n=j}^{\infty} n^{-2/t} L(n) \leqslant$ $\leqslant cj^{-2/t+1} L(j)$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} L(n) P\{|T_{nn} - ET_{nn}| > cb_n\} \leqslant$$
$$\leqslant c \sum_{j=1}^{n} L(j) P\{|X_1| > j^{1/t}\} < \infty.$$

Для случая $r > 1$ используем неравенства (18), (19). Первое слагаемое в (18) оценивается просто:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > b_n A_n / 3a_k\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} L(n) P\{|X_1| > Cn^{r/t}\} < \infty,$$

Второе слагаемое

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r+2} L(n) \left(\sum_{k=1}^{n} P\{|X_k| > n^{\gamma r/t}\} \right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2\gamma r} L(n) (E|X_1|^t)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2\gamma r} L(n) < \infty.$$

Для оценки последнего слагаемого в (18) точно так же, как и в теореме 1, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\left\{ \left| A_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k U_k \right| > cb_n \right\} \leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu} [L(n)]^{1-(v+w)}, \quad (24)$$

где $\nu \leqslant r-1+m-rM/t+\gamma r \sum_{p_i > t} p_i/t - v\gamma r$.

Исследование показателя ν полностью аналогично соответствующему исследованию в теореме 1. Оказывается, что $\nu < -1$ при $M \geqslant t/(1-\gamma)$. Учитывая свойства функции $L(n)$, утверждаем: ряд (24) сходится. Теорема 2 доказана.

Докажем теперь теорему 3. Возьмем любое $\varepsilon_1 > 0$ и покажем, что $n^r L(n) P\{|X_1| > \varepsilon_1 n^{r/t}\} \to 0$. Из условия (9) следует, что $b_n^{-1} T_n^s \xrightarrow{P} 0$ *), т. е. $(b_n A_n)^{-1} L_n^s \xrightarrow{P} 0$.

Введем следующие обозначения:

$$Y_k = a_k X_k \left(\text{т. е. } Z_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \right), \quad Y_{kn} = a_k \overline{X}_{kn},$$

$$X_{kn} = \begin{cases} X_k, & |X_k| \leqslant b_n A_n \varepsilon_1 / 6C_2 a_2, \\ 0, & |X_k| > b_n A_n \varepsilon_1 / 6C_2 a_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

$B_n = \sum_{k=1}^{n} EY_{nk}$. Используя легкую модификацию леммы [7], имеем при $\varepsilon \leqslant (6C_2)^{-1} \varepsilon_1$

$$P\{|T_n - A_n^{-1} B_n| > \varepsilon b_n\} = P\{|Z_n - B_n| > \varepsilon b_n A_n\} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k| \geqslant b_n A_n \varepsilon_1 (2C_2)^{-1}\} \times \quad (25)$$

$$\times \left\{ 1 - 2 \sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k| \geqslant b_n A_n \varepsilon_1 (6C_2)^{-1}\} - (\varepsilon b_n A_n)^{-2} \times \right.$$

---

*) Символ $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности. Индексом «S» мы будем обозначать симметризованные с. в. в их ф. р.

$$\times \sum_{k=1}^{n} \left[\int\limits_{|x|<b_nA_n\varepsilon_1/6C_2} x^2 dF_k(x) - \left(\int\limits_{|x|<b_nA_n\varepsilon_1/6C_2} x dF_k(x) \right)^2 \right] \Bigg\},$$

где $F_k(x)$ — ф. р. Y_k.

Для симметризованных с. в. неравенство (25) выглядит следующим образом:

$$P\{|T_n^s| > \varepsilon b_n\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k^s| > b_nA_n\varepsilon_1 (2C_2)^{-1}\} \times$$

$$\times \left[1 - 2\sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k^s| > b_nA_n\varepsilon_1/6C_2\} - (\varepsilon b_nA_n)^{-2} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<b_nA_n\varepsilon_1/6C_2} x^2 dF_k^s(x) \right]. \qquad (26)$$

Поскольку $(b_nA_n)^{-1}Z_n^s \xrightarrow{P} 0$, все выражение в квадратных скобках в (26) при д.б. n будет не меньше $1-\delta$, $0<\delta<1$ (см. [4], с.316). Следовательно,

$$P\{|T_n^s| > \varepsilon b_n\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k^s| > b_nA_n\varepsilon_1/2c_2\} (1-\delta) \geqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k^s| > b_nA_n\varepsilon_1 (2c_2 \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_k)^{-1}\} (1-\sigma) \geqslant nP\{|X_1^s| >$$

$$> \frac{\varepsilon_1}{2} n^{r/t}\} (1-\delta). \qquad (27)$$

Отсюда, используя неравенство

$$n^r L(n) P\{|X_1| > \varepsilon_1 n^{r/t}\} \leqslant n^r L(n) P\{|X_1 - \operatorname{med} X_1| > \varepsilon_1 n^{r(t)}/2\},$$

