М. И. ЮДИЦКИЙ, ст. научн. сотр.
НИИАСС

О СВОЙСТВАХ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИИ

Рассмотрим регрессионную модель

$$y(t) = \theta' x(t) + \varepsilon(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

где $y(t)$ — наблюдаемый случайный процесс, θ — m-мерный вектор-столбец неизвестных параметров, θ' — транспонированный вектор, $x(t)$ — известная вектор-функция, $\varepsilon(t)$ — производная стандартного винеровского процесса $w(t)$.

Наилучшей линейной оценкой для θ будет оценка наименьших квадратов (ОНК) $\hat{\theta}$, которая минимизирует функционал

$$\int_0^T [y(t) - \theta' x(t)]^2 \, dt.$$

При этом

$$\hat{\theta} = \left[\int_0^T x(t) x'(t) \, dt \right]^{-1} \int_0^T x(t) y(t) \, dt. \qquad (2)$$

Будем рассматривать следующий специальный случай модели (1). Пусть наблюдаются неотрицательные случайные величины τ_i, $i = 1, 2, \ldots$ и для любого конечного n $P\{\tau_1 + \ldots + \tau_n < \infty\} = 1$; вектор-функция $x(t)$ ступенчатая и принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ($x_i \in R^m$) соответственно при $0 \leqslant t < \tau_1$, $\tau_1 \leqslant t < \tau_1 + \tau_2, \ldots$ $\ldots, \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \leqslant t < \sum_{i=1}^{n} \tau_i, \ldots$. Тогда для оценки (2) справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Пусть τ_i $(i = \overline{1, n})$ — независимые между собой и от $w(t)$ неотрицательные одинаково распределенные случайные величины, $M\tau_1 < \infty$, $w(t)$ — винеровский процесс.

Тогда ОНК $\hat{\theta}^{(n)}$ можно представить в виде

$$\hat{\theta}^{(n)} = \theta + (X_n' T_n X_n)^{-1} X_n' \rho^{(n)}, \qquad (3)$$

где матрица $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, x_i — вектор-столбец; $T_n = \| \delta_i^j \tau_i \|_{i,j=1}^n$, δ_i^j — символ Кронекера; $\rho^{(n)} = (\rho_1, \ldots, \rho_n)'$, ρ_i — скалярные случайные величины, обладающие свойствами:

1) $M\rho_i = 0$, $i = \overline{1, n}$;

2) $M\rho_i^2 = M\tau_i$, $M_\tau \rho_i^2 = \tau_i$, M_τ — условное математическое ожидание относительно векторной случайной величины $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$;

3) ρ_i $(i = \overline{1, n})$ — независимы, одинаково распределены.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\int_0^{t_n} x(t) x'(t) \, dt = X_n' T_n X_n,$$

$$\int_0^{t_n} x(t) y(t) \, dt = \theta (X_n' T_n X_n) + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} dw(t),$$

где $t_i = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_i$, $t_0 = 0$.

Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить выполнение свойств 1)—3) для случайных величин

$$\rho_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} dw(t) = w(t_i) - w(t_{i-1}). \qquad (4)$$

Выполнение этих свойств вытекает из того, что случайные величины τ_i с $M\tau_i < \infty$ независимы между собой и от $w(t)$, а процесс $w(t)$ — измеримый и имеет непрерывные почти наверное (п. н.) траектории.

Таким образом, рассмотренная ситуация приводит к оценке (3). К этой оценке приводят и другие модели, например, следующая модель с неравноточными наблюдениями. Пусть наблюдается n независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$,

$$P\{\tau_1 > 0\} = 1. \tag{5}$$

Предположим, что в модели регрессии

$$y_i = \theta' x_i + \eta_i, \quad i = \overline{1, n} \tag{6}$$

погрешность наблюдения $\eta_i = \varepsilon_i \tau_i^{-1/2}$, где $\varepsilon_i\ (i = \overline{1, n})$ — независимые между собой и от τ_i одинаково распределенные случайные величины с $M\varepsilon_i = 0$, $M\varepsilon_i^2 = 1$. Тогда $M_\tau \eta_i = 0$ п. н., $M_\tau \eta_i^2 = \frac{1}{\tau_i}$ п.н., а оценка $\hat{\theta}^{(n)}$, минимизирующая $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \theta' x_i)^2 \tau_i$, является ОНК для (6) и определяется по формуле

$$\hat{\theta}^{(n)} = \theta + (X_n' T_n X_n)^{-1} X_n' T_n \eta^{(n)},$$

где $\eta^{(n)} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)'$.

