О. Н. ГЛАДКАЯ, асп. (*Киевский университет*)

УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $\{\xi(\omega, t), \ t \in E_n\}$ — действительное случайное поле, где E_n — множество точек $t=(t_1, \ldots, t_n) \in R_n$ таких, что $0 \leq t_i \leq 1$ для всех $i=\overline{1,n}$; $|t|=\sqrt{t_1^2+\ldots+t_n^2}$. В дальнейшем будем обозначать такое поле просто через $\xi(t)$. Допустим, что $M\xi(t)=0$ и $M\xi^2(t)<\infty$ для всех $t \in E_n$, $r_\xi(t, u)=M\xi(t)\xi(u)$,

$$B_{ii}(t, u)=\partial^2 r_\xi(t, u)/\partial t_i \partial u_i \quad (i=\overline{1,n}).$$

Будем предполагать, что для некоторого i функция $B_{ii}(t, u)$ существует и непрерывна в каждой точке $(t, t) \in E_{2n}$. Тогда в силу критерия сходимости в среднем квадратичном случайное поле $\xi(t)$ обладает частной производной в среднем квадратичном $\frac{\partial\xi(t)}{\partial t_i}=y_i(t)$, причем $\frac{\partial\xi(t)}{\partial t_i}$ непрерывна в среднем квадратичном.

В данной статье, согласно методу, предложенному в работе [1], изучаются условия дифференцируемости по направлению с вероятностью единица выборочных функций случайного поля $\xi(t)$.

Теорема 1. Пусть $\xi(t)$ — непрерывное с вероятностью единица случайное поле. Пусть функция $B_{ii}(t, u)$ удовлетворяет одному из условий, обеспечивающему непрерывность с вероятностью единица сепарабельной модификации поля $\{y_i(t), \ t \in E_n\}$ (см., например, [2, 3]). Тогда поле $\xi(t)$ с вероятностью единица обладает непрерывной частной производной $\frac{\partial\xi(t)}{\partial t_i}$.

Доказательство. Так как случайное поле $\xi(t)$ непрерывно в среднем квадратичном на E_n и корреляционная функция $r_{y_i}(t, u)=B_{ii}(t, u)$ по предположению теоремы непрерывна на E_{2n}, то в силу критерия интегрируемости в среднем квадратичном для $y_i(t)$ существует неопределенный интеграл в среднем квадратичном:

$$\text{ср. кв.}\int_0^{t_i} y_i(s)\,ds_i=z_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)=z_i(t),$$

$$0 \leq t_i \leq 1, \ s \in E_n.$$

Рассмотрим сепарабельное поле $\overline{y_i}(t)$, стохастически эквивалентное полю $y_i(t)$. Тогда с вероятностью единица для любого $0 \leq t_i \leq 1$ и $s \in E_n$

$$z_i(t)=\text{ср. кв.}\int_0^{t_i} y_i(s)\,ds_i=\text{ср. кв.}\int_0^{t_i} \overline{y}_i(s)\,ds_i$$

в силу условия теоремы $\bar{y}_i(t)$ непрерывно с вероятностью единица. Тогда с вероятностью единица существует и непрерывен

$$\int_0^{t_i} \bar{y}_i(s)\, ds_i = \bar{z}_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = \bar{z}_i(t),$$

$$0 \leq t_i \leq 1, \quad s \in E_n.$$

Кроме того,

$$\bar{z}_i(t) = \text{ср. кв.} \int_0^{t_i} \bar{y}_i(s)\, ds_i,$$

и поэтому с вероятностью единица $\bar{z}_i(t) = z_i(t)$.

