Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ, проф.,
С. Н. ПАРАМОНОВА, канд. физ.-мат. наук
(Киевский политехнический институт)

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ ПО МЕРАМ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

1. Формула интегрирования по частям не обобщается в буквальном смысле слова на интегралы в бесконечномерном пространстве, поскольку в нем отсутствует инвариантная мера, аналогичная мере Лебега.

Здесь будет описан ряд формул, относящихся к интегрированию по мерам в функциональных пространствах, играющих в ряде задач роль формул интегрирования по частям, и показаны приложения этих формул к некоторым вопросам бесконечномерного анализа. Одним из таких приложений является простое построение хорошо известного ортогонального разложения пространства функций, интегрируемых в квадрате по гауссовой мере [1, 2]. Кроме того, с помощью этих формул решается вопрос существования и оценки расширенных стохастических интегралов, который обсуждался независимо в работах [3—7]. Анализ результатов показал, что несмотря на различие подходов, они являются эквивалентными. Здесь будет показано, что приводимые нами формулы дают простое и непосредственное решение вопроса, не требующее дополнительных построений.

2. Пусть X, X' — пара линейных пространств в двойственности, M — множество σ-аддитивных мер ограниченной вариации на X', Φ — множество их преобразований Фурье: функции на X, представимых в виде

$$f(x)=\int_{X'} e^{i(x,\theta)}\mu(d\theta). \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $G(\theta)$ на X и связанную с ней совокупность $\Phi_G \subset \Phi$ функций $f(x)$, для которых меры в (1) удовлетворяют условию

$$\int_{X'} |G(\theta)||\mu|(d\theta) < \infty. \tag{2}$$

На множестве Φ_G определяется соответствующий символу $G(\theta)$ псевдодифференциальный оператор

$$G\left(\frac{1}{i}D\right)f(x) = \int_{X'} G(\theta)\, e^{i(x,\theta)}\mu(d\theta). \tag{3}$$

Пусть ν — вероятностная мера на X с характеристическим функционалом $\chi(\theta) = \int_X e^{i(x,\theta)}\nu(dx)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H} = L_2(X, \nu)$ функций на X, интегрируемых в квадрате по мере ν. Формула (3) определяет линейный оператор в $\mathfrak{H}$, через $\widetilde{G}\left(\frac{1}{i}D\right)$ обозначим его замыкание, $\Phi_{\widetilde{G}}$ — его область определения (предполагается, что замыкание существует).

Пусть $g \in \mathfrak{H}$ и $G(\theta) = \frac{1}{\chi(\theta)} \int_X g(x)\, e^{i(x,\theta)}\nu(dx)$. Интегрируя равенство

$$\int_X g(x)\, e^{i(x,\theta)}\nu(dx) = \int_X G(\theta)\, e^{i(x,\theta)}\nu(dx)$$

почленно по мере μ из (1) под знаком интеграла, что законно в силу (2), получаем формулу

$$\int_X g(x) \int_{X'} \mu(d\theta)\, e^{i(x,\theta)}\nu(dx) = \int_X \int_{X'} G(\theta)\, e^{i(x,\theta)}\mu(d\theta)\,\nu(dx),$$

которая с учетом (1) и (3) записывается в виде

$$\int_X g(x) f(x)\,\nu(dx) = \int_X G\left(\frac{1}{i}D\right)f(x)\,\nu(dx). \tag{4}$$

Это и есть искомая формула. При помощи предельного перехода она распространяется на $f \in \Phi_{\widetilde{G}}$.

Отметим, что в частном случае, когда $g(x) = (x, \varphi)$ $(\varphi \in X')$ — линейный функционал,

$$G(\theta) = \frac{1}{\chi(\theta)} \int_X (x, \varphi)\, e^{i(x,\theta)}\nu(dx) = \frac{1}{i}([\ln \chi(\theta)]', \varphi). \tag{5}$$

3. Пусть имеется три гильбертовых пространства $H_+ \subset H \subset H_-$ с гильберто-шмидтовскими вложениями $(X = H_-,\ X' = H_+)$ и (x, y),

$\|x\|$ — скалярное произведение и норма в H. Обозначение (x, θ) применяется и для спаривания элементов $\theta \in H_+$ и $x \in H_-$ (совпадающего при $x \in H$ со скалярным произведением). Для других пространств скалярные произведения и нормы будут снабжаться специальными индексами, например $\|\theta\|_+$ для H_+, $\|f\|_K$ для пространства K и т. п.