Обозначим $T_n \eta^{(n)} = \rho^{(n)}$. Тогда оценка $\hat{\theta}^{(n)}$ имеет вид (3), при этом $\rho_i = \sqrt{\tau_i}\varepsilon_i$ и, как нетрудно убедиться, ρ_i обладают свойствами 1) — 3) леммы 1 при условии $M\tau_i < \infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению оценки (3).

Лемма 2. Пусть для некоторого n $\det X_n' X_n \neq 0$ и выполнено (5). Тогда оценка (3) существует с вероятностью 1.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$P\{\det X_n' T_n X_n = 0\} = 0.$$

Из условий леммы следует, что среди векторов $x_1, \ldots, x_n$ имеется по крайней мере m ($m \leqslant n$) линейно независимых векторов (пусть это $x_1, x_2, \ldots, x_m$). Так как для неотрицательно определенных матриц A и B $\det(A + B) \geqslant \det A$, то

$$\det X_n' T_n X_n = \det \sum_{i=1}^{n} x_i x_i' \tau_i \geqslant \det \sum_{i=1}^{m} x_i x_i' \tau_i = \det \sum_{i=1}^{m} x_i x_i' \prod_{i=1}^{m} \tau_i > 0$$

с вероятностью 1.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оценка $\hat{\theta}^{(n)}$ определяется формулой (3), где векторы $x_i \in U$, U — некоторое ограниченное множество в R^m; существует такая постоянная $q > 0$, что для любого $n \geqslant m$ выполнено условие

$$\det \frac{1}{n} X_n' X_n > q; \tag{7}$$

для независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин τ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ выполнено условие (5) и существует конечный первый момент величины τ_1;

$$\mathrm{M}\tau_1 = a > 0; \tag{8}$$

случайные величины ρ_i обладают свойствами 1—3 леммы I.

В работе исследованы свойства оценки $\hat{\theta}^{(n)}$ и ее матрицы ковариаций. Показаны несмещенность оценки, сильная состоятельность и асимптотическая нормальность; найдено асимптотическое выражение для ковариационной матрицы оценки.

Теорема 1. Оценка $\hat{\theta}^{(n)}$ сильно состоятельна; более того, при $\gamma < \frac{1}{2}$ и $n \to \infty$

$$n^{\gamma} |\hat{\theta}^{(n)} - \theta| \to 0 \text{ п. н.}; \tag{9}$$

m-мерная векторная случайная величина

$$\zeta^{(n)} = \sqrt{a}\,(X_n' X_n)^{1/2}\,(\hat{\theta}^{(n)} - \theta) \tag{10}$$

асимптотически нормальна с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций J.

Доказательство. Так как τ_i — неотрицательные независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным математическим ожиданием, а элементы матрицы X_n ограничены, то аналогично теореме Колмогорова, указывающей необходимое и достаточное условие того, чтобы усиленный закон больших чисел (ус. з. б. ч.) имел место, можно показать, что при $n \to \infty$ поэлементно

$$\frac{1}{n} X_n' T_n X_n - \frac{a}{n} X_n' X_n \to 0 \text{ п. н.} \tag{11}$$

Так как ρ_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathrm{M}\rho_i = 0$, $\mathrm{D}\rho_i = \mathrm{M}\tau_i = a$, то, применяя теорему 14 [1] (стр. 70) об ус. з. б. ч., получим, что при $\gamma < \frac{1}{2}$ и $n \to \infty$

$$\frac{1}{n^{1-\gamma}} X_n' \rho^{(n)} \to 0 \quad \text{п. н.} \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (7) получим, что при $n \to \infty$

$$n \left[(X_n' T_n X_n)^{-1} - \frac{1}{a} (X_n' X_n)^{-1} \right] \to 0 \text{ п. н.} \tag{13}$$

Так как

$$\hat{\theta}^{(n)} - \theta = (X_n' T_n X_n)^{-1} X_n' \rho^{(n)}$$

и из (7) и ограниченности множества U вытекает ограниченность элементов матрицы $\left(\frac{1}{n} X_n' T_n X_n\right)^{-1}$, то из (12) и (13) вытекает соотношение (9).