Рассмотрим $\Delta_0^{t_i}\xi(s) = \xi(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) - \xi(s_1, \ldots$ $\ldots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \ldots, s_n)$. Ясно, что $\Delta_0^{t_i}\xi(s) = \text{ср. кв.} \int_0^{t_i} y_i(s)\, ds_i$. Но в силу ранее сделанного замечания $\Delta_0^{t_i}\xi(s) = \bar{z}_i(t)$ с вероятностью единица. Поэтому $\Delta_0^{t_i}\xi(s) = \bar{z}_i(t)$ с вероятностью единица для любого счетного всюду плотного множества точек в E_n. Так как $\Delta_0^{t_i}\xi(s)$ — выборочно непрерывно с вероятностью единица и $\bar{z}_i(t)$ выборочно непрерывен с вероятностью единица, то $\Delta_0^{t_i}\xi(s) = \bar{z}_i(t)$ с вероятностью единица для всех точек E_n. Но

$$\frac{\partial(\Delta_0^{t_i}\xi(s))}{\partial t_i} = \frac{\partial \xi(t)}{\partial t_i}.$$

Последнее утверждение и доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное случайное поле, для которого выполняются условия:

$$\text{A*)} \quad \Delta_h \Delta_h r_\xi(t, t) \leq C_1 |h|^{n+\varepsilon_1}, \quad C_1, \varepsilon_1 > 0;$$

для некоторого i $(i = \overline{1, n})$

$$\text{B*)} \quad \Delta_h \Delta_h B_{ii}(t, t) \leq C_2 |h|^{n+\varepsilon_2}, \quad C_2, \varepsilon_2 > 0,$$

где $\Delta_h \Delta_h f(t, t) = f(t+h, t+h) - f(t+h, t) - f(t, t+h) + f(t, t)$, $t, t+h \in E_n$.

Тогда с вероятностью единица поле $\xi(t)$ имеет непрерывную частную производную $\partial\xi(t)/\partial t_i$.

Доказательство. Условие A* обеспечивает непрерывность корреляционной функции $r_\xi(t, u)$ на E_{2n} и непрерывность с вероятностью единица случайного поля $\xi(t)$. Условие B* обеспечивает непрерывность функции $B_{ii}(t, u)$ на E_{2n} и выполнение условия теоремы 1.

Следствие 2. Если $\xi(t)$ — сепарабельное гауссовское поле, для которого выполнены условия

$$\text{A}^{**})\ \Delta_h\Delta_h r_\xi(t, t) \leq \frac{C_1}{|\log|h||^{1+\varepsilon_1}},\ C_1,\ \varepsilon_1 > 0;$$

для некоторого $i\ (i = \overline{1,n})$

$$\text{B}^{**})\ \Delta_h\Delta_h B_{ii}(t, t) \leq \frac{C_2}{|\log|h||^{1+\varepsilon_2}},\ C_2,\ \varepsilon_2 > 0,$$

то поле $\xi(t)$ с вероятностью единица имеет непрерывную частную производную $\partial\xi(t)/\partial t_i$.

Из теоремы 1 нетрудно получить условия дифференцируемости по направлению с вероятностью единица выборочных функций случайного поля $\xi(t)$.

Теорема 2. Пусть $\xi(t)$ — непрерывное с вероятностью единица случайное поле, каждая функция $B_{ii}(t, u)$ $(i=\overline{1, n})$ существует, непрерывна в точке $(t, t) \in E_{2n}$ и удовлетворяет условию теоремы 1. Тогда поле $\xi(t)$ с вероятностью единица имеет непрерывную производную по любому направлению.

Следствие 3. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное случайное поле, для которого выполняются условия A* и B* для всех $i = \overline{1, n}$. Тогда с вероятностью единица случайное поле $\xi(t)$ имеет непрерывную производную по любому направлению.

Следствие 4. Если $\xi(t)$ — сепарабельное гауссовское поле, то для существования непрерывной производной поля $\xi(t)$ по любому направлению достаточно выполнения для всех $i = \overline{1, n}$ условия B**.

Доказательство. Действительно, используя формулу Тейлора, нетрудно показать, что A** следует из B**.

Результаты, приводимые в дальнейшем изложении, установлены для некоторых классов сепарабельных гауссовских полей.

