А. В. ВИНОГРАДСКАЯ, асп. (*Киевский университет*)

ТЕОРЕМА ТИПА УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Теоремы типа усиленного закона больших чисел для произведений случайных матриц доказывались в работах [1—3]. В настоящей статье рассмотрены матрицы, которые имеют разные распределения и порядок которых может стремиться к бесконечности при возрастании числа сомножителей.

Рассмотрим произведение $B = A_1 A_2 \ldots A_n$ случайных независимых в совокупности для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и заданных на одном вероятностном пространстве матриц размерности $m \times m$ (m может быть зависимым от n). Обозначим элементы матрицы B через b_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Теорема. Пусть элементы $a_{kl}^{(s)}$ матриц A_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ с вероятностью 1 положительные и удовлетворяют условиям

$$\sup_n \sup_{s=\overline{1,n}} \sup_{k,l=\overline{1,m}} M \ln^4 a_{kl}^{(s)} < \infty; \tag{1}$$

$$\sup_n \sup_{s=\overline{1,n}} \sup_{k,l=\overline{1,m}} M a_{kl}^{(s)} < \infty. \tag{2}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\ln b_{ij} - M \ln b_{ij}) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Представим выражение $\frac{1}{n}(\ln b_{ij} - M \ln b_{ij})$ в виде

$$\frac{1}{n} (\ln b_{ij} - M \ln b_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} (M_{(s-1)} \ln b_{ij} - M_{(s)} \ln b_{ij}).$$

$M_{(s)}$ означает, что математическое ожидание берется по первым матрицам A_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ при фиксированных остальных. Обозначим через $\gamma_s = M_{(s-1)} \ln b_{ij} - M_{(s)} \ln b_{ij}$. Оказывается, что $M\gamma_k\gamma_s = 0$, когда $k \neq s$. Действительно, пусть $k > s$, тогда $M\gamma_k\gamma_s = M(\gamma_k M_{(s)}\gamma_s) = 0$, так как $M_{(s)}\gamma_s = 0$. Таким образом, получим

$$\frac{1}{n} (\ln b_{ij} - M \ln b_{ij}) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s.$$

Для доказательства теоремы оценим четвертый момент

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)^4 = \frac{1}{n^4} M\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2 + \sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\right)\left(\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^2 + \sum_{p\neq q}\gamma_p\gamma_q\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^4}\left[2M\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\left(\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\right)^2 + M\sum_{\substack{i\neq j\\ p\neq q}}\gamma_i\gamma_j\gamma_p\gamma_q\right].$$

Легко видеть, что $M\gamma_i\gamma_j\gamma_p\gamma_q = 0$, если все индексы различны. Рассмотрим суммы $M\sum_{\substack{i\neq j\\ p\neq q}}\gamma_i\gamma_j\gamma_p\gamma_q = M\left(\sum_{i\neq j}\gamma_i\gamma_j\right)^2$ и $M\sum_{\substack{p\neq i\\ p\neq q}}\gamma_p^2\gamma_i\gamma_q$. Первая сумма содержит отличные от нуля слагаемые вида $4M\gamma_i^2\gamma_j^2$, $8M\gamma_i^2\gamma_j\gamma_p$ $(i, j, p = 1, 2, \ldots, n)$, а вторая — $2M\gamma_i^2\gamma_j^2$, $2M\gamma_i^2\gamma_j\gamma_p$. Поэтому

$$M\sum_{\substack{i\neq j\\ p\neq q}}\gamma_i\gamma_j\gamma_p\gamma_q \leq 4M\sum_{\substack{p\neq i\\ p\neq q}}\gamma_p^2\gamma_i\gamma_q = 4M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^2\left(\sum_{i\neq p}\gamma_i^2\right) =$$

$$= 4M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^2\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i - \gamma_p\right)^2 \leq 8M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^2\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right)^2 + 8M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4,$$

Итак, имеем

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)^4 \le \frac{1}{n^4}\left[10M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^2\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right)^2 + 8M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4\right].$$

Воспользуемся неравенством Шварца

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)^4 \le \frac{1}{n^4}\left(10n^2\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}\sqrt{M\left(\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\gamma_p\right)^4} + \right.$$

$$\left. + 8M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4\right). \tag{4}$$

Обозначим

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)^4 = K. \tag{5}$$

Тогда неравенство (4) можно записать в следующем виде:

$$K - \frac{10}{n^2}\sqrt{K}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4} \le \frac{8}{n^4}M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4.$$

Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(\sqrt{K} - \frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}\right)^2 \leqslant \frac{25}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}\right)^2 + \frac{8}{n^4}M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4$$

или

$$\left|\sqrt{K} - \frac{5}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}\right| \le \sqrt{\frac{25}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}\right)^2 + \frac{8}{n^4}M\sum_{p=1}^{n}\gamma_p^4}.$$

Воспользовавшись неравенством $\sqrt{d+c} \le \sqrt{d} + \sqrt{c}$, где $d \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ и учтя обозначение (5), получим оценку

$$\sqrt{M\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\right)^4} \le \frac{L}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{M\gamma_i^4}, \tag{6}$$

где $L = 10 + \sqrt{8}$.

