А. Д. БОРИСЕНКО, студ. (*Киевский университет*)

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [1] изучалось поведение ограниченного решения $V_T(u, x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial u} V_T(u, x) + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(u, x, T) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} V_T(u, x) + \tag{1}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} b_i(u, x, T) \frac{\partial}{\partial x_i} V_T(u, x) + c(u, x, T) V_T(u, x) = -d(u, x, T)$$

в области $\{(u, x) : x \in R_N,\ u \in (0, t)\}$, удовлетворяющего условию

$$\lim_{u \uparrow t} V_T(u, x) = \Phi(x), \tag{2}$$

и доказано, что решение $V_T(u, x)$ при $T \to T_0$ (T_0 — предельная точка множества чисел $\{T\}$) сходится к решению предельной задачи Коши типа (1), (2) при выполнении некоторых условий. Эта сходимость равномерна в рассматриваемой области. В частности, все коэффициенты уравнения (1) должны быть ограничены равномерно по T некоторой постоянной C и интегрально непрерывны по T при $T = T_0$ равномерно в рассматриваемой области.

В настоящей работе исследуем поведение решения $V_T(u, x)$ дифференциального уравнения типа (1) с условием (2), коэффициенты которого могут не удовлетворять этим требованиям.

Рассмотрим задачу Коши в области $R_t = [0, t] \times R$

$$\frac{\partial}{\partial u} V(u, x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(u, x) + i\lambda g(x) V(u, x) = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{u \uparrow t} V(u, x) = \varphi(x), \tag{4}$$

где

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_1} & (x > 0), \\ \sqrt{\sigma_2} & (x < 0), \end{cases}$$

$g(x)$ — вещественная локально суммируемая функция на R.

Через $C_0^{1,2}$ обозначим пространство непрерывных на замыкании R_t функций $\Psi(u, x)$ с компактными носителями, один раз непрерывно дифференцируемых по u и два раза — по x внутри области R_t, для которых $\Psi(0, x) = 0$ $\psi(u, 0) = \psi'_x(u, 0) = 0$.

Определение. Обобщенным решением задачи Коши (3), (4) называется один раз непрерывно дифференцируемая по x функция $V(u,$

x), которая при любой $\Psi(u, x) \in C_0^{1,2}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^t du \int_R \left\{-\frac{\partial}{\partial u} \Psi(u, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\bar{\sigma}^2(x) \Psi(u, x)] +\right.$$

$$\left. + i\lambda g(x) \Psi(u, x)\right\} V(u, x)\, dx + \int_R \varphi(x) \Psi(t, x)\, dx = 0.$$

Лемма. Если $g(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{|y| \leqslant C} |g(y)|\, dy < \infty$$

при любом $C > 0$, $\ln|\varphi(x)| = 0(|x|^2)$ при $|x| \to \infty$ и $\eta_{x,u}(t)$ — решение стохастического уравнения

$$\eta_{x,u}(t) = x + \int_u^t \bar{\sigma}(\eta_{x,u}(s))\, dw(s),$$

где $w(s)$ — некоторый винеровский процесс, то функция

$$V(u, x) = M\left[\exp\left\{i\lambda \int_u^t g(\eta_{x,u}(s))\, ds\right\} \varphi(\eta_{x,u}(t))\right] \tag{5}$$

является обобщенным решением задачи Коши (3), (4).

Доказательство. Поскольку нам известен явный вид плотности вероятности перехода диффузионного процесса $\eta_{x,u}(t)$ [2], то доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1 [3].

Теперь приступим к изучению поведения решения $V_T(u, x)$ задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial u} V_T(u, x) + \sqrt{T}\, \alpha(x\sqrt{T}) \frac{\partial}{\partial x} V_T(u, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma^2(x\sqrt{T}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_T(u, x) + \frac{i\lambda}{T^{\frac{\alpha-1}{2}}} v(x\sqrt{T}) V_T(u, x) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{u \uparrow t} V_T(u, x) = \varphi(x), \tag{7}$$

в области R_t.

