В. В. АНИСИМОВ, канд. физ.-мат. наук

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Изучим сначала некоторые общие условия сходимости величин вида $\xi_n(\nu_n \pm 0)$ к $\xi_0(\nu_0 \pm 0)$. Отдельные результаты имеются в работе [1]. Схема, в которой ϑ_0 — с вероятностью единица точка непрерывности процесса $\xi_0(t)$, изучалась в статье [2]. Случай, когда ν_n не зависит от последующих приращений $\xi_n(t)$, рассмотрен другим методом в книге [3].

Обозначим D_T пространство векторных функций $\bar{z}(t) \in R^r$, $t \in [0, T]$ без разрывов II рода и непрерывных справа, $\rho(\bar{a}, \bar{b})$ — расстояние в R^r.

Лемма 1. Пусть $\bar{z}_n(t)$ — последовательность функций из D_T, а числовая последовательность a_n такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ $(0 < a_0 < T)$. Тогда:

1) если $z_n(t)$ M_2-сходится на $[0, T]$ к функции $z_0(t)$, то:

а) для того чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n(a_n) = \bar{z}_0(a_0), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{c\to+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n), \bar{z}_n(a_n+c))=0; \tag{2}$$

б) для того чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\bar{z}_n(a_n-0)=\bar{z}_0(a_0-0), \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{c\to+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n-0), \bar{z}_n(a_n-c))=0; \tag{4}$$

2) если $\bar{z}_n(t)$ J-сходится на $[0, T]$ к $\bar{z}_0(t)$ и a_0 — точка разрыва $\bar{z}_0(t)$, то для того чтобы одновременно были выполнены (1) и (3), необходимо, чтобы

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n-0), \bar{z}_n(a_n))>0. \tag{5}$$

Замечание 1. Если $\bar{z}_n(t)$ — последовательность функций из более общих пространств E или F и $\bar{z}_n(t)$ ρ_F-сходится к $\bar{z}_0(t)$ [4], причем a_0 не является точкой разрыва II рода для функции $\bar{z}_0(t)$, то условия (1) и (2) также эквивалентны (аналогично эквивалентны условия (3) и (4)).

Доказательство. Из определения M_2-топологии [5] нетрудно получить, что если $\bar{z}_n(t)$ M_2-сходится к $\bar{z}_0(t)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\bar{z}_n(a_n), \bar{z}_0(a_0))\leq\rho(\bar{z}_0(a_0-0), z_0(a_0)). \tag{6}$$

Учитывая то, что $\bar{z}_0(t)$ непрерывна в точке a_0 справа, и условие (2), получаем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n), \bar{z}_0(a_0))\leq\lim_{c\to+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n),$$

$$\bar{z}_n(a_n+c))+\lim_{c\to+0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho(\bar{z}_n(a_n+c), \bar{z}_0(a_0+c))+$$

$$+\lim_{c\to+0}(\bar{z}_0(a_0+c), \bar{z}_0(a_0))\leq\lim_{c\to+0}\rho(\bar{z}_0(a_0+c-0, \bar{z}_0(a_0+c))=0,$$

что доказывает достаточность условия (2) для выполнения (1).

Аналогично доказывается его необходимость.

Подобно проводится доказательство п. б).

Непосредственно из определения J-топологии [5] можно вывести следующее утверждение.

Если $\bar{z}_n(t)$ J-сходится к $\bar{z}_0(t)$ и a_0 — точка разрыва $\bar{z}_0(t)$, то существует последовательность b_n такая, что

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a_0, \quad \lim_{n\to\infty} \bar{z}_n(b_n) = \bar{z}_0(a_0),$$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{z}_n(b_n - 0) = \bar{z}_0(a_0 - 0).$$

При этом, если последовательность a_n такая, что $a_n = b_n$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \rho(\bar{z}_n(a_n - 0), \bar{z}_n(a_n)) > 0,$$

то необходимо есть номер N такой, что $a_n = b_n$ при $n > N$. Отсюда очевидно следует утверждение 2-й части леммы 1.

Воспользуемся теперь методом одного вероятностного пространства, развитого А. В. Скороходом [5]. В дальнейшем будем предполагать, что траектории рассматриваемых случайных процессов с вероятностью единица принадлежат пространству D_∞.

Теорема 1. Пусть $\bar{\xi}_n(t), t \geqslant 0$ — последовательность случайных процессов, ν_n — последовательность неотрицательных случайных величин

$$\{\bar{\xi}_n(t), \nu_n\} \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \{\bar{\xi}_0(t), \nu_0\}, \quad t \in Q, \tag{7}$$

где Q — некоторое счетное всюду плотное множество точек на $[0, \infty)$ и $P\{\nu_0 < \infty\} = 1$. Тогда:

1) если $\bar{\xi}_n(t)$ M_2-сходится к $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, \infty)$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to+0} \varlimsup_{n\to\infty} P\{\rho(\bar{\xi}_n(\nu_n), \bar{\xi}_n(\nu_n + c)) > \varepsilon\} = 0, \tag{8}$$

то

$$\bar{\xi}_n(\nu_n) \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \bar{\xi}_0(\nu_0), \tag{9}$$

а если, кроме условия (8), выполнено

$$\lim_{c\to+0} \varlimsup_{n\to\infty} P\{\rho(\bar{\xi}_n(\nu_n - 0), \bar{\xi}_n(\nu_n - c)) > \varepsilon\} = 0, \tag{10}$$

то

$$\{\bar{\xi}_n(\nu_n), \bar{\xi}_n(\nu_n - 0)\} \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \{\bar{\xi}_0(\nu_0), \bar{\xi}_0(\nu_0 - 0)\}; \tag{11}$$

2) если $\bar{\xi}_n(t)$ J-сходится к $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, \infty)$, то для того чтобы имело место (11), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (8), (10);

3) если $\bar{\xi}_n(t)$ J-сходится к $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, \infty)$ и ν_0 — с вероятностью единица точка разрыва процесса $\bar{\xi}_0(t)$, то соотношение (11) эквивалентно следующему:

$$\lim_{c\to+0} \varliminf_{n\to\infty} P\{\rho(\bar{\xi}_n(\nu_n - 0), \bar{\xi}_n(\nu_n)) > c\} = 1. \tag{12}$$