Докажем теперь асимптотическую нормальность оценки.

Заметим, что аналогично предыдущему при $n \to \infty$

$$A_n = a (X_n' X_n)^{1/2} (X_n' T_n X_n)^{-1} (X_n' X_n)^{1/2} \to J \text{ п. н.} \qquad (14)$$

Для доказательства асимптотической нормальности величины

$$\zeta^{(n)} = \sqrt{a} (X_n' X_n)^{1/2} (X_n' T_n X_n)^{-1} X_n' \rho^{(n)}$$

установим сначала такую лемму.

Лемма 3. Для всякого $\lambda \in R^m$ случайные величины

$$\nu_n = \lambda' \frac{1}{\sqrt{a}} (X_n' X_n)^{-1/2} X_n' \rho^{(n)} = \lambda' \eta^{(n)}$$

слабо сходятся к нормальной случайной величине с параметрами $(0, \lambda'\lambda)$.

Доказательство. Представим ν_n в виде

$$\nu_n = \sum_{k=1}^{n} u_{nk} \rho_k,$$

где

$$u_{nk} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lambda' \left(\sum_{l=1}^{n} x_l x_l'\right)^{-1/2} x_k.$$

Нетрудно видеть, что для всяких n и k

$$\sum_{k=1}^{n} u_{nk}^2 = \frac{1}{a} \lambda'\lambda, \qquad u_{nk}^2 < \frac{c^2}{n}, \quad c = \text{const}. \qquad (15)$$

Обозначим через $f(t)$ характеристическую функцию случайной величины ρ_k. Так как $M\rho_k = 0$, $M\rho_k^2 = a$, то

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} a t^2 + \alpha(t) t^2,$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Следовательно, учитывая независимость величин ρ_k, имеем

$$\varphi_n(t) = \log \mathbf{M} \exp\{it\nu_n\} = \log \mathbf{M} \exp\left\{it \sum_{k=1}^{n} u_{nk}\rho_k\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log\left[1 - \frac{1}{2} a u_{nk}^2 t^2 + \alpha(tu_{nk}) t^2 u_{nk}^2\right].$$

При больших n

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{2} a t^2 \sum_{k=1}^{n} u_{nk}^2 + t^2 \sum_{k=1}^{n} u_{nk}^2 \beta(t, u_{nk}), \qquad (16)$$

где для всякого t $\beta(t, u) \to 0$ при $u \to 0$.

Так как для всякого k $|u_{nk}| < cn^{-1/2}$, то для любого $\varepsilon > 0$ $|\beta(t, u_{nk})| < \varepsilon$ равномерно по k при достаточно больших n. Поэтому при $n \to \infty$ второе слагаемое в (16) стремится к нулю. Учитывая (15), получаем

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = -\frac{1}{2} t^2 \lambda' \lambda.$$

Лемма 3 доказана.

Для произвольного вектора $\mu \in R^m$

$$\mu' \zeta^{(n)} = \mu' A_n \eta^{(n)} = \mu' B_n \eta^{(n)},$$

где

$$B_n = A_n - J = \| b_{ij}^{(n)} \|_{i,j=1}^{m}, \quad b_{ij}^{(n)} \to 0 \text{ п. н.}$$

и по лемме 3 $\eta^{(n)}$ слабо стремится к $N(0, J)$.

Следовательно, $\mu' B_n \eta^{(n)} \to 0$ по вероятности и $\mu' \zeta^{(n)}$ слабо стремится к $N(0, \mu'\mu)$. Отсюда вытекает асимптотическая нормальность векторной случайной величины $\zeta^{(n)}$. Теорема 1 доказана.

Предположим в дальнейшем, что последовательность векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_i \in U \subset R^m)$, составляющих матрицу $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, удовлетворяет следующему условию: для любого $n \geqslant m$ найдутся такие q_n групп векторов

$$x_{i_{mk+l}^{(n)}}, \quad l = \overline{1, m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, q_n - 1, \quad q_n > c_1 n^{*)},$$

что

$$\min_{0 \leqslant k \leqslant q_n - 1} \det\left(x_{i_{mk+1}^{(n)}}, x_{i_{mk+2}^{(n)}}, \ldots, x_{i_{mk+m}^{(n)}}\right) > c_2 > 0. \qquad (17)$$

Отметим, что из (17) вытекает (7) (см. обобщение тождества Лагранжа [2], (стр. 74)).