Пусть K — гильбертово пространство, $\{e_j\}$, $\{\varphi_j\}$ — фиксированные ортонормированные базисы в H и K соответственно; $L(H, K)$, $L_m(H, K)$ — пространства соответственно линейных и m-линейных огранченных операторов из H в K; $S(H, K), S_m(H, K)$ — подпространства этих пространств, состоящие из операторов Гильберта — Шмидта: $A \in S_m(H, K)$ при условии

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_m=1}^{\infty} \|A(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_m})\|_K^2 = \sigma_2^2(A) < \infty.$$

При $A, B \in S_m(H, K)$

$$(A, B)_{S_m(HK)} = \sum_{j_1, \ldots, j_m=1}^{\infty} (A(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}), B(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}))_K.$$

Для $A \in L_2(H, K)$ полагаем $\operatorname{Sp} A = \sum_{j=1}^{\infty} A(e_j, e_j)$, если $\sum_{j=1}^{\infty} \|A(e_j, e_j)\|_K < \infty$.

При $A, B \in S(H, K)$, $\sigma_2(A) = \|A\|_{S(H,K)}$ $\operatorname{Sp} B^* A = (A, B)_{S(H,K)}$.

Элементы $L_m(H, K)$ естественно отождествляются с элементами $L_j(H, L_{m-j}(H, K))$: $[A(f_1, \ldots, f_j)](g_1, \ldots, g_{m-j}) = A(f_1, \ldots, f_j, g_1, \ldots, g_{m-j})$. Для $j = 2$ можно определить след $\operatorname{Sp} A \in L_{m-2}(H, K)$ $(\operatorname{Sp} A)(g_1, \ldots, g_{m-2}) = \sum_{j=1}^{\infty} A(e_j, e_j; g_1, \ldots, g_{m-2})$ при условии абсолютной сходимости ряда справа.

При $A \in L_2(H, K)$ полагаем $\check{A}(f, g) = A(g, f)$. Производная (вдоль H) функции $f(x)$, определенной на H_- и принимающей значения из K, понимается как элемент $f'(x) \in L(H, K)$, для которого $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(\|h\|)$ $(h \in H,\ x \in H_-)$.

Для функций $f(x)$ $(x \in H_-)$ со значениями из K $\mathfrak{H}(K, \nu)$ — гильбертово пространство с нормой $|||f|||^2 = \int_{H_-} \|f(x)\|_K^2 \nu(dx)$; $\mathfrak{D}_j(K)$ — — пространство непрерывных и ограниченных функций (при $j = 0$), имеющих непрерывную ограниченную первую производную $f'(x) \in S_1(H, K)$ (при $j = 1$); $\mathfrak{H}_1(K, \nu)$ — гильбертово пространство, получающееся путем пополнения $\mathfrak{D}_1(K)$ по норме $|||f|||_1^2 = |||f|||^2 + \int_{H_-} \sigma_2^2(f'(x))\, \nu(dx)$.

4. Применим (4) к гауссовой с нулевым средним мере ν. Без ограничения общности можно считать, что эта мера сосредоточена в H_- и имеет тождественный в H корреляционный оператор. Характеристический функционал такой меры имеет вид

$$\chi(\theta) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2} \quad (\theta \in H_+). \tag{6}$$

Отметим, что он определен не только на H_+, но и на более широком пространстве H. Это соответствует тому хорошо известному факту, что при $\theta \in H$ выражение (x, θ) определено как линейный измеримый функционал на H_-, обладающий свойствами $\int\limits_{H_-} (x, \theta)\, \nu(dx) = 0$; $\int\limits_{H_-} |(x, \theta)|^2 \nu(dx) = \|\theta\|^2$.

Нам понадобится более общий факт.

Лемма. Оператор $A \in S(H, K)$ имеет измеримое линейное продолжение $\tilde{A}$ на H_-, причем $\int\limits_{H_-} \tilde{A}x\nu(dx) = 0$; $\int\limits_{H_-} \|\tilde{A}x\|_K^2 \nu(dx) = \sigma_2^2(A)$.