Пусть $\xi(t)$ — однородное случайное поле. Тогда $r_\xi(t, u)$ в каждой точке $(t, u) \in E_{2n}$ зависит от разности $t - u$: $r_\xi(t, u) = r_\xi(t-u)$. Если спектральную меру, соответствующую функции $r_\xi(t-u)$, обозначить через $F(\cdot)$, то для корреляционной функции поля $\xi(t)$ возможно спектральное разложение [4]

$$r_\xi(t-u) = \int\limits_{R_n} e^{i(t-u,\lambda)} F(d\lambda).$$

Следствие 5. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное однородное гауссовское поле. Если для всех $i = \overline{1,n}$ и некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{R_n} \lambda_i^2 |\log|1 + \lambda_k||^{1+\varepsilon} F(d\lambda) < \infty,$$

то с вероятностью единица поле $\xi(t)$ имеет непрерывную производную по любому направлению.

Доказательство.

$$B_{ii}(t-u)=\int_{R_n}\lambda_i^2 e^{i(t-u,\lambda)}F(d\lambda);$$

$$\Delta_h\Delta_h B_{ii}(t,t)=4\int_{R_n}\lambda_i^2\sin^2\frac{(\lambda,h)}{2}F(d\lambda)\leq$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{n}\int_{R_n}\lambda_i^2\left|\sin\frac{\lambda_k h_k}{2}\right|F(d\lambda)\leq 4\sum_{k=1}^{n}\int_{R_n}\lambda_i^2|\log|1+$$

$$+\lambda_k||^{1+\varepsilon}F(d\lambda)[|\log|h||^{1+\varepsilon}]^{-1}.$$

Рассмотрим теперь однородные и изотропные случайные поля. Корреляционная функция $r_\xi(t,u)$ однородного и изотропного поля зависит лишь от расстояния $|t-u|$ между точками t и u и имеет вид [4]

$$r_\xi(|t-u|)=2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_0^\infty J_{(n-2)/2}(\lambda|t-u|)\times$$

$$\times[(\lambda|t-u|)^{(n-2)/2}]^{-1}\Phi(d\lambda),$$

где $\Phi(\lambda)=\int\limits_{\sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}\leq\lambda}F(dv)$, $J_\nu(x)$ — бесселева функция первого рода.

Следствие 6. Если $\xi(t)$ — сепарабельное однородное и изотропное гауссовское поле, то для существования непрерывной производной по любому направлению достаточно, чтобы для некоторого $\varepsilon>0$

$$\int_0^\infty\lambda^2\log^{1+\varepsilon}(1+\lambda)\Phi(d\lambda)<\infty.$$

Доказательство. Используя формулу Пуассона для бесселевых функций

$$\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)J_\nu(x)=2(\sqrt{\pi})^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi, \tag{*}$$

получаем

$$B_{ii}(t, u) = 2(\sqrt{\pi})^{-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times (t_i - u_i)^2 |t-u|^{-2}\int_0^\infty \left\{\int_0^{\pi/2} \lambda [\cos(\lambda|t-u|\sin\varphi)\sin\varphi -\right.$$

$$\left.-\sin(\lambda|t-u|\sin\varphi)(|t-u|)^{-1}]\sin\varphi\cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right\}\Phi(d\lambda),$$

$$\Delta_h\Delta_h B_{ii}(t, t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{h_i^2}{|h|^2}\times$$

$$\times\int_0^\infty \left\{\int_0^{\pi/2} \lambda [\sin(\lambda|h|\sin\varphi)/|h| - \lambda\cos(\lambda|h|\sin\varphi)\times\right.$$

$$\left.\times\sin\varphi]\sin\varphi\cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right\}\Phi(d\lambda) \le 4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1}\int_0^\infty \lambda^2\log^{1+\varepsilon}(1+\lambda)\,\Phi(d\lambda)\,(|\log|h||^{1+\varepsilon})^{-1}.$$

Если случайное поле $\xi(t_1, x)$ — однородное на $(-\infty, +\infty)\times\times R_{n-1}$, однородное и изотропное по пространственной переменной $x=(t_2, \ldots, t_n)\in R_{n-1}$, то в этом случае корреляционная функция имеет вид [4]

$$r_\xi(t_1, x; u_1, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty e^{i(t_1-u_1)s}\,Y_n(\lambda|x-y|)\,\Phi(ds, d\lambda),$$

где

$$Y_n(\lambda|x-y|) = 2^{(n-2)/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{J_{(n-2)/2}(\lambda|x-y|)}{(\lambda|x-y|)^{(n-2)/2}},$$

$\Phi(ds, d\lambda)$—мера на боррелевских множествах $(-\infty, +\infty)\times(0, +\infty)$.