справедливое при д. б. n, сразу же получаем требуемый результат. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 используем формулу, вывод которой в точности совпадает с выводом формулы (26). Только величины $\overline{X}_{kn}$ вводятся с помощью усечения X_k по $b_nA_n/3a_k$. При $\varepsilon \leqslant 1/3$ имеем

$$P\{|T_n^s| > \varepsilon b_n\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{|X_k^s| > b_nA_n\} \left[1 - 2\sum_{k=1}^{n} P\{|Y_k^s| > b_nA_n/3\} - \right.$$

$$\left. - (\varepsilon b_nA_n)^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<b_nA_n/3} x^2 dF_k^s(x) \right]. \qquad (28)$$

Методом 2 можно показать, что при выполнении условий (I) или (II) $(b_n A_n)^{-1} L_n^s \xrightarrow{P} 0$. (При $r \geqslant 2$ это очевидно следует из (II).) Поэтому все выражение в квадратных скобках в (28) при д. б. n не меньше $1-\delta$. Учитывая это и принятые обозначения, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} L(n) P\{|X_1^s| > cn^{r/t}\} < \infty,$$

что равносильно условию $E\{|X_1^s|^t L(|X_1^s|^{t/r})\} < \infty$. Из последнего нетрудно получить условие (5). Случай a) доказан.

Рассмотрим случай b). Очевидно, достаточно провести доказательство для $\alpha = 0$. По a) $E|X_1|^t < \infty$, откуда $E|X_1|^{t/r} < \infty$, так как $r \geqslant 1$, причем $1 \leqslant t/r < 2$. По теореме [8] (с. 256) при $a_k \leqslant c < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ имеем $n^{-r/t}(Z_n - EZ_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. Далее, из (11) следует, что существует подпоследовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_i \to \infty$, $i \to \infty$, такая, что $(b_{n_i} A_{n_i})^{-1} Z_{n_i} \xrightarrow{P} 0$, $i \to \infty$. Значит, по (8) $Z_{n_i}/n_i^{r/t} \times \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n_i} a_k \xrightarrow{P} 0$, $i \to \infty$. Поскольку $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n_i} a_k \leqslant a_1$, то $n_i^{-r/t} Z_{n_i} \xrightarrow{P} 0$, $i \to \infty$. Объединяя оба условия, получаем, что $n_i^{-r/t} EZ_{n_i} \to 0$, $i \to \infty$, откуда $n_i^{-r/t} A_{n_i} EX_1 \to 0$, $i \to \infty$. Следовательно, $EX_1 = 0$, если $n^{-r/t} A_n \not\to 0$.

Случай c). Для неотрицательных с. в. воспользуемся теоремой Марцинкевича [8] (с. 257). Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Из условия $E|X_1|^t < \infty$ следует, что $E|X_1|^{t/r} < \infty$, $1 \leqslant t/r < 2$. Поэтому $n^{-r/t}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$. С другой стороны, $n_i^{-r/t} Z_{n_i} \xrightarrow{P} 0$, $i \to \infty$ для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Отсюда

$$cS_{n_i}(n_i^{r/t})^{-1} \leqslant (\min_{1 \leqslant k \leqslant n_i} a_k) S_{n_i}(n_i^{r/t})^{-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n_i} a_k X_k (n_i^{r/t})^{-1} =$$

$$= Z_{n_i}(n_i^{r/t})^{-1} \xrightarrow{P} 0, \quad i \to \infty,$$

так как $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n_i} a_k \geqslant c > 0$. Следовательно, $n_i^{-r/t} ES_{n_i} = n_i^{1-r/t} EX_1 \to 0$, $i \to \infty$, откуда при $t \geqslant r$ получаем, что $EX_1 = 0$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5 является следствием теорем 1 и 3. Оказывается, условия (1) и (8) могут одновременно выполняться лишь в том случае, когда последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (12), а $b_n \asymp n^{r/t-1}$. Условие (B) при этом выполняется (в случае b)) с $\gamma > (t - r + \varkappa t)/r\,(t-1)$, $\varkappa < r - 1$, $r > 1$.

Теорема 6 вытекает из теорем 2 и 4. Поскольку условие (12) гарантирует, что $n^{-r/t}A_n \nrightarrow 0$, а из условия $b_nA_n \asymp n^{r/t}$ следует (1), то все требования теорем 2 и 4 удовлетворены. Дальнейшее очевидно.