Доказательство. При $x \in H$ имеет место разложение

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax, \varphi_k)\, \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, A^*\varphi_k)\, \varphi_k. \tag{7}$$

Как указано выше, функционалы $(x, A^*\varphi_k)$ определены на пространстве H_-, поэтому на нем определены операторы $A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, A^*\varphi_k)\, \varphi_k$. Выражение

$$\int\limits_{H_-} \|A_n x - A_{n+p} x\|^2 \nu(dx) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \int\limits_{H_-} |(x, A^*\varphi_k)|^2 \nu(dx) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A^*\varphi_k\|^2 \tag{8}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, и поэтому существует предел в среднем квадратичном

$$\tilde{A}x = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \sum_{k=1}^{n} (x, A^*\varphi_k)\, \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x, A^*\varphi_k)\, \varphi_k. \tag{7'}$$

Формула (6) следует из (7') при $n = 0$ и $p \to \infty$, поскольку $\sigma_2(A^*) = \sigma_2(A)$.

Основной результат сформулируем в виде теоремы, которую докажем путем рассмотрения двух частных случаев, представляющих самостоятельный интерес.

Теорема 1. Пусть $f(x), g(x) \in \mathfrak{H}_1(S(H, K), \nu)$, $A, B \in S(H, K)$. Тогда справедливы равенства

$$\int\limits_{H_-} f(x)\, Ax\nu(dx) = \int\limits_{H_-} \mathrm{Sp}\, [f(x)\, A]' \nu(dx), \tag{9}$$

$$\int_{H_-} (f(x) Ax - \mathrm{Sp}\,[f(x) A]', g(x) Bx - \mathrm{Sp}\,[g(x) B]') \, \nu(dx) =$$

$$= \int_{H_-} \{(f(x) A, g(x) B)_{S(H,K)} + ([f(x) A]', [g(x) B]')_{S_2(H,K)}\} \, \nu(dx). \quad (10)$$

При A, сильно сходящемся к I, определена как предел в среднем квадратичном измеримая функция на H_-

$$\alpha(f; x) = \lim_{A \to I} (f(x) Ax - \mathrm{Sp}\,[f(x) A]'), \quad (11)$$

для которой $\int_{H_-} \alpha(f; x) \, \nu(dx) = 0$,

$$\int_{H_-} (\alpha(f; x), \alpha(g; x))_K \nu(dx) = \int_{H_-} \{(f(x), g(x))_{S(H,K)} +$$

$$+ (f'(x), g'(x))_{S_2(H,K)}\} \, \nu(dx).$$

Замечание. Для $f(x) \in \mathfrak{H}_1(S(H_-, K))$ в (11) можно перейти к пределу почленно: $\alpha(f; x) = f(x) x - \mathrm{Sp}\, f'(x)$.

5. Первый из рассматриваемых частных случаев получается при $K = R^1$, $A(x) = (x, \varphi)$.

Теорема 2. Пусть $f(x), g(x) \in \mathfrak{H}_1(R^1, \nu)$; $\varphi, \psi \in H$. Тогда

$$\int_{H_-} f(x)(x, \varphi) \, \nu(dx) = \int_{H_-} (f'(x), \varphi) \, \nu(dx), \quad (12)$$

$$\int_{H_-} [f(x)(x, \varphi) - (f'(x), \varphi)] [g(x)(x, \psi) - (g'(x), \psi)] \, \nu(dx) =$$

$$= (\varphi, \psi) \int_{H_-} f(x) g(x) \, \nu(dx) + \int_{H_-} (f'(x), \psi)(g'(x), \varphi) \, \nu(dx). \quad (13)$$

Доказательство. Формула (12) следует из (4), так как в данном случае для $g(x) = (x, \varphi)$ из (5) и (6) находим $G(\theta) = i(\varphi, \theta)$ и $G\left(\frac{1}{i} D\right) f(x) = (\varphi, D) f(x) = (\varphi, f'(x))$.

