Д. В. ГУСАК, ст. научн. сотр.
(Институт математики АН УССР)

О СЛОЖНОМ ПУАССОНОВСКОМ ПРОЦЕССЕ НА ЦЕПИ МАРКОВА

Для блужданий, описываемых однородным процессом с независимыми приращениями, распределения граничных функционалов в общем случае определяются при помощи факторизационных тождеств [1]. Для полунепрерывных блужданий различные граничные задачи решаются без применения факторизационных методов. В частности, для сложных пуассоновских процессов В. С. Королюком [2] развит эффективный метод исследования распределений граничных функционалов — метод потенциала.

Здесь рассматриваются сложные пуассоновские процессы, управляемые цепью Маркова, и изучаются распределения их граничных функционалов. На основании свойства полунепрерывности рассматриваемого процесса устанавливается, что верхние функционалы, связанные с пересечением положительного уровня, определяются распределением неотрицательной части исходного процесса $\xi(t)$: $F(t, x) = \mathrm{P}\{\xi(t) < x\}$ $(x \geqslant 0)$. Для указанных процессов справедливо утверждение относительно момента первого выхода из полосы, обобщающее соответствующий результат [2].

1. Рассмотрим сначала процесс $\xi(t) = \chi(t) - t$ $(t \geqslant 0,\ \xi(0) = 0)$,

$$M \exp\{i\alpha\chi(t)\} = \exp\left\{t \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, d\Pi(x)\right\}. \tag{1}$$

Пусть θ_s — показательная случайная величина с параметром $s > 0$

$$\xi^+(t) = \sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u),\ \xi^-(t) = \inf_{0 \leqslant u \leqslant t} \xi(u),\ \xi^+ = \sup_{0 \leqslant u \leqslant \infty} \xi(u),$$

$$\tau_x^\pm = \inf\{t : \pm\xi(t) > \pm x\}\ (\pm x \geqslant 0), \tag{2}$$

$$\tau_c(z) = \begin{cases} \tau_c^-(z) = \tau_{z-c}^-, & \tau_{z-c}^- < \tau_z^+,\ 0 < z < c, \\ \tau_c^+(z) = \tau_z^+, & \tau_{z-c}^- > \tau_z^+,\ 0 < z < c, \end{cases}$$

$$\gamma_x^+ = x - \xi(\tau_x^+)\ (x \geqslant 0),\ B_c^\pm(s, z) = M \exp\{-s\tau_c^\pm(z)\}.$$

В общем случае при изучении распределений граничных функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями важную роль играет тождество безгранично делимой факторизации [1]

$$Me^{i\alpha\xi(\theta_s)} = Me^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}\, Me^{i\alpha\xi^-(\theta_s)}, \tag{3}$$

положительная компонента которого

$$M\exp\{i\alpha\xi^+(\theta_s)\} = \exp\left\{\int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\, dN_s^+(x)\right\},$$

$$N_s^+(x) = -\int_0^\infty e^{-st}\, t^{-1}\, \mathrm{P}\{\xi(t) > x\}\, dt, \quad x > 0$$

определяет распределения функционалов, связанных с выходом процесса $\xi(t)$ через верхнюю границу. Учитывая неотрицательность скачков процесса $\xi(t)$, можно показать, что первый множитель факторизации (3) выражается через распределение положительной части величины $\xi(\theta_s)$: $P(s, x) = \mathrm{P}\{\xi(\theta_s) < x\}$ $(x \geqslant 0)$.

Теорема 1. *А*. Производящие функции величины $\xi^+(\theta_s)$ и пары величин $\{\tau_x^+, \gamma_x^+\}$ определяются соотношениями

$$Me^{-u\xi^+(\theta_s)} = 1 - uM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geqslant 0)\,[s + P'_x(s, 0)]^{-1}, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty M(e^{-s\tau_x^+ - u\gamma_x^+})e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu - u}\, \frac{\mu M(e^{-\mu\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geqslant 0) - uM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geqslant 0)}{s + P'_x(s, 0) - uM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) \geqslant 0)} \tag{5}$$