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и выберем T так, что $p\{\nu_0 \geqslant T\} < \varepsilon$ и T — точка стохастической непрерывности $\bar{\xi}_0(t)$. Положим $\nu_n^T = \nu_n$, если $\nu_n < T$, и $\nu_n^T = T$, если $\nu_n \geqslant T$,

$$\rho_{n,c}^T = \rho(\bar{\xi}_n(\nu_n^T), \bar{\xi}_n(\nu_n^T + c)).$$

Пусть выполнено (8). Из результатов [5] следует, что можно построить последовательности случайных процессов $\bar{\xi}_n(t, \omega)$, $t \in [0, T]$ и случайных величин $\tilde{\nu}_n(\omega)$, $\tilde{\rho}_{n,c}^T(\omega)$, которые заданы на одном вероятностном пространстве с мерой $P(du)$ и совместные распределения которых совпадают с соответствующими распределениями величин $\bar{\xi}_n(t)$, ν_n, $\rho_{n,c}^T$. При этом можно выбрать последовательности n_k и c_m такие, что с вероятностью единица $\bar{\xi}_{n_k}(t, \omega)$ M_2-сходится к $\bar{\xi}_0(t, \omega)$ на $[0, T]$, $\lim\limits_{n_k \to \infty} \tilde{\nu}_{n_k}(\omega) = \tilde{\nu}_0(\omega)$ и $P\{A\} = 1$, где $A = \{\omega:$ $\lim\limits_{c_m \to 0} \overline{\lim\limits_{n_k \to \infty}} \tilde{\rho}_{n_k,c}^T(\omega) = 0\}$.

Положим $K_T = \{\omega : \tilde{\nu}_0(\omega) < T\}$. Заметим, что в соотношениях (2), (4) достаточно брать предел по произвольной последовательности $c_m \to 0$. Тогда из результатов 1-й части леммы и построения ν_n^T и $\rho_{n,c}^T$ вытекает, что событие $A \cap K_T$ влечет событие

$$B = \{\omega : \lim_{n \to \infty} \bar{\xi}_n(\nu_n(\omega), \omega) = \bar{\xi}_0(\nu_0(\omega), \omega)\}.$$

Отсюда в силу выбора T $P\{B\} \geqslant P\{A \cap K_T\} = P\{K_T\} \geqslant 1 - \varepsilon$. Поскольку из любой последовательности n можно выбрать указанную подпоследовательность n_k, то это доказывает достаточность (8).

Аналогично доказывается достаточность во 2-й и 3-й частях теоремы.

Необходимость условия (12) вытекает из того, что в силу (11)

$$\lim_{n \to \infty} P\{\rho_n \geqslant c\} \geqslant P\{\rho_0 > c\} \underset{c \to +0}{\longrightarrow} 1,$$

где $\rho_n = \rho(\bar{\xi}_n(\nu_n), \bar{\xi}_n(\nu_n - 0))$, $n = 0, 1, \ldots$, так как ν_0 — с вероятностью 1 точка разрыва $\bar{\xi}_0(t)$.

Докажем необходимость условий (8) и (10). Воспользуемся снова методом одного вероятностного пространства. Пусть $\bar{\xi}_n(t, \omega)$ и $\tilde{\nu}_n(\omega)$ — построенные на одном вероятностном пространстве случайные функции, n_k — произвольная подпоследовательность. Тогда аналогично выбираем из n_k подпоследовательность (пусть это сама n_k), для которой $\tilde{\xi}_{n_k}(t, \omega) \xrightarrow{J} \tilde{\xi}_0(t, \omega)$ и $\tilde{\nu}_{n_k}(\omega) \to \tilde{\nu}_0(\omega)$ с вероятностью единица.

Обозначим $K=\{\omega:\tilde{\nu}_0(\omega)$ — точка разрыва $\tilde{\xi}_0(t,\omega)\}$.
Рассмотрим 2 случая.

1. $\omega\bar{\in}K$. Так как $\tilde{\nu}_0(\omega)$ — точка непрерывности, то из (6) очевидно следует, что $\lim\limits_{c\to+0}\overline{\lim\limits_{n_k\to\infty}}\tilde{\rho}_{n_k,c}(\omega)=0$, где $\tilde{\rho}_{n,c}(\omega)=\rho(\tilde{\xi}_n(\nu_n(\omega),\omega),\tilde{\xi}_n(\nu_n(\omega)+c,\omega))$.

2. $\omega\in K$. Обозначим $L=\{\omega:\overline{\lim\limits_{n_k\to\infty}}\tilde{\rho}_{n_k}(\omega)>0\}$, где $\tilde{\rho}_n(\omega)=\rho(\tilde{\xi}_n(\tilde{\nu}_n(\omega)-0,\omega),\tilde{\xi}_n(\tilde{\nu}_n(\omega),\omega))$.

Очевидно $L\subset K$, так как из $\omega\bar{\in}K$ следует

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}_{n_k}(\omega)=0.$$

Но поскольку

$$P\{L\}=1-P\{\overline{\lim_{n_k\to\infty}}\tilde{\rho}_{n_k}=0\}\geqslant 1-\overline{\lim_{n_k\to\infty}}P\{\tilde{\rho}_{n_k}<\varepsilon\}\geqslant 1-$$

$$-P\{\tilde{\rho}_0\leqslant\varepsilon\}=P\{\tilde{\rho}_0>\varepsilon\}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}P\{K\},$$

то отсюда вытекает, что $P\{L\}=P\{K\}$.

Далее, из 2-й части леммы 1 следует, что если $\omega\in L$, то

$$\lim_{n_k\to\infty}\tilde{\xi}_n(\tilde{\nu}_n(\omega),\omega)=\tilde{\xi}_0(\tilde{\nu}_0(\omega),\omega),$$

откуда, пользуясь (2), получим

$$\lim_{c\to+0}\overline{\lim_{n_k\to\infty}}\tilde{\rho}_{n_k,c}(\omega)=0.$$

Так как n_k — произвольная подпоследовательность и распределение $\tilde{\rho}_{n_k,c}$ совпадает с $\rho(\bar{\xi}_n(\nu_n),\bar{\xi}_n(\nu_n+c))$, то очевидно следует (8). Аналогично доказывается необходимость (10). Теорема доказана.

Замечание 2. Если последовательность $\bar{\xi}_n(t)$ M_2-сходится, то условия (8) и (10) не являются необходимыми для выполнения (11), то есть необходимые условия в теореме 1 [1] указаны неточно и их следует формулировать так, как приведено выше.

Из первой части теоремы 1 как следствие нетрудно получить следующую теорему.

Теорема 2. Пусть ν_n — случайный момент, не зависящий от последующих приращений процесса $\bar{\xi}_n(t)$, т. е. событие $\{\nu_n<t\}$ не зависит от σ-алгебры, порожденной величинами $\bar{\xi}_n(u)-\bar{\xi}_n(s)$, $u>$

$> s \geqslant t$; выполнено (7), $\bar{\xi}_n(t)$ M_2-сходится к $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, \infty)$. Тогда для выполнения (9) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$, $m=1,2,\ldots$

$$\lim_{c\to+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{t\in A_m} P\{\rho(\bar{\xi}_n(t+c), \bar{\xi}_n(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

где $A_m \subset [0, \infty)$ — последовательность множеств таких, что

$$\lim_{m\to\infty} \underline{\lim_{n\to\infty}} P\{\nu_n \in A_m\} = 1.$$

Замечание 3. Если $\bar{\xi}_n(t)$ — процесс с независимыми приращениями, а ν_n — марковский момент для $\bar{\xi}_n(t)$, то ν_n не зависит от последующих приращений $\bar{\xi}_n(t)$.