Для доказательства (13) предположим сначала, что $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и непрерывны вместе с двумя производными. Применив (12) к произведению $f(x) g(x)$, получим соотношение

$$\int_{H_-} [f(x)(x, \varphi) - (f'(x), \varphi)] \, g(x) \, \nu(dx) = \int_{H_-} f(x)(g'(x), \varphi) \, \nu(dx). \quad (14)$$

Формула (13) получается, если подставить в формулу (14) вместо $g(x)$ последовательно $g(x)(x, \psi)$ и $(g'(x), \psi)$ и вычесть почленно полученные соотношения. При $f = g$ и $\varphi = \psi$ имеем равенство

$$\int_{H_-} [f(x)(x, \varphi) - (f'(x), \varphi)]^2 \nu(dx) = \|\varphi\|^2 \int_{H_-} |f(x)|^2 \nu(dx) +$$

$$+\int_{H_-} |(f'(x), \varphi)|^2 \nu(dx), \tag{15}$$

показывающее, что при $f(x) \in \mathfrak{H}_1(R^1, \nu)$ $f(x)(x, \varphi) \in \mathfrak{H}(R^1, \nu)$.

Мы видим, что левая и правая части (13) являются непрерывными билинейными функционалами на $\mathfrak{H}_1(R^1, \nu)$, совпадающими на плотном в нем множестве. Это полностью доказывает теорему.

6. Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда функции $f(x)$, $g(x)$ не скалярные, а векторные.

Теорема 3. Пусть $f(x)$, $g(x) \in \mathfrak{H}_1(K, \nu)$; $A, B \in S(H, K)$. Тогда

$$\int_{H_-} (f(x), \tilde{A}x)_K \nu(dx) = \int_{H_-} \mathrm{Sp}_K f'(x) A^* \nu(dx), \tag{16}$$

$$\int_{H_-} [(f(x), \tilde{A}x) - \mathrm{Sp}_K f'(x) A^*] [(g(x), \tilde{B}x) - \mathrm{Sp}_K g'(x) B^*] \nu(dx) =$$

$$= \int_{H_-} \{(A^* f(x), B^* g(x)) + \mathrm{Sp}\, A^* f'(x) B^* g'(x)\} \nu(dx). \tag{17}$$

При $A \in L(H, K)$ определена как предел в среднем квадратичном измеримая функция на H_-

$$\beta(A, f; x) = \lim_{A_n \to A} [(f(x), \tilde{A}_n x) - \mathrm{Sp}\, f'(x) A_n^*],$$

$A_n \in S(H, K)$ — сильно сходящаяся последовательность.

Кроме того,

$$\int_{H_-} \beta(A, f; x) \beta(B, g; x) \nu(dx) = \int_{H_-} \{(A^* f(x), B^* g(x)) +$$

$$+ \mathrm{Sp}\, A^* f'(x) B^* g'(x)\} \nu(dx).$$

Доказательство. Из (7′) следует сходящееся в среднем квадратичном разложение $(f(x), \tilde{A}x)_K = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \varphi_k)_K (x, A^* \varphi_k)$. Интегрируя его почленно и используя (12), получаем формулу (16):

$$\int_{H_-} (f(x), \tilde{A}x)_K \nu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \varphi_k)_K (x, A^* \varphi_k) \nu(dx) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{H_-} (f'(x) A^* \varphi_k, \varphi_k) \nu(dx) = \int_{H_-} (\mathrm{Sp}\, f'(x) A^*) \nu(dx).$$

Для доказательства формулы (17) рассмотрим разложение

$$(f(x), \tilde{A}_1 x) - \mathrm{Sp}_K f'(x) A_1^* = \sum_{k=1}^{\infty} [(f(x), \varphi_k)(A_1^* \varphi_k, x) - (f'(x) A_1^* \varphi_k, \varphi_k)]$$

и аналогичное разложение для $(g(x), \widetilde{A}_2 x) - \mathrm{Sp}_K g'(x) A_2^*$. Перемножив их, проинтегрировав (пока что формально) почленно и воспользовавшись формулой (13), получим искомую формулу.

Остается обосновать законность предельного перехода под знаком интеграла. Методика этого доказательства следующая. Пусть сначала используемые ряды содержат лишь конечное число слагаемых (A и $B \in S_0(H, K)$). Формулу (17) в этом случае можно считать доказанной. В частности, при $g = f$ и $A_1 = A_2 = A$ имеем

$$\int_{H\_} [(f(x), \widetilde{A}x) - \mathrm{Sp}_K f'(x) A^*]^2 \nu(dx) = \int_{H\_} \{\| A^* f(x) \|^2 + $$
$$+ \mathrm{Sp}_K [f'(x) A^*]^2\} \nu(dx). \tag{18}$$

Левая и правая части этого равенства непрерывны по A на пространстве $S(H, K)$ и совпадают на плотном в нем множестве, поэтому для любого $f \in \mathfrak{H}_1(K)$, $A \in S(H, K)$ $[(f(x), Ax) - \mathrm{Sp}_K f'(x) A^*] \in \mathfrak{H}(K)$ и справедливо равенство (18).