Б. Если выполнено условие

$$\lim_{s \to 0} s^{-1} P'_x(s, 0) = \int_0^\infty F'_x(t, 0)\, dt = c_0 < \infty, \tag{6}$$

то существует невырожденное распределение абсолютного максимума

$$\mathrm{P}\{\xi^+ > x\} = \int_0^\infty F'_x(t, x)\, dt\, (1 + c_0)^{-1} \quad (x \geqslant 0), \tag{7}$$

и производящая функция γ_x^+ на событии $\{\tau_x^+ < \infty\}$ $(\mathrm{P}\{\tau_x^+ < \infty\} = \mathrm{P}\{\xi^+ > x\})$ определяется соотношением

$$\int_0^\infty M(e^{-u\gamma_x^+}, \tau_x^+ < \infty)\, e^{-\mu x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu - u}\, \frac{\mu \int_0^\infty M(e^{-\mu\xi(t)}, \xi(t) > 0)\, dt - u\int_0^\infty M(e^{-u\xi(t)}, \xi(t) > 0)\, dt}{1 + c_0 - u\int_0^\infty M(e^{-u\xi(t)}, \xi(t) > 0)\, dt}. \tag{8}$$

Константа $c_0 = \rho(1-\rho)^{-1} > 0$, где $\rho < 1$ — положительный корень уравнения $\int\limits_0^\infty (e^{-\rho x} - 1)\, d\Pi(x) + \rho = 0$.

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим результатом [3]:

$$\mathbf{P}\{\xi^+(t) < x\} = F(t, x) - \int\limits_0^t F'_x(t-u, x)\, \mathbf{P}\{\xi^+(u) = 0\}\, du.$$

После интегрального преобразования по t находим

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = s^{-1} P'_x(s, x)\, \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\}; \tag{9}$$

в частности,

$$\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = [1 + s^{-1}\mathbf{P}'_x(s, 0)]^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$Me^{-u\xi^+(\theta_s)} - \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} = \frac{s^{-1}\left[P'_x(s, 0) - u\int\limits_0^\infty e^{-ux} P'_x(s, x)\, dx\right]}{1 + s^{-1} P'_x(s, 0)} =$$

$$= \frac{P'_x(s, 0) - u\int\limits_0^\infty e^{-ux} p'_x(s, x)\, dx}{s + P'_x(s, 0)},$$

и этим самым справедливость соотношения (4) доказана.

Для установления (5) воспользуемся следующим соотношением [4] для совместного распределения τ_x^+ и γ_x^+:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\mu x} M\left(e^{-s\tau_x^+ - u\gamma_x^+}, \tau_x^+ < \infty\right) dx = \frac{1}{\mu - u}\left[1 - Me^{-\mu\xi^+(\theta_s)}\left(Me^{-u\xi^+(\theta_s)}\right)^{-1}\right] \tag{10}$$

Подставляя (4) в правую часть соотношения (10), нетрудно получить требуемое соотношение (5).

При выполнении условия (6) после предельного перехода можно показать, что $\mathrm{P}\{\xi^+ = 0\} = (1 + c_0)^{-1} < 1$, и найти требуемое распределение (7). Соотношение (8) следует из (5) после устремления s к 0. Для установления связи между c_0 и ρ достаточно сравнить результат о распределении абсолютного максимума из работы [3] с соотношением (7).

Обозначим через α_s^- корень уравнения

$$\int\limits_0^\infty (e^{-\alpha x} - 1)\, d\Pi(x) + \alpha = s \quad (s > 0,\ \alpha_0^- = \rho) \tag{11}$$

и приведем без доказательства теорему [2] о производящих функциях моментов первого выхода сложного пуассоновского процесса из полосы $[x-c, x]$, $c > x$ (так называемых моментов разорения).