Известно, что из J-сходимости следует M_2-сходимость. Поэтому если воспользоваться условиями J-сходимости для марковских процессов [6] (стр. 508) и теоремой 1, то, как нетрудно показать, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\bar{\xi}_n(t)$, $t \geqslant 0$ — последовательность марковских процессов с переходной вероятностью $P_n(t, a, u, A)$, $0 \leq t \leq u$, $\bar{a} \in R^r$, $A \subset R^r$, а ν_n — марковский момент для $\bar{\xi}_n(t)$. Если выполнено (7), то для того чтобы имело место (8), достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$, $m = 1, 2, \ldots, L > 0$

$$\lim_{c\to+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{t\in A_m, \|a\|<L, 0<u<c} P_n(t, \bar{a}, t+u, \bar{V}_\varepsilon(a)) = 0,$$

где множества A_m определялись в теореме 2; $a\bar{V}_\varepsilon(\bar{a}) = \{\bar{b} : \rho(\bar{a}, \bar{b}) \geqslant \varepsilon\}$.

2. Рассмотрим ситуацию, когда момент ν_n является некоторым функционалом, заданным на траекториях $\bar{\xi}_n(t)$. В дальнейшем через S будем обозначать одну из топологий U, J, J_2, M_1, M_2 [5]. Через $\bar{z}^T(\cdot)$ обозначим отрезок траектории $\bar{z}(t)$ для $t \in [0, T]$.

Определение. Функционал $\nu(\bar{z}(\cdot))$ будем называть s-непрерывным относительно последовательности $B_{T_k} \subset D_{T_k}$ ($T_k \to \infty$ при $k \to \infty$), если:

1) $\nu(\bar{z}(\cdot))$ F_∞-измерим, где F_∞ — минимальная σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами пространства D_∞;

2) $\nu(\bar{z}_1(\cdot)) = \nu(\bar{z}_2(\cdot))$, если $\bar{z}_1^{T_k}(\cdot) \in B_{T_k}$, и $\bar{z}_1(t) = \bar{z}_2(t)$, $t \in [0, T_k]$;

3) $\nu(\bar{z}(\cdot))$ s-непрерывен на B_{T_k} для каждого $k \geqslant 1$.

Обозначим $\nu_n = \nu(\bar{\xi}_n(\cdot))$, $n \geqslant 0$.

Теорема 4. Пусть $\nu(z(\cdot))$ — функционал, s-непрерывный относительно последовательности B_{T_k}, а $\bar{\xi}_n(t)$, $t \geqslant 0$ — последовательность случайных процессов, s-сходящихся к процессу $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, T_k]$ для каждого $k \geqslant 1$, причем и

$$P\{\nu(\xi_0(\cdot))<\infty\}=1$$

$$\lim_{k\to\infty} P\{\xi_0^{T_k}(\cdot)\in B_{T_k}\}=1.$$

Тогда:

1) если s — M_2-топология, то для выполнения соотношения (9) (либо (11)) достаточно, чтобы выполнялось условие (8) (либо (10));

2) если s — J-топология, а ν_0 — с вероятностью единица точка разрыва $\xi_0(t)$, то из условия (12) вытекает (11).

Доказательство. При исходных предположениях на функционал $\nu(\bar z(\cdot))$ и процессы $\bar\xi_n(t), n\geqslant 0$, $\nu(\bar\xi_n(\cdot))$ — случайная величина, и методом одного вероятностного пространства можно доказать, что

$$\{\bar\xi_n(t), \nu(\bar\xi_n(\cdot))\}\overset{\text{сл.}}{\Rightarrow}\{\bar\xi_0(t), \nu(\bar\xi_0(\cdot))\},\ t\in Q,$$

где Q — счетное всюду множество на $[0, \infty)$.

После этого остается применить теорему 1.

3. Рассмотрим некоторые конкретные типы функционалов (для момента достижения уровня некоторые результаты получены в работах [1, 3, 5, 7—11]).

Пусть $f(t, \bar a, \bar b)$ — непрерывная на $[0,\infty)\times R^r\times R^r$ функция. Положим $x(t)=f(t, \bar z(t-0), \bar z(t))$. Построим по $x(t)$ ряд моментов следующим образом:

$$\mu^{(1)}(s, x(\cdot))=\inf\{u: u\geqslant 0,\ x(u)\geqslant s\};\tag{13}$$

$$\mu^{(2)}(s, x(\cdot))=\inf\{u: u\geqslant 0,\ x(u)-x(u-0)\geqslant s\};\tag{14}$$

$$\mu^{(3)}(s, x(\cdot))=\inf\{u: u\geqslant 0, \nu_{[0,u]}^{[c,s]}(x(\cdot))\geqslant k\},\ k\geqslant 1,\ s-c\geqslant 0,\tag{15}$$

где $\nu_{[a,b]}^{[c,d]}(x(\cdot))$ — число пересечений полосы $[c, d]$ с функцией $x(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Положим

$$\varkappa^{(i)}(s, \bar z(\cdot))=\{\bar z(\mu^{(i)}(s, x(\cdot))-0, \bar z(\mu^{(i)}(s, x(\cdot)))\}=\{\varkappa_-^{(i)}(s, \bar z(\cdot)),$$
$$\varkappa_+^{(i)}(s, \bar z(\cdot))\}.\tag{16}$$

Введем на отрезке $[0, T]$ следующие семейства функций:

$B_T^1(s)$ — семейство функций $\bar z(t)$, $t\in[0, T]$ таких, что $\sup\limits_{u\in[0,T]} x(u)>s$, уровень s не является локальным максимумом для функции $x(u)$ и $\bar z(\tau-0)=\bar z(\tau)$ для таких τ, что $x(\tau-0)=s$ либо $x(\tau)=s$;

$B_T^2(s)$ — семейство функций $\bar z(t)$, $t\in[0,T]$ таких, что $\mu^{(2)}(s,x(\cdot))<T$ и $x(\tau)-x(\tau-0)\neq s$ для любого $\tau\in[0, T]$;

$B_T^3(s)$ — семейство такое, что $\mu^{(3)}(s, x(\cdot))<T$, уровни c и s не являются локальными минимумом и максимумом соответственно для

функции $x(u)$, $\bar z(\tau-0)=\bar z(\tau)$ для таких τ, для которых выполнено одно из равенств $x(\tau-0)=c$, $x(\tau-0)=s$, $x(\tau)=c$, $x(\tau)=s$.