Замечание. Есть основания полагать, что при $r=1, t \geqslant 1$ теоремы 5 и 6 неверны. Для теоремы 5 в случае $r=t=1$ это подтверждается наличием последовательности одинаково распределенных независимых с. в. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, распределение которых задано следующим образом:

$$P\{X_1 = 1\} = 1/2,\quad P\{X_1 = n\} = (2A)^{-1} n^{-2} \ln^{-1} n,\quad n = 2, 3, \ldots,$$

где $A = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-2} \ln^{-1} n$.

Если рассматривать теоремы 1 и 2 для симметричных с. в., то отпадает необходимость доказывать, что $b_n^{-1} ET_{nn} \to 0$, следовательно, и требовать выполнения условия (B). Тогда в теоремах 5 и 6 для симметричных с. в. не будет исключен случай $r = 1$, $t \geqslant 1$. Можно, впрочем, освободиться от требования симметричности в формулировках указанных теорем, переходя в доказательствах к симметризованным с. в. Для этого одновременно с выполнением условия (2) в теоремах 1,5 и условия (5) в теоремах 2, 6 нужно потребовать выполнения условий

$$(b_nA_n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{|x| < a_k^{-1} b_n A_n} x\,dF(x) \to 0$$

и

$$(b_nA_n)^{-2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left[\int\limits_{|x| < a_k^{-1} b_n A_n} x^2\,dF(x) - \left(\int\limits_{|x| < a_k^{-1} b_n A_n} x\,dF(x) \right)^2 \right] \to 0$$

при $0 < t < 2r$, $r \geqslant 1$. Условия (B), (4), (7), (14) и (16) исключаются из формулировок теорем.

3. О связи предыдущих результатов с усиленным законом больших чисел дают представление следующие теоремы.

Теорема 7а. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют одному из условий (I) и (II). Тогда при $r > 1$ для любого $\varepsilon > 0$ равносильны условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n)\, P\{|T_n - \mathrm{med}\, T_n| > \varepsilon b_n\} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n)\, P\{\sup_{k \geqslant n} |T_k b_k^{-1} - \mathrm{med}\, T_k b_k^{-1}| > \varepsilon\} < \infty, \qquad (29)$$

а при $r \geqslant 2$ для любого $\varepsilon > 0$ равносильны условия (6) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{\sup_{k \geqslant n} |T_k/b_k| > \varepsilon\} < \infty.$$

При $r = 1$ из условия

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \ln n L(n) P\{|T_n| - \operatorname{med} T_n| > \varepsilon b_n\} < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ вытекает (29).

Теорема 7б. Пусть $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (12). Тогда при $r > 1$, $0 < t < 2r$ для любого $\varepsilon > 0$ равносильны условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{|Z_n| > \varepsilon n^{r/t}\} < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} L(n) P\{\sup_{k \geqslant n} |Z_k/k^{r/t}| > \varepsilon\} < \infty. \tag{30}$$

Если же $L(x)$ удовлетворяет условию

$$\varliminf_{n \to \infty} L(n^{\beta})/L(n) > 0 \tag{31}$$

для $0 < \beta < 1$, то при $0 < t < 2$ для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \ln n L(n) P\{|Z_n| > \varepsilon n^{1/t}\} < \infty \tag{32}$$

равносильно условию (30) при $r = 1$*).

Теорема 8. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют одному из условий (I) и (II). Тогда при $r > 1$ равносильны условия (3) и $n^{r-1} L(n) P\{\sup_{k \geqslant n} |T_k/b_k| > \varepsilon\} \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$ **).

Доказательства теорем 7 и 8 проводятся методами, аналогичными методам [2].

Из сформулированных теорем, а также из лемм 1 и 2 [1] при $a_n \equiv 1$ вытекают теоремы 1, 2 [1], а при $a_n \equiv 1$, $L(n) \equiv 1$ — теоремы 1 — 4 [2].

Автор выражает искреннюю признательность проф. В. В. Петрову за внимание к работе и ценные замечания.

*) Для доказательства того, что (31)$\Rightarrow$(30) при $r=1$, условие (31) не является необходимым.

**) В этой теореме достаточно, чтобы $L(x)$ была неотрицательной и неубывающей функцией натурального аргумента.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heyde C. C., Rohatgi V. K.* A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers. — «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1967, 63, 1
2. *Baum L. E., Katz M.* Convergence rates in the law of large number. — «Trans Amer. Math. Soc.», 1965, 120, 108—123.
3. *Erdős P.* On a theorem of Hsu and Robbins. — «Ann. Math. Statist.» 1949, 20. 286—291.
4. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972
5. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанны величины. М., «Наука», 1965.
6. *Широкова И. В.* О скорости сходимости в слабом законе больших чисел.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1973, 8.
7. *Широкова И. В.* О скорости сходимости в законе больших чисел при моментных ограничениях. — «Литовский математический сборник», 1974, 14, 1
8. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.