Теорема 2. Производящие функции моментов разорения $\tau_c^{\pm}(x)$ определяются соотношениями

$$B_c^-(s, x) = R_s(x) R_s^{-1}(c), \tag{12}$$

где

$$R_s(x) = (e^{x\alpha_s^-} - Me^{-s\tau_x^+})(1 - Me^{-s\tau_0^+})^{-1},$$

$$Me^{-s\tau_x^+} = P'_x(s, x)[s + P'_x(s, 0)]^{-1};$$

$$B_c^+(s, x) = 1 - B_c^-(s, x)\left[1 + s\int_0^c R_s(u)\,du\right] + s\int_0^x R_s(u)\,du. \tag{13}$$

2. В этом пункте будут установлены аналоги теорем 1 и 2 на случай сложных пуассоновских процессов, управляемых конечной цепью Маркова.

Рассмотрим однородную цепь Маркова $x(t)$ $(t \geqslant 0)$ с матрицей переходных вероятностей

$$P(t) = \| \mathbf{P}\{x(t) = r/x(0) = k\} \| = \exp\{tQ\},$$

$Q = N[P - I]$ — инфинитезимальная матрица цепи $x(t)$, $N = \|\delta_{kr}\nu_k\| > 0$, $P = \|P_{kr}\|$ $(P_{kr} = \mathbf{P}\{x(\sigma_1 + 0) = r/x(0) = k\};\ k,r = \overline{1,n_0})$ — матрица переходных вероятностей вложенной цепи $z_n = x(\sigma_n + 0)$, σ_n — момент n-го изменения состояния цепи $x(t)$, $\mathbf{P}\{\sigma_1 > t/x(0) = k\} = \exp\{-\nu_k t\}$ $(k = \overline{1,n_0})$.

Пусть $M\exp\{i\alpha\chi_k(t)\} = \exp\left\{t\int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\,d\Pi_k(x)\right\}$. Тогда процесс $\xi(t)$ на $x(t)$ задается следующей х. ф.:

$$Me^{i\alpha\xi(t)} = \| M(e^{i\alpha\xi(t)}, x(t) = r/x(0) = k) \|, \tag{14}$$

$$Me^{i\alpha\xi(t)} = \exp\{t\Psi(\alpha)\},$$

$$\Psi(\alpha) = -i\alpha I + \int_0^\infty (e^{i\alpha x} - 1)\,d\Pi(x) + N[\Phi(\alpha) - I],$$

$$\Pi(x) = \| \delta_{kr}\Pi_k(x) \| \quad (k, r = \overline{1,n_0}),$$

$\Phi(\alpha) = \| P_{kr} Me^{i\alpha\chi_{kr}} \|$ $(\chi_{kr} \geqslant 0)$ — х. ф. неотрицательных скачков, заданных на переходах цепи $x(t)$.

Для заданного на цепи процесса $\xi(t)$ обозначения граничных функционалов совпадают с (2) с той лишь разницей, что в матричных обозначениях производящих функций и распределений этих функционалов появится необходимость учитывать условия перехода цепи. Например,

$$B_c^{\pm}(s, z) = \| M\{\exp\{-s\tau_c^{\pm}(z)\}, x(\tau_c^{\pm}(z)) = r/x(0) = k\}\|.$$

Для краткости обозначений условия перехода не всегда будут указываться, чаще всего будем пользоваться записью такого вида: $B_c^{\pm}(s, z) = M\exp\{-s\tau_c^{\pm}(z)\}$.

Заметим, что матричный аналог тождества (3) установлен в работе [5] и выглядит следующим образом:

$$Me^{i\alpha\xi(\theta_s)} = Me^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} P_s Me^{i\alpha(\xi(\theta_s)-\xi^+(\theta_s))}, \tag{15}$$

где

$$P_s = \| \mathbf{P}\{x(\theta_s) = r/x(0) = k\}\| = s(sI - Q)^{-1}.$$

Положительный множитель факторизации

$$Me^{i\alpha\xi^+(\theta_s)} = \| M(e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}, x(\theta_s) = r/x(0) = k)\|$$

определяет распределение граничных функционалов, связанных с выходом через верхний уровень.