Используя результаты леммы 1, несложно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Функционалы $\mu^{(i)}(s, x(\cdot))$ и $\varkappa^{(i)}(s, \bar z(\cdot))$ на соответствующем множестве функций $B_T^{(i)}(s)$, $i=1, 2, 3$. являются J-непрерывными.

Теорема 5. Пусть $\bar\xi_n(t)$, $t\geqslant 0$ —последовательность случайных процессов, J-сходящихся на $[0,\infty)$ к процессу $\bar\xi_0(t)$, $t\geqslant 0$. Тогда если для некоторого i $(i=1, 2, 3)$

$$\lim_{T\to\infty} P\{\bar\xi_0^T(\cdot)\in B_T^{(i)}(s)\}=1,\ s\in Q, \tag{17}$$

где Q — некоторое множество точек, то

$$\varkappa^{(i)}(s, \bar\xi_n(\cdot)) \overset{\text{сл.}}{\Rightarrow} \varkappa^{(i)}(s, \bar\xi_0(\cdot)),\ s\in Q.$$

Замечание 4. Условие (17) выполняется во всех точках стохастической непрерывности $\varkappa^{(i)}(s, \bar\xi_0(\cdot))$ и

$$\mu^{(i)}(s, \eta_0(\cdot))\ (\eta_0(t)=f(t, \bar\xi_0(t-0), \bar\xi_0(t))).$$

Замечание 5. В лемме 2 и теореме 5 вместо функции $x(t)=$ $=f(t, \bar z(t-0), \bar z(t))$ можно брать функционал $f(t, \bar z(\cdot))$, зависящий от t как от параметра, таким образом, что если $\bar z_n(t)$ J-сходится к $\bar z_0(t)$, на $[0, T]$, то и

$$\{\bar z_n(t) f(t, \bar z_n(\cdot))\} \underset{n\to\infty}{\overset{J}{\to}} \{\bar z_0(t), f(t, \bar z_0(\cdot))\},\quad t\in[0, T].$$

Например,

$$f(t, \bar z(\cdot)) = \sup_{u\in[0,t]} f(u, \bar z(u-0)\bar z(u)),\ t\geqslant 0,$$

$$f(t, \bar z(\cdot)) = \int_0^t f(u, \bar z(u-0), \bar z(u))\,du,$$

где $f(u, \bar a, b)$ — непрерывна на $[0,\infty)\times R^r\times R^r$.

4. Рассмотрим теперь условия сходимости процессов вида $\bar\xi_n(\nu_n(s))$, и применим затем полученные результаты к изучению конкретных схем остановки (некоторые результаты опубликованы в работе [1], условия сходимости в равномерной топологии изучались в работах [3, 8], а в J-топологии в работах [3, 10, 11]).

Пусть $y(t)$, $t\in[a, A]$ — действительная функция. Обозначим $B_1(y(\cdot), [a, A])$ множество уровней постоянства функции $y(t)$ на $[a, A]$, т. е.

$$B_1(y(\cdot), [a, A])=\{q: y(t)=q,\ t\in(\alpha, \beta)$$

для некоторых $\alpha<\beta$, $\alpha, \beta \in [a, A]\}$, а $B_2(y(\cdot), [a, A])$ — множество лево- и правосторонних значений $y(t)$ в точках разрыва на $[a, A]$, т. е.

$$B_2(y(\cdot), [a, A]) = \{y(t), y(t-0) : y(t) \neq y(t-0)\}.$$

Положим

$$B(y(\cdot), [a, A]) = B_1(y(\cdot), [a, A]) \cup B_2(y(\cdot), [a, A]) \cup \{y(a), y(A)\}.$$

Через $C(\bar{z}(\cdot), [0, T])$ обозначим множество точек непрерывности функции $\bar{z}(t)$, $t \in [0, T]$.

Теорема 6. Пусть S — одна из топологий J, J_2, M_1, M_2, а $\bar{\xi}_n(t)$, $t \in [0, T]$, $\nu_n(s)$, $s \in [a, A]$ — последовательности случайных процессов таких, что:

1) для любого n процесс $\nu_n(s)$ монотонно не убывает с вероятностью единица и $0 \leq \nu_n(a) \leq \nu_n(A) \leq T$;

$$2) \{\bar{\xi}_n(t), \nu_n(s)\} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\Rightarrow}} \{\bar{\xi}_0(t), \nu_0(s)\}, \quad (t, s) \in Q,$$

где Q — некоторое счетное всюду плотное множество точек прямоугольника $[0, T] \times [a, A]$, включающее точки $(0, a)$ и (T, A);

3) $\bar{\xi}_n(t)$ s-сходится к $\bar{\xi}_0(t)$ на $[0, T]$;

4) $\nu_n(s)$ J-сходится к $\nu_0(s)$ на $[a, A]$;

5) $P\{B(\nu_0(\cdot), [a, A]) \subset C(\bar{\xi}_0(\cdot), [0, T])\} = 1$.

Тогда последовательность $\bar{\xi}_n(\nu_n(s))$ s-сходится к $\bar{\xi}_0(\nu_0(s))$ на $[a, A]$.

Замечание 6. Условие 5) автоматически выполняется, если $\nu_0(s)$ — с вероятностью единица непрерывный и строго монотонно возрастающий процесс (при этом отпадает также условие 4), либо если $\bar{\xi}_0(t)$ — стохастически непрерывный и его скачкообразная составляющая не зависит от $\nu_0(t)$. (Под этим понимается, что для любого $\varepsilon > 0$ моменты скачков, больших по норме ε, и значения процесса в эти моменты не зависят от $\nu_0(t)$). В частности, если $\bar{\xi}_0(t)$ непрерывен с вероятностью единица, то из условий 1 — 4 вытекает, что $\bar{\xi}_n(\nu_n(s))$ J-сходится к $\bar{\xi}_0(\nu_0(s))$.

Замечание 7. Если не требовать условия 4, то в условиях теоремы 6 имеет место лишь слабая сходимость конечномерных распределений $\bar{\xi}_n(\nu_n(s))$ к $\bar{\xi}_0(\nu_0(s))$ во всех точках отрезка $[a, A]$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества. Можно привести простые примеры, в которых $\bar{\xi}_n(t)$ U-сходится к $\bar{\xi}_n(t)$, и тем не менее $\bar{\xi}_n(\nu_n(s))$ не сходится к $\bar{\xi}_0(\nu_0(s))$ даже в самой слабой топологии M_2.