---

*) В дальнейшем буквой c с индексом или без него будем обозначать различные постоянные.

Приведем некоторые достаточные условия для выполнения (17).

1. Пусть $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$, $s \geqslant m$, среди векторов u_i ($i=\overline{1, s}$) существует по крайней мере m линейно независимых (не ограничивая общности, положим, что это векторы u_i, $i=\overline{1, m}$) и для любого n существуют такие числа $n_i^{(n)}$, что $\frac{n_i^{(n)}}{n} > c_0 > 0$, где $n_i^{(n)}$ — число таких x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $x_j = u_i$.

2. Существует последовательность натуральных чисел $\{k_s\}$, $s \geqslant 1$ таких, что $m \leqslant k_{s+1} - k_s \leqslant c_3$ для всех s и для матриц

$$X_{k_s}^{k_s+1} = (x_{k_s+1}, x_{k_s+2}, \ldots, x_{k_{s+1}})'$$

(положим $k_0 = 0$) равномерно по s

$$\det X_{k_s}^{k_s+1'} X_{k_s}^{k_s+1} > c_4.$$

3. U — ограниченное замкнутое множество на положительной полуоси.

Для изучения оценки (3) понадобится следующая лемма, указывающая одно свойство случайной матрицы $\frac{1}{n} X_n' T_n X_n$ в предположении (17).

Лемма 4. Для всякого $n \geqslant m$

$$\left(\det \frac{1}{n} X_n' T_n X_n\right)^{1/m} \geqslant \frac{c}{q_n} \sum_{k=0}^{q_n-1} \left(\prod_{l=1}^{m} \tau_{i_{mk+l}^{(n)}}\right)^{1/m}, \tag{18}$$

где индексы $i_{mk+l}^{(n)}$ — различные целые числа из промежутка $[1, n]$, $q_n \to \infty$ при $n \to \infty$, c — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Доказательство. Используя неотрицательную определенность матриц и применяя к ним неравенство Минковского [3] (стр. 156), получаем

$$(\det X_n' T_n X_n)^{\frac{1}{m}} \geqslant \sum_{k=0}^{q_n-1} h_k^{\frac{1}{m}},$$

где

$$h_k = \det \sum_{l=1}^{m} x_{i_{mk+l}^{(n)}} x'_{i_{mk+l}^{(n)}} \tau_{i_{mk+l}^{(n)}} = \left(\det \sum_{l=1}^{m} x_{i_{mk+l}^{(n)}} x'_{i_{mk+l}^{(n)}}\right) \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{m} \tau_{i_{mk+l}^{(n)}} \geqslant c_2 \prod_{l=1}^{m} \tau_{i_{mk+l}^{(n)}}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{n} > \frac{c_1}{q_n}$, получаем (18). Лемма 4 доказана.

Обозначим

$$R_n = \left(\frac{1}{n} X_n' T_n X_n\right)^{-1} = \| r_{ij}^{(n)} \|_{i,j=1}^{m}$$

и докажем одно свойство случайных величин $r_{ij}^{(n)}$.

Теорема 2. Пусть существует $2(m+1)$-й момент случайной величины τ_1,

$$\mathbf{M}\tau_1^{2(m+1)} < c_5 \qquad (19)$$

и τ_1 имеет ограниченную в некоторой окрестности нуля плотность распределения $\varphi(x)$. Тогда существует такое N_0, что при $n > N_0$, $0 \leqslant \beta < \frac{1}{m}$

$$\mathbf{M}\,|r_{ij}^{(n)}|^{1+\beta} < c_6, \quad i, j = \overline{1, m}. \qquad (20)$$

Доказательство. Пусть $v_{ij}^{(n)}$ $(i, j = \overline{1, m})$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $\frac{1}{n} X'_n T_n X_n$. Тогда

$$r_{ij}^{(n)} = v_{ij}^{(n)} (\det X'_n T_n X_n)^{-1}.$$

Так как $x_i \in U$, U — ограниченное множество, то абсолютные величины элементов матрицы $\frac{1}{n} X'_n T_n X_n$ не превосходят $\frac{c_7}{n}(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n)$ и $|v_{ij}^{(n)}| \leqslant c_8 \left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \tau_s\right)^{m-1}$.