Выясним, как выражается этот множитель через распределение положительной части исходного процесса $\xi(t)$:

$$P(s, x) = s\int_0^\infty e^{-st}F(t, x)\,dt\ (s > 0),\ F(t, x) =$$

$$= \| \mathbf{P}\{\xi(t) < x, x(t) = r/x(0) = k\}\|.$$

Теорема 3. А. Производящие функции случайной величины $\xi^+(\theta_s)$ и пары $\{\gamma_x^+, \tau_x^+\}$ определяются соотношениями

$$Me^{-u\xi^+(\theta_s)} = P_s - u\int_0^\infty e^{-ux}P'_x(s, x)\,dx\,[sI + P'_x(s, 0)]^{-1}P_s; \tag{16}$$

$$\int_0^\infty M(e^{-s\tau_x^+ - u\gamma_x^+}, \tau_x^+ < \infty)e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\mu - u}[\mu M(e^{-\mu\xi(\theta_s)},$$

$$\xi(\theta_s) > 0) - uM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0)] \times [sI + P'_x(s, 0) -$$

$$- uP_sM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0]^{-1}P_s. \tag{17}$$

Б. Если выполнено условие

$$\int_0^\infty F'_x(t, 0)\,dt = C_0 < \infty \tag{18}$$

и цепь $x(t)$ эргодична $(P_s \underset{s\to 0}{\to} P_0 = \| p^0_{kr} \|, \ p^0_{kr} = \rho_r > 0)$, то существует невырожденное распределение абсолютного максимума

$$\lim_{t\to\infty} \| \mathbf{P}\{\xi^+(t) > x, \ x(t) = r/x(0) = k\} \| = \| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+ > x\} \| =$$

$$= \int_0^\infty F'(t, x)\, dt\, (I + C_0)^{-1} P_0 \ (x \geqslant 0), \ \| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+ = 0\} \| = (I + C_0)^{-1} P_0, \tag{19}$$

и производящая функция γ^+_x на событии $\{\tau^+_x < \infty\}$ определяется соотношением

$$\int_0^\infty M(e^{-u\gamma^+_x}, \tau^+_x < \infty)\, e^{-\mu x}\, dx = \frac{1}{\mu - u}\left[\mu \int_0^\infty (e^{-\mu\xi(t)}, \xi(t) > 0)\, dt - \right.$$

$$\left. - u \int_0^\infty M(e^{-u\xi(t)}, \xi(t) > 0)\, dt \right] \times$$

$$\times \left[I + C_0 - uP_0 \int_0^\infty M(e^{-u\xi(t)}, \xi(t) > 0) \right]^{-1} P_0. \tag{20}$$

Для доказательства первой части теоремы воспользуемся аналогом результата Такача, точнее, соотношением из работы [6]

$$\| P_{kr}\{\xi^+(t) > x\} \| = \int_0^\infty F'_x(t - u, x \| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(u) = 0\} \|\, du,$$

$$\| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(t) > x\} \| = \| \mathbf{P}\{\xi^+(t) > x; \ x(t) = r/x(0) = k\} \|.$$

После интегрального преобразования по t находим

$$\| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(\theta_s) > x\} \| = s^{-1}\mathbf{P}'_x(s, x) \| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} \|,$$

$$\| \mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(\theta_s) = 0\} \| = [I + s^{-1}P'_x(s, 0)]^{-1} P_s. \tag{21}$$

Применяя к (21) интегральное преобразование по x, нетрудно определить выражение (15) для х. ф. $\xi^+(\theta_s)$.

При установлении соотношения (17) используется результат из работы [7] о совместном распределении $\{\gamma^+_x, \tau^+_x\}$, матричный аналог результата (10). Учитывая соотношение (16), нетрудно показать, что

$$I - Me^{-\mu\xi^+(\theta_s)}(Me^{-u\xi^+(\theta_s)})^{-1} = [\mu M(e^{-\mu\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0) -$$

$$- uM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0)][sI + P'_x(s, 0) - uP_sM(e^{-u\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s) > 0)]^{-1} P_0.$$

Подставляя последнее выражение в матричный аналог соотношения (10) из работы [7], устанавливаем требуемое соотношение (17).

Для доказательства п. Б теоремы 3 достаточно заметить, что при выполнении условия эргодичности цепи $x(t)$ и условия (18) в соотношениях (16) и (17) допустим предельный переход при $s \to 0$, в результате которого и получаются соотношения (19) и (20), определяющие распределение абсолютного максимума и производящую функцию для γ_x^+.