Теперь уже можно перейти к пределу и в билинейной формуле или прямо вывести ее из квадратичного варианта.

Докажем, наконец, последнее утверждение теоремы. При $A \in S(H, K)$ $\beta(A, f; x) = (f(x), \widetilde{A}x) - \mathrm{Sp}\, f'(x) A^*$ и в силу (18)

$$\int_{H\_} |\beta(A, f; x)|^2 \nu(dx) = \int_{H\_} \{ \| A^* f(x) \|^2 + \mathrm{Sp}\, [f'(x) A^*]^2\} \nu(dx). \tag{18'}$$

Правая часть этой формулы допускает предельный переход при $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ в сильном смысле, откуда следует существование для $A \in L(H, K)$ предела $\beta(A, f; x) = \underset{A_n \to A}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, \beta(A_n, f; x)$ и формулы (18'), являющейся квадратичным вариантом (17'). Билинейная формула (17') теперь получается предельным переходом из (17).

7. Перейдем к доказательству теоремы 1. Ее можно свести к теореме 3, рассматривая при произвольном $\varphi \in K$ выражение $(f(x)\widetilde{A}x, \varphi) = (f^*(x)\varphi, \widetilde{A}x)$. При этом понадобятся некоторые вспомогательные формулы. Дифференцируя почленно равенство $(f(x) A\psi, \varphi)_K = (\psi, A^* f^*(x) \varphi)$ $(\varphi \in K, \psi \in H)$, получаем соотношение $(f'(x)(h, A\psi), \varphi)_K = (\psi, A^* f^{*\prime}(x)(h, \varphi))$ $(\psi, h \in H, \varphi \in K)$, из которого следует

$$(A^* [f^*(x)\varphi]' e_s, e_j) = (A^* f^{*\prime}(x)(e_s, \varphi), e_j) = (f'(x)(e_s, Ae_j), \varphi)_K.$$

Поэтому

$$\mathrm{Sp}\, A^* [f^*(x)\varphi]' = \sum_{s=1}^{\infty} (f'(x)(e_s, Ae_s), \varphi)_K = (\mathrm{Sp}\,(f(x) A)', \varphi)_K, \tag{19}$$

$$\operatorname{Sp} A^* [f^* (x) \varphi]' B^* [g^* (x) \varphi]' = \sum_{s,j=1}^{\infty} (f' (x) e_s, Ae_j), \varphi)_K (g' (x) \times$$

$$\times (e_j, Be_s), \varphi)_K = \sum_{s,j=1}^{\infty} ((f(x) A)' (e_s, e_j), \varphi)_K ((g(x) B)' (e_j, e_s), \varphi)_K,$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Sp} A^* [f^* (x) \varphi_m]' B^* [g^* (x) \varphi_m]' = \sum_{s,j=1}^{\infty} ((f(x) A)' (e_s, e_j), (g(x) B)' \times$$

$$\times (e_j, e_s) = ((f(x), A)', (\breve{g}(x), B)')_{S_2(H,K)}. \qquad (20)$$

Нетрудно проверить, что при рассматриваемых предположениях все рассуждения корректны, поскольку ряды в приведенных выше выкладках сходятся.

Применим теперь теорему 3. Прежде всего из (16) и (19) следует

$$\int_{H_-} (f(x) \tilde{A}x, \varphi)_K \nu(dx) = \int_{H_-} (\tilde{A}x, f^* (x) \varphi) \nu(dx) =$$

$$= \int_{H_-} \operatorname{Sp} A^* [f^* (x) \varphi]' \nu(dx) = \int_{H_-} (\operatorname{Sp} (f(x) A)', \varphi)_K \nu(dx),$$

что приводит к (9) в силу произвольного $\varphi \in K$.