Поскольку при $p > 1$, $a_s > 0$ $(s = \overline{1, n})$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} a_s\right)^p \leqslant \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} a_s^p,$$

то

$$|v_{ij}^{(n)}|^{1+\beta} \leqslant c_9 \cdot \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \tau_s^{(m-1)(1+\beta)}.$$

Применяя лемму 4, получим

$$|r_{ij}^{(n)}|^{1+\beta} \leqslant \frac{c_{10}}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau_s^{(m-1)(1+\beta)}}{D^{m(1+\beta)}}, \qquad (21)$$

где

$$D = \frac{1}{q_n} \sum_{j=0}^{q_n - 1} \eta_j, \qquad \eta_j = \left(\prod_{l=1}^{m} \tau_{k_{mj+l}^{(n)}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

В правой части неравенства (21) для каждого s исключим из D то слагаемое η_{j_s}, которое содержит τ_s (если такое найдется). Получим

$$D_s = \frac{1}{q_n} \sum_{\substack{j=0,1,\ldots,q_n-1 \\ j \neq j_s}} \eta_j.$$

Тогда $D \geqslant D_s$ и

$$|r_{ij}^{(n)}|^{1+\beta} \leqslant \frac{c_{10}}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau_s^{(m-1)(1+\beta)}}{D_s^{m(1+\beta)}}, \tag{22}$$

где случайные величины τ_s и D_s независимы при всяком s.

В работе [4] доказано следующее утверждение. Пусть $\xi_1, \xi_0, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин с $M\xi_1^{2z} < \infty$ для некоторого целого положительного z и плотностью распределения вероятностей, ограниченной в некоторой окрестности нуля.

Тогда при всех $n > z$ для любого $z_1 < z$

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^{-z_1} \leqslant c,$$

где постоянная c от n не зависит.

Так как случайные величины η_j удовлетворяют сформулированным условиям для ξ_j и $q_n \to \infty$, то при $n > N_0$ и $\beta < \frac{1}{m}$ для всякого s

$$MD_s^{-m(1+\beta)} < c_{11}.$$

По условию теоремы 2 при тех же β

$$M\tau_1^{(m-1)(1+\beta)} < c_5.$$

Таким образом, математические ожидания каждого из слагаемых суммы в правой части (22) существуют и ограничены одним и тем же числом, не зависящим от s. Следовательно, имеет место (20).

Из доказанной теоремы вытекают следующие утверждения.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 при достаточно больших n оценка (3) является несмещенной и её ковариационная матрица

$$M(\hat{\theta}^{(n)} - \theta)(\hat{\theta}^{(n)} - \theta)' = M(X_n' T_n X_n)^{-1}. \tag{23}$$

Теорема 4. В условиях теоремы 2 при $n \to \infty$

$$n\left[M(\hat{\theta}^{(n)} - \theta)(\hat{\theta}^{(n)} - \theta') - \frac{1}{a}(X_n' X_n)^{-1}\right] \to 0. \tag{24}$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что моменты величины $r_{ii}^{(n)}$ порядка $1 + \beta$ $(\beta > 0)$ ограничены равномерно по n; элементы неслучайной матрицы $\left(\frac{1}{n} X_n' X_n\right)^{-1}$ также ограничены. Учитывая это и (13), получаем (24) [5] (стр. 198). Соотношение (24), дающее асимптотическое выражение для ковариационной матрицы оценки $\hat{\theta}^{(n)}$, позволяет свести задачи оптимального планирования регрессионных экспериментов при оценивании неизвестных параметров по формуле (3) к рассмотрению матрицы $(X'_n X_n)^{-1}$, которое проводилось в различных работах.

Автор благодарит А. Я. Дороговцева за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972.

2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969.

3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., «Мир», 1972.

4. *Дороговцев А. Я.* Об оценке вероятности малых значений сумм положительных случайных величин. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1973, вып. 9.

5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М., ИЛ, 1962.

M. I. Yuditsky

ABOUT PROPERTIES OF THE LEAST SQUARES ESTIMATOR FOR SOME CLASS OF REGRESSION MODELS

For some special class of regression models the properties of the least squares estimator and its covariance matrix are studied.

Поступила в редколлегию 13.XII 1974.