Доказательство. Предположим, что у нас есть последовательности неслучайных функций $\bar{z}_n(t)$ и $x_n(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы (условие 5 примет вид $B(x_0(\cdot), [a, A]) \subset C(\bar{z}_0(\cdot), [0, T])$). Из леммы 1 и условий 3, 4 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{z}_n(x_n(t)) = \bar{z}_0(x_0(t))$ для всех t таких, что $x_0(t)$ — точка непрерывности $\bar{z}_0(u)$.

Однако из условия 5 очевидно вытекает, что множество тех q, для которых $x_0(q)$ — точка разрыва $\bar{z}_0(u)$, не более чем счетно. Отсюда следует сходимость $\bar{z}_n(x_n(t))$ к $\bar{z}_0(x_0(t))$ почти во всех точках $[a, A]$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества.

Оценим модуль непрерывности. Используя лемму 1, [6] (стр. 499) и соотношение (6), нетрудно доказать следующее утверждение.

Если функции $\bar{z}_n(t)$ и $x_n(s)$ удовлетворяют условиям 1—4 и при этом скачки функции $\bar{z}_0(t)$ на интервале $[0, T]$ не превосходят ε, а скачки $x_0(t)$ на $[a, A]$ не превосходят σ, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta_s(c, \bar{z}_n(x_n(\cdot)), [a, A]) \leq 3\varepsilon + 6\Delta_J(\omega_{c,\sigma}\bar{z}_0(\cdot)[0, T]), \qquad (18)$$

где $\omega_{c,\sigma} = \sigma + 2\Delta_J(c, x_0(\cdot), [a, A])$, а $\Delta_s(c, \bar{z}(\cdot), B)$ — модуль непрерывности функции $z(t)$ на множестве B в топологии S.

Обозначим через Q_1 множество точек, в которых скачки $x_0(s)$ больше ε ($Q_1 \subset [a, A]$), Q'_2 — множество точек, в которых скачки $\bar{z}_0(t)$ больше ε ($Q'_2 \subset [0, T]$). Положим $Q_2 = \{t_k : x_0(t_k) = s_k, s_k \in Q_2^1\}$. В силу условий теоремы Q_1 и Q_2 — конечные множества и $Q_1 \cup Q_2 = \varnothing$. Пусть $V_j(t)$ — γ-окрестность точки t. Обозначим $Q_1^{\gamma_1} = \bigcup\limits_{t\in Q_1} V_{\gamma_1}(t)$, $Q_2^{\gamma_2} = \bigcup\limits_{t\in Q_2} V_{\gamma_2}(t)$.

Тогда из (18) следует, что на множестве $B[a, A] \setminus (Q_1^{\gamma_1} \cup \cup Q_2^{\gamma_2}\Delta_s(c, \bar{z}_n(x_n(\cdot)), B)$ при достаточно больших n выбором c и ε может быть сделан сколько угодно малым.

Так как точки множества Q_2 являются точками непрерывности $x_0(t)$ и не являются точками ее постоянства, то из определения модуля непрерывности в различных топологиях [4] можно доказать, что при достаточно малом c и соответствующем выборе $\gamma_1 = \gamma_1(c)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta_s(c, \bar{z}_n(x_n(\cdot)), Q_1^{\gamma_1}) < \varepsilon.$$

Далее, так как точки $x_0(s-0), x_0(s), s \in Q_1$ есть точки непрерывности $\bar{z}_0(t)$, то можно даже доказать, что при малом c и соответствующем выборе $\gamma_2 = \gamma_2(c)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta_j(c, \bar{z}_n(x_n(\cdot)), Q_2^{\gamma_2}) < \varepsilon,$$

откуда окончательно следует, что при достаточно малом c

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta_s(c, \bar{z}_n(x_n(\cdot)), [a, A]) < \varepsilon,$$

что доказывает утверждение теоремы для неслучайных функций.

Применяя теперь метод одного вероятностного пространства, нетрудно перенести полученные результаты на случайные процессы. Теорема доказана.

Используя результаты теорем 5 и 6, можно выяснить достаточные условия сходимости функций $\varkappa^{(i)}(s, \overline{z}(\cdot))$ (см. (16)) как процессов по s в топологии J.

Теорема 7. Пусть $\overline{\xi}_n(t)$, $t \geqslant 0$ — последовательность случайных процессов, J-сходящаяся на $[0, \infty)$ к процессу $\overline{\xi}_0(t)$, $t \geqslant 0$, а момент $\mu^{(i)}(s, \eta_0(\cdot))$ $(i = 1, 2)$ определяется в (13), (14), где $\eta_0(t) = f(t, \overline{\xi}_0(t-0), \overline{\xi}_0(t))$.

Тогда, если для соответствующего i $(i = 1, 2)$ выполнены условия:

$$1)\ P\{\eta_0(s_1)\} = \eta_0(s_2),\ \eta_0(s) \leq \eta_0(s_2),\ s \leq s_2 \text{ для некоторых } s_1 < s_2\} = 0;$$

для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{\overline{\xi}_0(s-0) \neq \overline{\xi}_0(s),\ \eta_0(u) \leq \eta_0(s),\ 0 \leq u \leq s + \varepsilon \text{ для некоторого } s > 0\} = 0;$$

$$2)\ P\{\eta_0(s_1) - \eta_0(s_1 - 0) = \eta_0(s_2) - \eta_0(s_2 - 0) \text{ для некоторых } s_1 < s_2\} = 0;$$

то последовательности процессов $\varkappa_{\pm}^{(i)}(s, \xi_m(\cdot))$ J-сходятся на $(0, A_i)$ к процессам $\varkappa_{\pm}^{(i)}(s, \overline{\xi}_0(\cdot))$, где

$$A_i = \sup\{s : P\{\mu^{(i)}(s, \eta_0(\cdot)) < \infty\} = 1\}.$$

Аналогично можно сформулировать условия, достаточные для сходимости $\varkappa_{\pm}^{(3)}(s, \overline{\xi}_n(\cdot))$ в J-топологии.

Замечание 8. Условия 1), 2) выполняются, если $\eta_0(s)$ строго монотонно возрастает с вероятностью единица.

5. Исследуем условия сходимости процессов ступенчатых сумм случайных величин, управляемых процессом с конечным множеством состояний. Общая схема изучена автором в работах [10, 13]. Аналогичные условия J-сходимости приведены в работе [3]. Схема суммирования на счетном процессе рассмотрена автором в статье [14].

Рассмотрим предварительно условия J-сходимости векторных процессов.