Потребуем выполнения следующих условий: а) $a(x)$, $\sigma(x)$, $v(x)$, $\varphi(x)$ такие, что решение задачи Коши (6), (7) можно представить в виде

$$V_T(u, x) = M\left[\exp\left\{\frac{i\lambda}{T^{\frac{\alpha-1}{2}}} \int_u^t v(\xi_{x,u}^T(s)\sqrt{T})\, ds\right\} \varphi(\xi_{x,u}^T(t))\right], \tag{8}$$

где $\xi^T_{x,u}(t)$ — решение стохастического уравнения

$$\xi^T_{x,u}(t) = x + \int_u^t a_T(\xi^T_{x,u}(s))\,ds + \int_u^t \sigma_T(\xi^T_{x,u}(s))\,dw(s),$$

$$a_T(x) = \sqrt{T}\,a(x\sqrt{T}),\ \ \sigma_T(x) = \sigma(x\sqrt{T}),\ \ 0 \leq t \leq 1;$$

б) $\sigma(x) > 0$ и

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(\gamma|x|)}{\int\limits_0^{\gamma|x|} [f'(z)\,\sigma^2(z)]^{-1}\,dz} = \begin{cases} \sigma_1 & (\gamma > 0), \\ \sigma_2 & (\gamma < 0), \end{cases}$$

где

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(z)}{\sigma^2(z)}\,dz\right\} du;$$

в) $v(x)$ удовлетворяет при некотором $\alpha \geqslant 1$ условию

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\int\limits_0^{\gamma|x} [f'(z)\,\sigma^2(z)]^{-1}\,v(z)\,dz}{|f(\gamma|x|)|^{\alpha}} = \begin{cases} \beta_1 & (\gamma > 0), \\ \beta_2 & (\gamma < 0). \end{cases}$$

Теорема. Если выполняются условия а), б), в) и функция $f_T(x) = f(x\sqrt{T})/\sqrt{T}$ равномерно сходится при $T \to \infty$ к монотонной функции $l(x)$, то решение $V_T(u, x)$ задачи Коши (6), (7) сходится при $T \to \infty$ к обобщенному решению задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial u} V(u, l^{-1}(x)) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(l^{-1}(x))\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(u, l^{-1}(x)) + \\ + i\lambda g(x)\,V(u, l^{-1}(x)) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{u\uparrow t} V(u, l^{-1}(x)) = \varphi(l^{-1}(x)), \tag{10}$$

где $l^{-1}(x)$ — функция, обратная к $l(x)$,

$$g(x) = \alpha\bar{\sigma}_1(l^{-1}(x))\,|l^{-1}(x)|^{\alpha-1}\bar{\sigma}^2(l^{-1}(x))\,\mathrm{sign}\,l^{-1}(x),$$

$$\bar{\sigma}_1(x) = \begin{cases} \beta_1 & (x > 0), \\ \beta_2 & (x < 0). \end{cases}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение диффузионный процесс $\xi(t)$, коэффициент переноса $a(x)$ и коэффициент диффузии $\sigma^2(x)$ которого удовлетворяют условиям теоремы. Для $0 \leq t \leq 1$ положим $\xi^T(t) = \xi(tT)/\sqrt{T}$.

Согласно условию а), решение задачи Коши (6), (7) можно представить в виде (8). Из доказательства теоремы 1 [4] следует, что при $T \to \infty$ функционал $T^{-\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} \int_0^t v(\xi^T(s)\sqrt{T})\,ds$ слабо сходится к случайной величине

$$2\left[\frac{1}{\alpha+1}\,\bar{\sigma}_1(\eta(t))\,|\,\eta(t)\,|^{\alpha+1}\operatorname{sign}\eta(t)-\int_0^t \bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\,\eta(s)\,|^{\alpha}\,d\eta(s)\right],$$

где $\eta(t)$ — решение стохастического уравнения

$$\eta(t)=\int_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\,dw(s).$$

Пользуясь формулой Ито, эту величину можно преобразовать к виду

$$\alpha\int_0^t \bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^{\alpha-1}\,\bar{\sigma}^2(\eta(s))\operatorname{sign}\eta(s)\,ds.$$

Значит, при $T \to \infty$ функция (8) сходится к функции

$$V(u, x)=M\left[\exp\left\{i\lambda\alpha\int_u^t \bar{\sigma}_1(\eta_{l(x),u}(s))\,|\,\eta_{l(x),u}(s)\,|^{\alpha-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\bar{\sigma}^2(\eta_{l(x),u}(s))\operatorname{sign}\eta_{l(x),u}(s)\,ds\right\}\varphi\left(l^{-1}(\eta_{l(x),u}(t))\right)\right].$$

На основании леммы функция $V(u, x)$ будет обобщенным решением задачи Коши (9), (10). Теорема доказана.