3. Изучение характеристик задачи разорения начнем с вывода определяющих их уравнений. Для этого нам потребуются дополнительные обозначения. Пусть

$$\mathbf{P}\{A; x(t)=r/x(0)=k\}=\mathbf{P}_{kr}\{A\},\ M\{\xi; x(t)=r/x(0)=k\}=M_{kr}\{\xi\},$$

τ_k' — показательная случайная величина, определяющая длительность времени между соседними скачками процесса $x_k(t)$,

$$\mathbf{P}\{\tau_k' > t\}=e^{-\lambda_k t},\ \lambda_k=\int_0^\infty d\Pi_k(x),\ \Lambda=\|\delta_{kr}\lambda_k\|,$$

$$F(x)=\|F_{kr}(x)\|,\ F_{kr}(x)=p_{kr}\mathbf{P}\{\chi_{kr}<x\}.$$

Рассмотрим матрицу $B_c^-(s, x)=\|b_{kr}^-(c; s, x)\|$, $b_{kr}^-(c; s, x)= = M_{kr}\exp\{-s\tau_c^-(x)\}$, для элементов которой по формуле полной вероятности с учетом стохастического представления для $\tau_c^-(x)$ справедливо уравнение $b_{kr}^-(c; s, x)=I_1^{kr}(s, x)+I_2^{kr}(s, x)$, где

$$I_1^{kr}=M_{kr}\{e^{-s(\tau_k'+\tau_c^-(x+\tau_k'-\xi_1))},\ \tau_k'<c-x,\ \tau_k'>\sigma_1\},$$

$$I_2^{kr}(s, x)=\sum_{j\neq k}p_{kj}M_{jr}\{e^{-s(\sigma_1+\tau_c^-(x+\sigma_1-x_{kr}))},\ \sigma_1<T-x,\ \sigma_1<\tau_k'\}.$$

Из этого уравнения следует матричное уравнение

$$B_c^-(s, x)=\int_x^c\int_0^\infty e^{-(\Lambda+N+sI)(y-x)}\,d\Pi(z)\,B_c^-(y-z)\,dz+$$

$$+\int_x^c\int_0^\infty Ne^{-(\Lambda+N+sI)(y-x)}\,dF(z)\,B_c^-(y-z)\,dz,$$

после дифференцирования которого получаем

$$\frac{d}{dx}B_c^-(s, x)=sB_c^-(s, x)+\int_0^\infty d\Pi(z)\,[B_c^-(s, x)-B_c^-(s, x-z)]+$$

$$+N\,[B_c^-(s, x)-\int_0^\infty dF(z)\,B_c^-(s, x-z)]\quad(0\leq x\leq c). \tag{22}$$

В частности, при $F(x) = \| p_{kr}\delta(x \geqslant 0) \|$ интегро-дифференциальное уравнение (22) имеет вид

$$\frac{d}{dx} B_c^-(s, x) = (sI - Q) B_c^-(s, x) + \int_0^\infty d\Pi(z) [B_c^-(s, x) - B_c^-(s, x - z)]. \tag{23}$$

Обозначим через $\tilde{L}_s$ оператор, определяющий уравнение (22):

$$\tilde{L}_s B(s, x) = \left(sI - I\frac{d}{dx}\right) B(s, x) + \int_0^\infty d\Pi(z) [B(s, x) - B(s, x - z)] +$$
$$+ N\left[B(s, x) - \int_0^\infty dF(z) B(s, x - z)\right].$$

Для определения $B_c^-(s, x)$ предстоит решить следующую граничную задачу:

$$\tilde{L}_s B_c^-(s, x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant c); \tag{24}$$

$$B_c^-(s, c) = I \quad (B_c^-(s, x) = 0, x < 0). \tag{25}$$

Рассмотрим цепь $x_*(t)$, обращенную к $x(t)$, с инфинитезимальной матрицей $Q_* = CQ^T C^{-1}$ $(C = NR^{-1}$, $R = \| \delta_{kr}\rho_k \|)$ и процесс $\xi_*(t)$ на цепи $x_*(t)$, определяемый х.ф.