Теорема 8. Пусть есть совокупность случайных процессов $\{\overline{\xi}_n^{(i)}(t),\ i = \overline{1, r}\}$, $t \geqslant 0$ $(r < \infty)$ таких, что:

1) $\{\overline{\xi}_n^{(i)}(t),\ i = \overline{1, r}\} \underset{n \to \infty}{\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}} \{\overline{\xi}_0^{(i)}(t),\ i = \overline{1, r}\}$, $t \in Q$, где Q — некоторое счетное всюду плотное множество точек отрезка $[0, T)$, включающее точки $0, T$;

2) для любого $i = \overline{1, r}$ процесс $\overline{\xi}_n^{(i)}(t)$ J-сходится к $\xi_0^{(i)}(t)$ на $[0, T]$;

3) $P\{\overline{\xi}_0^{(i)}(t-0) \neq \overline{\xi}_0^{(i)}(t),\ \overline{\xi}_0^{(j)}(t-0) \neq \overline{\xi}_0^{(j)}(t)$ для некоторых $i \neq j$, $t > 0\} = 0$.

Тогда процесс $\{\overline{\xi}_n^{(i)}(t),\ i = \overline{1, r}\}$ J-сходится на $[0, T]$ к $\{\overline{\xi}_0^{(i)}(t),\ i = \overline{1, r}\}$.

Следствие. Пусть $\varphi(t, u_1, \ldots, u_r)$ — непрерывная в $[0, \infty) \times R^m \times \ldots \times R^{m_r}$ функция, а $\xi_0^{(i)}(t) \in R^{m_i}$. Тогда в условиях 1—3 теоремы 8 процесс $\varphi(t, \bar{\xi}_n^{(1)}(t), \ldots, \bar{\xi}_n^{(r)}(t))$ J-сходится на $[0, T]$ к процессу $\varphi(t, \bar{\xi}_0^{(1)}(t), \ldots, \bar{\xi}_0^{(r)}(t))$.

Доказательство проводится для неслучайных функций $\bar{z}_n^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, r}$ методом от противного. Действительно, из определения J-сходимости (см. (5)) нетрудно получить, что если $\lim\limits_{c \to +0} \lim\limits_{n \to \infty} \Delta_J(c, t_n, \bar{z}_n, \bar{z}_n(\cdot)) > 0$, где $\Delta_J(c, t, \bar{z}_n(\cdot)) = \sup\limits_{t-c < t_1 < t_2 < t+c} \min\{\rho(\bar{z}_n(t_1), \bar{z}_n(t)), \rho(\bar{z}_n(t), \bar{z}_n(t_2))\}$, а $\bar{z}_n(t) = \{\bar{z}_n^{(i)}(t), i = \overline{1, r}\}$ и $t_n \to t_0$, то в силу J-сходимости каждой компоненты $\bar{z}_n^{(i)}(t), t_0$ — необходимая точка разрыва по крайней мере двух компонент вектора $\bar{z}_0(t) = \{\bar{z}_0^{(i)}(t), i = \overline{1, r}\}$, что противоречит условию 3), которое для неслучайных функций означает, что $\bar{z}_0(t)$ не имеет скачков одновременно у двух и более компонент. Далее можно воспользоваться методом одного вероятностного пространства.

Утверждение следствия вытекает из замечания 6.

Рассмотрим теперь следующую схему. Пусть $\varkappa_n(k)$, $k \geqslant 0$ — случайный процесс с дискретным временем и конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, r\}$, $\{\rho_n(i, l), i = \overline{1, r}, l \geqslant 1\}$ — семейство случайных векторов. Обозначим $\nu_n^{(i)}(k) = \sum\limits_{l=0}^{k-1} \delta_i(\varkappa_n(l))$, $k \geqslant 0$*), где $\delta_i(j) = 0$, если $i \neq j$, и 1, если $i = j$ (т. е. $\nu_n^{(i)}(k)$ — количество попаданий $\varkappa_n(l)$ в состоянии i за k шагов). Положим

$$\bar{\rho}_n(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{\nu_n^{(i)}(k)} \bar{\rho}_n(i, l) \tag{19}$$

и рассмотрим ступенчатый процесс $\bar{\rho}_n([nt])$, $t \geqslant 0$. Через S вновь будем обозначать одну из топологий U, J, J_2, M_1, M_2.

Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:

1) конечномерные распределения векторнозначного процесса $\left\{\frac{1}{n} \nu_n^{(i)}([nt]), \sum\limits_{l=1}^{[n,t]} \bar{\rho}_n(i, l), i = \overline{1, r}\right\}$, $t \geqslant 0$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса $\{\nu_0^{(i)}(t), \bar{\rho}_0^{(i)}(t), i = \overline{1, r}\}$, $t \geqslant 0$ на некотором счетном всюду плотном множестве значений t из интервала $[0, \infty)$;

---

*) $\sum\limits_{m}^{l} = 0$, $l < m$.

2) для любого i процесс $\sum_{l=1}^{[nt]} \bar{\rho}_n(i, l)$ s-сходится на $[0, \infty]$ к процессу $\bar{\rho}_0^{(i)}(t)$;

3) для любого i и любых $t_1 < t_2$

$$P\{\nu_0^{(i)}(t_1) = \nu_0^{(i)}(t_2),\ \bar{\rho}_0^{(i)}(\nu_0^{(i)}(t_1) - 0) \neq \bar{\rho}_0^{(i)}(\nu_0^{(i)}(t_1))\} = 0.$$

Тогда конечномерные распределения процесса $\bar{\rho}_n([nt])$ слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса

$$\bar{\rho}_0(t) = \sum_{i=1}^{r} \bar{\rho}_0^{(i)}(\nu_0^{(i)}(t)) \tag{20}$$

во всех точках стохастической непрерывности $\bar{\rho}_0(t)$, $t \geqslant 0$.

Если дополнительно выполняется условие:

4) с вероятностью единица компоненты вектора $\{\bar{\rho}_0^{(i)}(\nu_0^{(i)}(t)),\ i = \overline{1, r}\}$ при разных i не имеют одновременных скачков, то процесс $\bar{\rho}_n([nt])$ s-сходится на $[0, \infty)$ к процессу $\bar{\rho}_0(t)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что по построению процессы $\nu_0^{(i)}(t)$ монотонны и непрерывны с вероятностью единица. Поэтому $n^{-1}\nu_0^{(i)}([nt])$ U-сходится на $[0, \infty)$ к $\nu_0^{(i)}(t)$. Из теоремы 6 следует, что для каждого i процесс $\sum_{l=1}^{\nu_n^{(i)}([nt])} \bar{\rho}_n(i, l)$ s-сходится на $[0, \infty)$ к $\bar{\rho}_0^{(i)}(\nu_0^{(i)}(t))$. Отсюда вытекает 1-я часть теоремы. Применяя теперь условие 4 и теорему 8, получаем окончательное утверждение теоремы.