Следствие 7. Пусть $\xi(t_1, x)$ — сепарабельное однородное на $[0, 1]\times E_{n-1}$, однородное и изотропное по пространственной переменной $x=(t_2, \ldots, t_n)\in E_{n-1}$ гауссовское случайное поле. Тогда для существования непрерывной производной по любому направлению достаточно, чтобы для некоторых $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, $\varepsilon_3>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2|\log|1+s||^{1+\varepsilon_1}F_1(ds) < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2 \int_0^{\infty} \log^{1+\varepsilon_2}(1+\lambda)\, \Phi(ds, d\lambda) < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 \log^{1+\varepsilon_3}(1+\lambda)\, F_2(d\lambda) < \infty,$$

где

$$F_1(\cdot) = \int_0^{\infty} \Phi(\cdot, d\lambda), \quad F_2(\cdot) = \int_0^{\infty} \Phi(ds, \cdot).$$

Доказательство. Использование формулы (*) дает возможность записать

$$B_{11}(t, x;\ u_1, y) = 2(\sqrt{\pi})^{-1}\, \Gamma(n/2)\, (\Gamma(n-1/2))^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} s^2 e^{i(t_1-u_1)s} \left[\int_0^{\pi/2} \cos(\lambda\,|x-y|\,\sin\varphi)\, \cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right] \Phi(ds, d\lambda);$$

$$B_{ii}(t_1, x;\ u_1, y) = 2(\sqrt{\pi})^{-1}\, \Gamma(n/2)\, (\Gamma(n-$$

$$-1/2))^{-1}\, (t_i-u_i)^2\, |x-y|^{-2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{i(t_1-u_1)s} \times$$

$$\times \left\{\int_0^{\pi/2} \lambda\, [\cos(\lambda\,|x-y|\,\sin\varphi)\, \sin\varphi - (\sin\lambda\,|x-y|\,\sin\varphi)\,|x-$$

$$-y|^{-1}]\, \sin\varphi\, \cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right\} \Phi(ds, d\lambda)$$

для $i = \overline{2,n}$. Пусть $|\bar{h}| = \sqrt{h_2^2 + \ldots + h_n^2}$. Тогда

$$\Delta_h \Delta_h B_{11}(t_1, x;\ t_1, x) = 4(\sqrt{\pi})^{-1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \int_0^{\infty} \left\{\int_0^{\pi/2} [1 - \cos(h_1 s)\cos(\lambda\,|\bar{h}|\, \times\right.$$

$$\left.\times \sin\varphi)]\, \cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right\} \Phi(ds, d\lambda) \leq \frac{8}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \int_0^{\infty} \left\{\int_0^{\pi/2} \left[\left|\sin\frac{h_1 s}{2}\right| + \left|\sin\frac{\pi\,|\bar{h}|\,\sin\varphi}{2}\right|\right] \times\right.$$

$$\times\, d\varphi\Big\}\,\Phi(ds,\, d\lambda) \leq 4\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^2 \int\limits_{0}^{\infty} [|\log|1+s||^{1+\varepsilon_1} +$$

$$+ \log^{1+\varepsilon_2}(1+\lambda)]\,\Phi(ds,\, d\lambda)\,(|\log|h||^{1+\varepsilon})^{-1},$$

где $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$;

$$\Delta_h\Delta_h B_{ii}(t_1,\, x;\; t_1,\, x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\frac{h_i^2}{|\bar{h}|^2}\, \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(h_1 s) \int\limits_{0}^{\infty} \lambda \left\{\int\limits_{0}^{\pi/2} [\sin(\lambda)\,|\bar{h}|\sin\varphi)\,(|\bar{h}|)^{-1} - \lambda\cos(\lambda\,|\bar{h}|\sin\varphi)] \times\right.$$

$$\left.\times \sin\varphi\cos^{n-2}\varphi\, d\varphi\right\}\;\Phi\;(ds,\;d\lambda) \leq 4\sqrt{\pi}\;\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \lambda^2\log^{1+\varepsilon_3}\times$$

$$\times\,(1+\lambda)\;\Phi\;(ds,\;d\lambda)\;(|\;\log|h||^{1+\varepsilon_3})^{-1},\quad i = \overline{2,n}.$$