$$M \exp\{i\alpha\xi_*(t)\} = \exp\{tC\Psi^*(\alpha) C^{-1}\}, \tag{26}$$

$\Psi^*(\alpha)$ — матрица, сопряженная к $\Psi(\alpha)$. В отличие от $\xi(t)$, процесс $\xi_*(t)$ непрерывно достигает положительного уровня, имеет отрицательные скачки, определяемые функциями $\Pi_*(x) = \Pi(-x)$, $F_*(x) = I - CF^T(-x) C^{-1}$ $(x < 0)$. В соответствии с обозначениями [8] $\xi_*(t) = -\hat{\xi}(t)$, где $\hat{\xi}(t)$ — обращенный процесс к $\xi(t)$. Обозначим

$$P_*(s, z) = \| \mathbf{P}\{\xi_*(\theta_s) < z, x_*(\theta_s) = r / x_*(0) = k\} \|.$$

Лемма. А. Производящая функция для $\tau_*(z) = \inf\{t : \xi_*(t) > z\}$ определяется соотношением

$$Me^{-s\tau_*(z)} = e^{-zX_*(s)}, \quad X_*(s) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(P_*(s, x)) P_*^{-1}(s, x)\right]_{x=0}, \tag{27}$$

причем $X_*(s)$ удовлетворяет уравнению

$$sI - X_*(s) + \int_0^\infty d\Pi_*(z) [I - e^{zX_*(s)}] + N\left[I - \int_{-\infty}^0 dF_*(z) e^{zX_*(s)}\right] = 0.$$

Б. Для х. ф. процессов $\xi(t)$ и $\xi_*(t)$ выполняются факторизационные разложения

$$Me^{i\alpha\xi(\theta_s)} = Me^{i\alpha\xi^+(\theta_s)}(X_-(s) - i\alpha I)^{-1},$$
$$Me^{i\alpha\xi_*(\theta_s)} = (X_*(s) + i\alpha I)^{-1}Me^{i\alpha[\xi_*(\theta s) - \xi_*^+(\theta)]}, \qquad (28)$$

где $X_*(s) = CX_-^{\mathrm{T}}(s)\, C^{-1}$.

Доказательство первой части леммы следует из результатов работы [9] для процессов, непрерывно достигающих верхнего уровня. Из п. A и аналога тождеств безгранично делимой факторизации для $\xi(t)$ и $\xi_*(t)$ следуют факторизационные разложения (28). Стоит отметить, что аналог оператора $\widetilde{L}_s$ задается следующим образом:

$$\widetilde{L}_*^s B(x) = \left(sI + I\frac{d}{dx}\right) + \int_{-\infty}^{0} d\Pi_*(z)\,[B(x) - B(x-z)] +$$
$$+ N\left[B(x) - \int_{-\infty}^{0} dF_*(z)\, B(x-z)\right].$$

Этим оператором определяются уравнения для $Me^{-s\tau_*^+(x)}$ и других граничных функционалов, связанных с достижением положительного уровня для процесса $\xi_*(t)$. В частности, $\widetilde{L}_*^s Me^{-s\tau_*^+(x)} = 0$, $\tau_*^+(x) = \inf\{t : \xi_*(t) > x\}$ $(x > 0)$.

Предположим, что для цепи $x(t)$ выполнено условие обратимости

$$P_* = R^{-1}P^T R = P. \qquad (29)$$

Это означает, что если в качестве начального распределения для $x(t)$ и $x_*(t)$ выбрано стационарное распределение $\{\rho_k\}_{k=1}^{n_0}$, то $x(t) = x_*(t)$. В условиях обратимости можно решать не только задачи типа (24), (25) на полуоси, но и задачи на отрезке. В частности, решаются задачи, связанные с определением производящих функций моментов разорения $\tau_c^{\pm}(x)$ на отрезке $[0, c]$.