Предположим, что векторы $\bar{\rho}_n(i, l)$ имеют вид $\bar{\rho}_n(i, l) = \{\bar{\gamma}_n(i, l),\ \tau_n(i, l),\ \chi_n(i, l)\}$, где $\chi_n(i, l)$ — случайные величины, которые могут принимать только два значения 0 или 1, а $\tau_n(i, l) \in R^1$. В этом случае величины $\bar{\rho}_n(k)$ и процессы $\bar{\rho}_0^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, r}$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} \bar{\rho}_n(k) = \{\bar{\gamma}_n(k),\ \tau_n(k),\ \chi_n(k)\},\quad k \geqslant 0, \\ \bar{\rho}_0^{(i)}(t) = \{\bar{\gamma}_0^{(i)}(t),\ \tau_0^{(i)}(t),\ \chi_0^{(i)}(t)\},\quad t \geqslant 0,\ i = \overline{1, r}. \end{gathered} \tag{21}$$

Введем следующие величины:

$$\mu_n(s) = \min\{k : k > 0,\ \tau_n(k+1) \geqslant s\},\quad s \geqslant 0; \tag{22}$$

$$\tilde{\nu}_n(m) = \min(k : k \geqslant 0,\ \chi_n(k+1) \geqslant m\},\quad m = 1, 2, \ldots; \tag{23}$$

$$\nu_n(s, m) = \min\{\mu_n(s),\ \tilde{\nu}_n(m)\}; \tag{24}$$

$$\bar{\zeta}_n(s, m) = \{\bar{\gamma}_n(\nu_n(s, m)),\ \bar{\gamma}_n(\nu_n(s, m) + 1)\} = \{\zeta_n^-(s, m),\ \zeta_n^+(s, m)\}. \tag{25}$$

Согласно (20) и (21), процесс $\bar{\rho}_0(t)$ также имеет вид

$$\bar{\rho}_0(t)=\{\bar{\gamma}_0(t),\ \tau_0(t),\ \chi_0(t)\},\ t\geqslant 0.$$

Положим

$$\mu_0(s)=\inf\{u:u\geqslant 0,\ \tau_0(u)\geqslant s\},\ s\geqslant 0;\tag{26}$$

$$\tilde{\nu}_0(m)=\inf\{u:u\geqslant 0,\ \chi_0(u)\geqslant m\},\ m=1,2,\ldots;\tag{27}$$

$$\nu_0(s,m)=\min\{\mu_0(s),\ \tilde{\nu}_0(m)\};\tag{28}$$

$$\bar{\zeta}_0(s,m)=\{\bar{\gamma}_0\,\nu_0(s,m)-0),\ \bar{\gamma}_0(\nu_0(s,m))\}=\{\bar{\zeta}_0^-(s,m),\ \bar{\zeta}^+(s,m)\}.\tag{29}$$

Теорема 10. Пусть выполнены условия 1—4 теоремы 9, где S J-топология. Тогда

$$\bar{\zeta}_n(s,m)\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}\bar{\zeta}_0(s,m),\ s\in Q_m,\quad m=1,2,\ldots,\tag{30}$$

где $Q_m\subset[0,A_m)$ — множество точек стохастической непрерывности $\bar{\xi}_0(s,m)$ и $\mu_0(s)$ как процессов по S, а $A_m=\sup\{s:P\{\nu_0(s,m)<<\infty\}=1$.

Доказательство. В условиях теоремы вектор-процесс $\bar{\rho}_n[nt]$ J-сходится на $[0,\infty]$ к $\bar{\rho}_0(t)$ и справедливость теоремы следует из 5.

В качестве приложения рассмотрим схему однородного суммирования на эргодическом случайном процессе.

Пусть $T_1=\{\bar{\rho}_n(i,l),\ i=\overline{1,r},\ l\geqslant 1\}$ и $T_2=\{\chi_n(i,l),\ l\geqslant 1\}$ — независимые семейства независимых в совокупности случайных величин, распределения которых не зависят от индекса $l\geqslant 1$, где $\bar{\rho}_n(i,l)=\{\bar{\gamma}_n(i,l),\ \tau_n(i,l)\}$. Положим

$$\bar{\rho}_n(k)=\{\bar{\gamma}_n(k),\ \tau_n(k)\}=\sum_{l=1}^{k}\bar{\rho}_n(\varkappa_n(l),l),$$

$$\chi_n(k)=\sum_{l=1}^{k}\chi_n(\varkappa_n(l),l)\quad k\geqslant 1$$

и построим величины $\bar{\zeta}_n(t,m)$ согласно выражениям (22)—(25).

Теорема 11. Пусть:

1) $n^{-1}\nu_n^{(k)}([ns])\overset{P}{\rightarrow}c_k s,\ k=\overline{1,r};$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(M\exp\{i(\bar{\lambda},\bar{\rho}_n(k,1))\}-1)=A_k(\bar{\lambda})\quad(0\leq|A_k(\bar{\lambda})|<\infty)$, $k=\overline{1,r};$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}nP\{\chi_n(k,1)=1\}=q_k,\ 0\leq q_k<\infty,\ k=\overline{1,r}$, а $\bar{\rho}_0^{(k)}(t)=$

$=\{\bar{\gamma}_0^{(k)}(t),\ \tau_0^{(k)}(t)\}$ — однородный процесс с независимыми приращениями, такой, что

$$M\exp\{i(\bar{\lambda},\ \bar{\rho}_0^{(k)}(t))\}=\exp\{A_k(\bar{\lambda})\,t\}.$$

Положим $\bar{\rho}_0(t)=\sum_{k=1}^{r}\bar{\rho}_0^{(k)}(c_k t)=\{\bar{\gamma}_0(t),\ \tau_0(t)\}$. Тогда, если $\sup_{t\in[0,T]}\tau^0(t)\to\to\infty$, при $T\to\infty$ то имеет место (30), где $A_m=\infty$, $m=1,2,\ldots$.

Величины $\mu_0(s)$, $\nu_0(s,m)$ и $\bar{\zeta}_0(s,m)$ определяются в (26), (28), (29), а $\tilde{\nu}_0(m)=\sum_{k=1}^{m}\eta^{(k)}$, где $\eta^{(k)}$ — независимые одинаково распределенные по показательному закону величины с параметром $q=\sum_{i=1}^{r}c_i q_i$.

Если дополнительно процессы $\tau_0^{(k)}(t)$, $k=\overline{1,m}$ строго монотонно возрастают, то процессы $\bar{\zeta}_n^{\pm}(s,m)$ сходятся в J-топологии к процессам $\bar{\zeta}_0^{\pm}(s,m)$ на $[0,\infty)$.

Замечание 9. В описанную схему естественно вкладывается схема суммирования случайных величин на полумарковском процессе до момента первого выхода из подмножества и полученные результаты обобщают ряд результатов, полученных в работах [15, 16].