Далее, используя разложение

$$f(x) \tilde{A}x - \operatorname{Sp} [f(x) A]' = \sum_{m=1}^{\infty} (f(x) \tilde{A}x - \operatorname{Sp} [f(x) A]', \varphi_m) \varphi_m =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \{(\tilde{A}x, f^* (x) \varphi_m) - \operatorname{Sp} A^* (f^* (x) \varphi_m)'\} \varphi_m$$

и такое же разложение для $g(x)$, получаем с учетом (17) и (20)

$$\int_{H_-} (f(x) \tilde{A}x - \operatorname{Sp} [f(x) A]', g(x) \tilde{B}x - \operatorname{Sp} [g(x) B]') \nu(dx) =$$

$$= \int_{H_-} \{(A^* f^* (x), B^* g^* (x))_{S(H,K)} + ((f(x) A)', (g \breve{(x)} B)')_{S_2(H,K)} \nu(dx),$$

что приводит к (10).

8. Формулы типа (10) и (17) позволяют дать простую трактовку понятия расширенного стохастического интеграла как функционала на пространстве с гауссовой мерой. Без ограничения общности можно рассматривать случай, когда ν — каноническая гауссова мера на H_-, имеющая единичный корреляционный оператор в H.

Простейшими из этих функционалов являются измеримые линейные функционалы вида (φ, x), определенные, как указывалось выше, при $\varphi \in H$.

Задача состоит в том, чтобы суметь вместо постоянного элемента $\varphi \in H$ подставить в (φ, x) функцию $f(x)$ со значениями в H.

Функционал $(f(x), x)$ легко определяется при $f(x) \in \mathfrak{Y}_+$. Если эта функция дифференцируема, то определен также функционал $\beta(f, x) = (f(x), x) - \operatorname{Sp} f'(x)$.

Теорема 3 показывает, что именно этот функционал распространяется на гладкие функции со значениями в H, а формула (17) дает оценку для его второго момента.

9. В заключение покажем, как, используя формулы (10), (17), построить состоящие из многочленов ортогональные в $\mathfrak{H}(H, K, \nu)$ подпространства.

Каждой симметричной форме $A_n \in S_n(H, K)$ сопоставляется многочлен $\widetilde{A}_n(x)$ следующим образом. Пусть рассматриваемые формы конечномерны, так что все выписываемые ниже выражения имеют смысл.

При $n=1$ полагаем $\widetilde{A}_1(x) = A_1 x \in K$. При $n=2$, рассматривая $A_2 \in S_2(H, K)$ как элемент $\widetilde{A}_{21}$ пространства $S_1(H, S_1(H, K))$, построим сначала $\widetilde{A}_{21}(x) = A_2 x \in S_1(H, K)$, затем $\widetilde{A}_2(x) = \alpha(\widetilde{A}_{21}, x) = A_2 x^2 - \operatorname{Sp} A_2 \in K$. При этом $\widetilde{A}_2'(x) = 2\widetilde{A}_{21}(x)$. Вообще, при любом $k \geqslant 1$ для каждого $A_k \in S_k(H, K)$ строятся формы $\widetilde{A}_{kj}$ порядка $j < k$ со значениями в пространствах $S_{k-j}(H, K)$.

Пусть для форм порядка $k \leqslant l$ уже определены многочлены $\widetilde{A}_k(x)$ так, что $\widetilde{A}_k(x) = \alpha(\widetilde{A}_{kk-1}, x) = \widetilde{A}_{kk-1}(x)\, x - \operatorname{Sp} \widetilde{A}'_{kk-1}(x)$ и $\widetilde{A}'_k(x) = k\widetilde{A}_{kk-1}(x)$.

Форму $A_{l+1} \in S_{l+1}(H, K)$ можно трактовать как элемент A_{l+1l} пространства $S_l(H, S_1(H, K))$ и, по предположению, построить

$$\widetilde{A}_{l+1l}(x) = \alpha(\widetilde{A}_{l+1l-1}, x) = \widetilde{A}_{l+1l-1}(x)\, x - \operatorname{Sp} \widetilde{A}'_{l+1l-1}(x) =$$
$$= \widetilde{A}_{l+1l-1}(x) - (l-1) \operatorname{Sp} \widetilde{A}_{l+1l-2}(x).$$

Положим

$$\widetilde{A}_{l+1}(x) = \alpha(\widetilde{A}_{l+1l}(x), x) = \widetilde{A}_{l+1l}(x)\, x - l \operatorname{Sp} \widetilde{A}_{l+1l-1}(x),$$