Теорема 4. Если выполнено условие

$$F(x) = CF^T(x)\, C^{-1}, \qquad (30)$$

то при $0 \leqslant x \leqslant c$

$$B_c^-(s, x) = (e^{xX_*(s)} - Me^{-s\tau_x^+})\,(e^{cX_*(s)} - Me^{-s\tau_c^+})^{-1}. \qquad (31)$$

Докажем, что каждая из функций $Me^{-s\tau_x^+}$, $e^{xX_*(s)}$ удовлетворяет уравнению (24). Что касается первой функции, то тем же путем, что и для $B_c^-(s, x)$, нетрудно вывести уравнение для

$$\|\mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(\theta_s) > x\}\| = Me^{-s\tau_x^+}P_s;$$
$$\widetilde{L}_s\|\mathbf{P}_{kr}\{\xi^+(\theta_s) > x\}\| = 0, \quad \widetilde{L}_s Me^{-s\tau_x^+} = 0.$$

Заметим, что в силу предыдущей леммы $\tilde{L}_*^s M e^{-s\tau_*^+(x)} = 0$. Отсюда следует, что

$$sI - X_*(s) + \int_{-\infty}^{0} d\Pi_*(z)\,[I - e^{zX_*(s)}] + $$
$$+ N\left[I - \int_{-\infty}^{0} dF_*(z)\, e^{zX_*(s)}\right] = 0. \qquad (32)$$

Легко показать, что

$$\tilde{L}_s e^{xX_*(s)} = \left\{ sI - X_*(s) + \int_{0}^{\infty} d\Pi(z)\,[I - e^{-zX_*(s)}\right] +$$
$$+ N\left[I - \int_{0}^{\infty} dF(z)\, e^{zX_*(s)}\right]\right\} e^{xX_*(s)}. \qquad (33)$$

В силу условия (30) $dF_*(x) = -dF(-x)$, $d\Pi_*(z) = d\Pi(-z)$. Учитывая (32) и (33), заключаем, что $\tilde{L}_s \exp\{xX_*(s)\} = 0$. Составляя из решений $M\exp\{-s\tau_x^+\}$ и $\exp\{xX_*(s)\}$ уравнения (24) решение, удовлетворяющее условию (25) при $x = c$, находим для $B_c^-(s, x)$ выражение (31).

Относительно условия (30) следует заметить, что в случае $F(x) = \| p_{kr}\delta(x \geqslant 0) \|$ оно совпадает с (29). При полном отсутствии скачков у процесса $\xi(t)$ и наличии диффузионной компоненты оба составных решения, входящие в $B_c^-(s, x)$, являются экспоненциальными функциями, так как $M\exp\{-s\tau_x^+\} = \exp\{-xX_+(s)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1970, вып. 1.
2. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. К., «Наукова думка», 1975.
3. *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов. М., «Мир», 1971.
4. *Печерский Е. А., Рогозин Б. А.* Преобразования совместных распределений случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями.—«Теория вероятностей и ее применения», 1969, 14, № 3.
5. *Гусак Д. В.* Аналог тождества безгранично делимой факторизации для однородных процессов с независимыми приращениями, определяемых на цепи Маркова. — В сб.: Вопросы статистики и управления случайными процессами, К., ИМ АН УССР, 1973.
6. *Єжов І. І., Королюк В. С., Штатланд Е. С.* Про розподіл максимуму процесів з незалежними приростами, керованих ланцюгом Маркова. — «Доповіді АН УРСР», 1969, № 2.
7. *Гусак Д. В., Пересыпкина С. И.* О распределении момента и величины перескока для однородных процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова. — «УМЖ», 1974, 26, № 3.

8. *Гусак Д. В.* Об одном классе процессов с независимыми приращениями на конечной цепи Маркова.— «УМЖ», 25, № 2, 1973.
9. *Gusak D. V.* On the continuous passage through a fixed level of a homogeneous process with independent increments on a Markov chain.— In: Lecture Notes in Math., v. 330, Springer Verlag, 1973.

D. V. Gusak

ON COMPOUND POISSON PROCESS ON THE MARKOV CHAIN

The paper deals with distributions of boundary functionals for compound Poisson process on the finite Markov chain. Using its property of semi-continuity, it is stated that upper functionals and the first exit time from an interval are determined by the distribution of positive part of the process.

Поступила в редколлегию 15.IV 1976.