Из теоремы 11 как следствие нетрудно получить многомерное предельное распределение вектора времен пребываний в состояниях полумарковского процесса.

Пусть $\varkappa_n(t)$, $t\geqslant 0$ — однородный полумарковский процесс с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,r\}$, для каждого $i=\overline{1,r}$ $\tau_n(i,k)$, $k\geqslant 0$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин, показывающих время пребывания в состоянии i при k-м попадании в него, а P_n — матрица вероятностей переходов соответствующей $\varkappa_n(t)$ вложенной цепи Маркова.

Пусть $\nu_n(t)$ — количество скачков $\varkappa_n(u)$ на промежутке $[0,t]$, т. е

$$\nu_n(t)=\max\left\{k:\sum_{l=1}^{k}\tau_n(\varkappa_n(l),\ l)\le t\right\},$$

$\nu_n^{(i)}(t)$ — количество попаданий $\varkappa_n(u)$ в состояние i, $i=\overline{1,r}$.

Положим

$$\Omega_n^{(i)}(t)=\sum_{k=1}^{\nu_n^{(i)}(t)}\tau_n(i,k),\quad i=\overline{1,r},$$

$$\omega_n(t)=t-\sum_{i=1}^{r}\Omega_n^{(i)}(t),$$

т. е. $\omega_n(t)$ — время недоскока до момента t.

Предположим, что выполнено следующее условие: существуют нормирующие множители $\alpha_n \to +0$ и $\beta_n \to +0$ такие, что для каждого $k=\overline{1, r}$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^{-1} (M \exp\{-\alpha_n s \tau_n(k, 1)\} - 1) = a_k(s). \tag{31}$$

Пусть $\tau_0^{(k)}(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, такой, что

$$M \exp\{-s\tau_0^{(k)}(t)\} = \exp\{a_k(s)\, t\}, \quad k=\overline{1, r}.$$

Теорема 12. Если существует $P=\lim_{n\to\infty} P_n$, причем матрице P соответствует неприводимая цепь Маркова со стационарным распределением π_k, $k=\overline{1, r}$, и выполнено (31), причем для некоторого k $a_k(s) \neq 0$, то конечномерные распределения процесса $\{\alpha_n \Omega_n^{(k)}(\alpha_n^{-1}t)$, $k=\overline{1, r}$, $\beta_n \nu_n(\alpha_n^{-1}t)$, $\alpha_n \omega_n(\alpha_n^{-1}(t)\}$ слабо сходятся почти для всех $t \geqslant 0$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества, к распределениям процесса

$$\left\{\tau_0^{(k)}(\pi_k \mu_0(t) - 0), \; k=\overline{1, r}, \; \mu_0(t), \; t - \sum_{i=1}^{r} \tau_0^{(i)}(\mu_0(t) - 0)\right\},$$

где

$$\mu_0(t) = \inf\left\{u : u \geqslant 0, \; \sum_{i=1}^{r} \tau_0^{(i)}(\pi_i u) \geqslant t\right\}.$$

Замечание 10. Если существует k такое, что $P\{\tau_0^{(k)}(1)=t\}=0$, $t>0$, то сходимость имеет место для всех $t \geqslant 0$.

Замечание 11. Результаты теоремы 12 обобщают ряд результатов, полученных в работах [15—21].

Замечание 12. Явные формулы для преобразований Лапласа характеристических функций, получаемых распределений указывались в статье [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анісімов В. В.* Про деякі граничні теореми для суперпозиції випадкових процесів. — «Доповіді АН УРСР. Сер. А», 1974, № 8.
2. *Сильвестров Д. С.* Замечания о пределе сложной случайной функции. — «Теория вероятностей и ее применение», 1972, 17, № 4.
3. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Изд-во при КГУ, 1974.
4. *Боровков А. А.* Сходимость распределений функционалов от случайных процессов. — «Успехи математических наук», 1972, 27, 1.
5. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов. — «Теория вероятностей и ее применение», 1956, 1, № 3.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971.

7. *Гихман И. И.; Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

8. *Боровков А. А.* О сходимости слабозависимых процессов к винеровскому.— «Теория вероятностей и ее применение», 1967, 12, 2.

9. *Анисимов В. В. J*-непрерывность некоторых классов функционалов и предельные теоремы для случайно остановленных процессов. — Тезисы докладов всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. ИМ АН УССР, 1973.

10. *Анисимов В. В., Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления. — Тезисы докладов международной конференции по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1973.

11. *Анисимов В. В.* О некоторых предельных теоремах для случайно остановленных процессов. — «Теория вероятностей и ее применение», 1974, 19, № 2.

12. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Автореф. докт. дис. КГУ, 1972.

13. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для управляемых сумм случайных величин. — Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по статистике случайных процессов. ИМ АН УССР, 1973.

14. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для ступенчатых процессов, заданных на случайном процессе со счетным множеством состояний. — «Теория случайных процессов», 1976, вып. 4.

15. *Анисимов В. В.* Предельные теоремы для сумм случайных величин на цепи Маркова, связанные с выходом их множества, образующего в пределе один класс. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1971, вып. 4.

16. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для полумарковских схем суммирования. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1971, вып. 4.

17. *Волконский В. А.* Многомерная предельная теорема для однородных цепей Маркова со счетным множеством состояний. — «Теория вероятностей и ее применение», 1975, 2, 2.

18. *Призва Г. Й.* Про одну граничну теорему для напівмарковських процесів. — «Доповіді АН УРСР», 1968, № 8.

19. *Анисимов В. В.* Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1970, вып. 3.

20. *Kesten H.* Occupation times for Markov and semi-Markov chains. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1962, 103, 1.

21. *Keilson I.* Wishart. A central limit theorem for processes, defined on a finite Markov chain. — «Pros. Camb. Phil. Soc.», 1964, 60, N 3.

22. *Анисимов В. В.* Об остановке случайного процесса в момент достижения некоторого уровня. — «ДАН СССР», 1973, 212, № 5.

V. V. Anisimov

LIMIT THEOREMS FOR SUPERPOSITION OF RANDOM PROCESSES

Let $\xi_n(t)$, $n \geqslant 0$ be a sequence of random processes which have no discontinuities of the second kind and are continuous from the right with probability 1 and ν_n be a sequence of random variables. The article deals with the investigation of necessary and sufficient conditions under which the distribution of the vector $\{\xi_n(\nu_n - 0), \xi_n(\nu_n)\}$ weakly converges to the distribution of the vector $\{\xi_0(\nu_0 - 0), \xi_0(\vartheta_0)\}$ when $n \to \infty$ (it is not supposed that ν_0 is the point of continuity of the process $\xi_0(t)$).

Поступила в редколлегию 7.X 1975.