Случайное поле $\xi(t)$ на сфере s_n (s_n сфера в R_n единичного радиуса с центром в начале координат) называется изотропным в широком смысле, если корреляционная функция $r_\xi(t,\, u)$ поля $\xi(t)$ зависит лишь от углового расстояния θ между точками t и u. В этом случае корреляционная функция имеет вид [4]

$$r_\xi(t,\, u) = r_\xi(\cos\theta) = \omega_n^{-1}\sum_{m=0}^{\infty} b_n\,\frac{C_m^{(n-2)/2}(\cos\theta)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}\,h(m,\, n),$$

где ω_n — площадь поверхности сферы s_n, $h(m,\, n) = 2(m+n-2) \times \frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!}$ число линейно независимых сферических гармоник степени m, $C_m^{\nu}(x)$ — многочлен Гегенбауэра ($\nu \neq 0$, $b_m \geqslant 0$ и $\sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m h(m,\, n) < \infty$.

Следствие 8. Пусть $\xi(t)$ — сепарабельное гауссовское случайное поле на сфере s_n, изотропное в широком смысле. Если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2\log^{1+\varepsilon}(1+m)\,b_m h(m,\, n) < \infty,$$

то поле $\xi(t)$ с вероятностью единица имеет непрерывную производную по любому направлению.

Доказательство. Используя явное представление для многочленов Гегенбауэра

$$C_m^{(n-2)/2}(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_k \left(\frac{n-2}{2}\right)_{m-k}}{k!\,(m-k)!} \cos[(m-2k)\,\theta],$$

где $(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)$, и выражение углового расстояния θ между точками t и u через расстояние $|t-u|$ между этими точками, получаем

$$\Delta_h\Delta_h B_{tt}(t)\,t) = \frac{2}{\omega_n}\frac{h_l^2}{|h|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m h(m,n)}{C_m^{(n-2)/2}(1)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m}\frac{(n-2/2)_k\,(n-2/2)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}\left\{\frac{2-|h|^2}{2|h|\sqrt{1-\frac{|h|^2}{4}}}\sin\left[(m-2k)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\arccos\left(1-\frac{|h|^2}{2}\right)\right] - (m-2k)\cos\left[(m-2k)\arccos\left(1-\frac{|h|^2}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{m-2k}{1-\frac{|h|^2}{4}} \leq \frac{8}{\omega_n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m h(m,n)}{C_m^{(n-2)/2}(1)}\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)_k\left(\frac{n-2}{2}\right)_{m-k}}{k!\,(m-k)!}\Bigg|\times$$

$$\times\sin\left[(m-2k)\arccos\left(1-\frac{|h|^2}{2}\right)\right]\Bigg|(m-2k)^2 \leq \frac{8}{\omega_n}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty} m^2\log^{1+\varepsilon}(1+m)\,b_m h(m,n)\,(|\log|h||^{1+\varepsilon})^{-1}.$$

Замечание. Приведенные теоремы справедливы и в том случае, когда случайное поле $\xi(t)$ задано на любом ограниченном множестве из R_n.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ю. В. Козаченко за внимание к работе и советы, использованные при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Winkler W., Fröhlich O.* Bemerkungen zur Differenzierbarkeit zufälliger Felder. — «Wiss. Z. TU Dresden», 1968, 15, 4.

2. *Dudley R. M.* Sample Functions on the gaussian process. — «Ann. Probability», 1973, 1, 1.

3. *Ядренко М. Й.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів.— «Вісник Київського університету. Серія математики і механіки», 1967, 9.

4. *Козаченко Ю. В., Ядренко М. И.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. I. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, 14.