В работе [5] для уравнений с марковскими коэффициентами выведены уравнения для моментов решений, на основе которых получены известные формулы Каца и Фейнмана. В частности, рассмотрена задача Коши

$$\frac{dz(t)}{dt}=v(\xi(t))\,z(t), \tag{11}$$

$$z(0)=z, \tag{12}$$

где $\xi(t)$ — диффузионный процесс с коэффициентом переноса $a(x)$ и коэффициентом диффузии $\sigma^2(x)$.

Пусть $a(x)$ и $\sigma(x)$, а также функция $v(x)$ удовлетворяют условиям доказанной теоремы. Решением задачи Коши (11), (12) является

$$z(t)=z\exp\left\{\int_0^t v(\xi(s))\,ds\right\}.$$

Предположим, что $Mz(t) < \infty$. Введем параметр T, и считая возможным переход к пределу под знаком математического ожидания, исследуем поведение

$$M[z(tT)]^{T^{-\frac{\alpha+1}{2}}} = M\left[z^{T^{-\frac{\alpha+1}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{tT} v(\xi(sT))\,ds\right\}\right]$$

при $T \to \infty$, $0 \leq t \leq 1$.

Применив к функции

$$V_T(u, x) = M\left[z^{T^{-\frac{\alpha+1}{2}}} \exp\left\{\frac{1}{T^{\frac{\alpha-1}{2}}}\int_u^t v(\xi_{x,u}^T(s)\sqrt{T})\,ds\right\}\right]$$

доказанную теорему, получим, что $V_T(u, x)$ сходится к обобщенному решению задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial u}V\left(u, l^{-1}(x)\right) + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2(l^{-1}(x))\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(u, l^{-1}(x)) +$$

$$+ \alpha\bar{\sigma}_1(l^{-1}(x))\,|l^{-1}(x)|^{\alpha-1}\bar{\sigma}^2(l^{-1}(x))\,\mathrm{sign}\,l^{-1}(x)\,V(u, l^{-1}(x)) = 0,$$

$$\lim_{u\uparrow t} V(u, l^{-1}(x)) = 1.$$

Значит, $M[z(tT)]^{T^{-\frac{\alpha+1}{2}}}$ сходится при $T \to \infty$ к функции

$$V(0, 0) = M\left[\exp\left\{\alpha\int_0^t \bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^{\alpha-1}\bar{\sigma}^2(\eta(s))\,\mathrm{sign}\,\eta(s)\,ds\right\}\right],$$

где $\eta(s)$ — решение стохастического уравнения

$$\eta(s) = \int_0^s \bar{\sigma}(\eta(\tau))\,dw(\tau).$$

В заключение выражаю сердечную благодарность научному руководителю доценту Г. Л. Кулиничу за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хасьминский Р. З.* О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. — «Теория вероятностей и ее применение», 1963, 8, № 1.

2. *Кулинич Г. Л.* Об оценке параметра сноса стохастического диффузионного уравнения. — «Теория вероятностей и ее применение», 1975, 20, № 2.

3. *Портенко Н. И., Прокопенко Л. Н.* Об одном методе доказательства предельных теорем для функционалов от случайных блужданий. — «Теория случайных процессов», 1973, вып. 1.

4. *Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределений функционалов типа $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$ от диффузионных процессов. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1973, вып. 8.

5. *Papanicolaou G. C.* Stochastic equations and their applications. — «Amer. Math. Mon.», 1973, 80, N 5.

A. D. Borisenko

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF CAUCHY'S PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS

The behavior of the solution $V_T(u, x)$ of Cauchy's problem

$$\frac{\partial}{\partial u} V_T(u,x) + \sqrt{T}\, a(x\sqrt{T})\, \frac{\partial}{\partial x} V_T(u,x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2(x\sqrt{T})\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_T(u,x) + \frac{i\lambda}{T^{\frac{\alpha-1}{2}}}\, v(x\sqrt{T})\, V_T(u,x) = 0,$$

$$\lim_{u\uparrow t} V_T(u,x) = \varphi(x),$$

for $T \to \infty$ is investigated, where $a(x)$, $\sigma(x)$, $v(x)$ and $\varphi(x)$ are some functions.

Поступила в редколлегию 6.IX 1975.