тогда $\widetilde{A}'_{l+1}(x) = \widetilde{A}_{l+1l}(x) + \widetilde{A}_{l+1l}x - l \operatorname{Sp} \widetilde{A}'_{l+1l-1}(x)$ или в силу предположения индукции

$$\widetilde{A}'_{l+1}(x) = \widetilde{A}_{l+1l}(x) + l\widetilde{A}_{l+1l-1}(x) - l(l-1) \operatorname{Sp} \widetilde{A}_{l+1l-1}(x) =$$
$$= \widetilde{A}_{l+1l}(x) + l[\widetilde{A}_{l+1l-1}x - (l-1) \operatorname{Sp} \widetilde{A}_{l+1l-2}] +$$
$$+ l(l-1) \operatorname{Sp} \widetilde{A}_{l+1l-2} = (l+1) \widetilde{A}_{l+1l}(x).$$

Тем самым наши предположения по индукции проверены. Так же по индукции легко получается формула

$$\int_{H_-} (\widetilde{A}_k(x), \widetilde{B}_k(x))_K \nu(dx) = k!\,(A_k, B_k)_{S_k(H,K)}. \tag{21}$$

Таким образом, для конечномерных форм построение закончено. Формула (21) показывает, что, переходя к пределу в среднем квадратичном, можно определить многочлен $\widetilde{A}_k(x)$ для любого симметричного $A_k \in S_k(H, K)$.

Используем теперь формулу (10). Для любых $\widetilde{A}_k(x)$, $\widetilde{B}_s(x)$ имеем

$$\int_{H_-} (\widetilde{A}_{k+1}(x), \widetilde{B}_{s+1}(x))_K \nu(dx) = \int_{H_-} (\alpha(\widetilde{A}_k, x), \alpha(\widetilde{B}_s, x))_K \nu(dx) =$$

$$= \int_{H_-} \{(\widetilde{A}_{k+1k}(x), \widetilde{B}_{s+1s}(x))_{S(H,K)} + (\widetilde{A}'_{k+1k}(x), \widetilde{B}'_{s+1s}(x))_{S_2(H,K)}\} \times$$

$$\times \nu(dx) = \int_{H_-} \{(\widetilde{A}_{k+1k}(x), \widetilde{B}_{s+1s}(x))_{S(H,K)} + ks(\widetilde{A}_{k+1k-1}(x),$$

$$\widetilde{B}_{s+1s-1}(x))\} \nu(dx) \tag{22}$$

(Здесь мы воспользовались симметрией многочленов и отбросили знак $^\vee$). Из этой формулы следует ортогональность $\int_{H_-} (\widetilde{A}_k(x), \widetilde{B}_s(x))\nu \times$ $\times (dx) = 0$ $(k \neq s)$. Действительно, она очевидна при $s = 0$, так как $\widetilde{B}(x) = \mathrm{const}$, а (22) позволяет понизить порядок форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. 1. М., «Наука», 1971.
2. *Вершик А. М.* К теории нормальных динамических систем. — «ДАН СССР». 1962, 144, 1.
3. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Стохастические интегралы относительно случайной; нормально распределенной функции множеств. — «ДАН СССР», 1973, 208, 3.
4. *Далецкий Ю. Л., Парамонова С. Н.* Об одной формуле теории гауссовых мер и оценке стохастических интегралов. — «Теория вероятностей и ее применения», 1974, 19, 4.
5. *Hitsuda M.* Formula for Brownian partial derivatives. — Second Japan — USSR symposium on probability theory, v. 2. Kyoto, 1972.
6. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла. — «Теория вероятностей и ее применения», 1975, 20, 2.
7. *Кабанов Ю. М., Скороход А. В.* Расширенные стохастические интегралы. — Труды школы-семинара по теории случайных процессов, т. 1. Вильнюсский университет, 1975.

Y. L. Daletsky, S. N. Paramonova

THE INTEGRATION BY PARTS WITH RESPECT TO MEASURES ON THE FUNCTIONAL SPACE. 1

The paper deals with some formulas of integration with respect to measures on the functional space, which are analogical to the formula of integration by parts.

These formulas are used for the constructing stochastic integrals with respect to a normally or Poisson's distributed additive set functions.

Поступила в редколлегию 15.X 1975.