Теперь, используя условие теоремы, установим, что $M\gamma_i^4 \leq C$ ($i=1, 2, \ldots, n$), где C — некоторая константа. Для этого разложим b_{ij} по элементам s-й матрицы

$$M\gamma_s^4 = M\left\{M_{(s-1)}\ln\frac{\sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl}^{(s)} r_{kl}^{ij}}{\sum\limits_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}} - M_{(s)}\ln\frac{\sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl}^{(s)} r_{kl}^{ij}}{\sum\limits_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}}\right\}^4, \tag{7}$$

где r_{kl}^{ij} — случайные величины, не зависящие от $a_{kl}^{(s)}$, с вероятностью 1 положительные и определяются из выражения $\sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl}^{(s)} r_{kl}^{ij} = b_{ij}$.

Введем обозначение

$$\eta_s = \sum_{p,l=1}^{m} a_{kl}^{(s)} r_{kl}^{ij}\left(\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Применим неравенства $\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4+b^4}{2}$, $(M\xi)^4 \leq M\xi^4$ (a, b — действительные числа; ξ — случайная величина, у которой существует момент 4-го порядка) к формуле (7),

$$M\gamma_s^4 \leq 2^3 M\left[(M_{(s-1)}\ln\eta_s)^4 + (M_{(s)}\ln\eta_s)^4\right] \leq 2^4 M\ln^4\eta_s. \tag{9}$$

По формуле полной вероятности

$$M\ln^4\eta_s = M\{\ln^4\eta_s/\eta_s \leq 1\}P\{\eta_s \leq 1\} + M\{\ln^4\eta_s/\eta_s > 1\}P\{\eta_s > 1\}. \tag{10}$$

Если $\eta_s > 1$, то $\ln\eta_s = 4\ln\eta_s^{\frac{1}{4}} \leq 4\eta_s^{\frac{1}{4}}$, если $\eta_s \leq 1$, то с вероятностью 1

$$0 \geqslant \ln\eta_s = \ln\frac{\sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl}^{(s)} r_{kl}^{ij}}{\sum\limits_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}} \geqslant \frac{\sum\limits_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\ln a_{kl}^{(s)}}{\sum\limits_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}}.$$

Учитывая соотношение (10) и полученные неравенства, из (9) имеем:

$$\begin{aligned} M\gamma_s^4 &\leq 16M\left\{\left[\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\ln a_{kl}^{(s)}\left(\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\right)^{-1}\right]^4/\eta_s \leq 1\right\}P\{\eta_s \leq 1\} + \\ &+ 4\cdot 16M\{\eta_s/\eta_s > 1\}P\{\eta_s > 1\} \leq \\ &\leq 16M\left[\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\ln a_{kl}^{(s)}\left(\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}\right)^{-1}\right]^4 + 4\cdot 16M\eta_s. \end{aligned}$$

Далее, воспользуемся неравенством

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k}\right)^4 \leq \frac{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k^4}{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k},$$

где $\lambda_k > 0$, a_k — действительные числа $(k = 1, 2, \ldots, m)$.
Получим

$$M\gamma_s^4 \leq 16\frac{\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij} M \ln^4 a_{kl}^{(s)}}{\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}} + 4\cdot 16\frac{\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij} M a_{kl}^{(s)}}{\sum_{k,l=1}^{m} r_{kl}^{ij}} \leq$$

$$\leq 16 \sup_n \sup_{s=\overline{1,n}} \sup_{k,l=\overline{1,m}} M \ln^4 a_{kl}^{(s)} + 4\cdot 16 \sup_n \sup_{s=\overline{1,n}} \sup_{k,l=\overline{1,m}} M a_{kl}^{(s)} = C.$$

Итак, из соотношения (6) имеем $M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)^4 \leq \frac{L^2C}{n^2}$. На основании леммы Бореля — Кантелли получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тутубалин В. Н.* Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел. — «Теория вероятностей и ее применения», 1972, 14, вып. 2.
2. *Furstenberg H., Kesten H.* Products of random matrices. — «Ann. Math. Statist»., 1960, 31, 2.
3. *Bellman R.* Limit theorems for non-commutative operations. 1. — «Duke Math. J.», 1954, 21, pp. 491—500.
4. *Гирко В. Л.* Одна предельная теорема для произведений случайных матриц. — «Теория вероятностей и ее применения», 1976, 21 вып. 1.

A. V. Vinogradskaya

THEOREM KIND OF THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR PRODUCTS OF RANDOM MATRICES

A simple proof is found for the law of large numbers for products of random matrices.

Поступила в редколлегию 6.1 1976.