with continuous coefficients $\alpha(t, \varphi)$ and $\beta(t, \varphi)$, $t \in [0, T]$, $\varphi \in D_{[0,T]}$($D$— the space of functions without discontinuities of second kind) is proved. The absolute continuity of corresponding measures is investigated.

Поступила в редколлегию 20.11 1976.

Н. В. КАРТАШОВ, асп., Киевский университет

## О ЯВНЫХ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

1. Рассмотрим уравнение восстановления

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s)\,dF(s). \qquad (1)$$

Известно ([1], с. 427), что если $F(s)$ нерешетчата, $y$ — непосредственно интегрируема на $[0, \infty)$, то

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty y(s)\,ds, \qquad \mu = \int_0^\infty s\,dF(s).$$

В работах [2—4] из существования у $F(t)$ моментов (показательных или степенных) и условий асимптотической нерешетчатости получена оценка скорости сходимости $x(t) - x_0$ к нулю (соответственно показательная или степенная). В частности, из результатов [2] следует, что если $F$ имеет абсолютно непрерывную компоненту и экспоненциальный момент, то

$$x(t) - x_0 = o(e^{-\varepsilon t}) \text{ для } \varepsilon < \min\left\{\sup\left(\mu: \int_0^\infty e^{\mu t}\,|y(t)|\,dt < \infty\right),\right.$$

$$\left.\sup\left(\mu: \int_0^\infty e^{\mu t}\,dF(t) < \infty\right)\right\}$$

(приложение 1, теорема 3).

Методы, применяемые в работах [2—4], не позволяют получить явные оценки для $|x(t) - x_0|$. Ниже для некоторых классов распределений получены такие оценки.

2. Введем следующие обозначения:

$$x*y = \int_0^t x(t-s)\,y(s)\,ds,$$

$$e(x) = \sup\left(\varepsilon: \int_0^\infty |x(t)|\,e^{\varepsilon t}\,dt < \infty\right),$$

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{t\geqslant 0} e^{\varepsilon t}|x(t)|,$$

$$\widehat{x}(\varepsilon) = \int_0^\infty e^{\varepsilon t} x(t)\,dt,$$

$$x_\alpha(\varepsilon) = \int_0^\infty (1+\varepsilon t)^\alpha x(t)\,dt,$$

$$s(x) = \sup\left(\alpha > 0 : \int_0^\infty (1+t)^\alpha |x(t)|\,dt < \infty\right),$$

$$\bar{s}(x) = \sup(\alpha > 0 : \exists C,\ |x(t)| \leqslant C(1+t)^{-\alpha}),$$

$$D_{\alpha,\gamma}(x) = \sup_{t\geqslant 0}(1+\gamma t)^\alpha |x(t)|,$$

$(t)\downarrow 0$ — функция $R(t)$ монотонно убывает к нулю, $h(t)$ — плотость распределения, $H(t) = 1 - \int_0^t h(s)\,ds$ — «хвост» распределения плотностью $h$.

**Теорема 1.** Пусть $x(t)$ удовлетворяет (1) и:

A) $F(t)$ имеет плотность $h(t)$, $e(h) > 0$;

B) существуют $\gamma > 0$, $\varphi(t)$, $e(\varphi) > 0$, такие, что

$$R(t) = \gamma H(t) - h(t) + \varphi(t) - \int_0^t \varphi(t-s)\,h(s)\,ds \downarrow 0, \quad t \geqslant 0;$$

C) $e(y) > 0$, $\int_0^\infty y(s)\,ds = 0$.

Тогда для $0 < \varepsilon < \min(e(h), e(y), e(\varphi))$ таких, что

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \int_0^\infty R(t)\exp\left(\varepsilon t - \int_0^t \rho(s)\,R(s)\,ds\right)dt > 0,$$

$$\rho(s) = \inf_{u\geqslant 1}\frac{R(u)}{R(u+s)} \geqslant 1, \quad s \geqslant 0,$$

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \frac{2-\delta(\varepsilon)}{\varepsilon\delta(\varepsilon)\widehat{H}(\varepsilon)} \cdot \frac{\gamma+\varepsilon+\varepsilon\widehat{\varphi}(\varepsilon)}{\gamma-\varepsilon-\varepsilon\widehat{\varphi}(\varepsilon)} \cdot \|y\|_\varepsilon.$$

*Замечания.* 1. Нетрудно видеть, что $\delta(\varepsilon)\downarrow$, $\delta(0) \geqslant$ $\exp\left(-\int_0^\infty R(s)\,ds\right) > 0$ так, что оценка в теореме содержательна.

2. Условию $\int_0^\infty y(s)\,ds = 0$ соответствует $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

3. Для выполнения $B$ достаточно выполнения условия:

$$\mathrm{B}_1)\ h(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} dL(s),$$

где $L$ — некоторая функция распределения.

Класс плотностей, удовлетворяющих $B_1$, замкнут относительн операций свертки и выпуклой комбинации и содержит, в частности все экспоненциальные многочлены, дробно-рациональные плот ности, гамма-плотности.

Доказательство. Положим $\alpha(t) = \gamma + \varphi(t)$, свер нем $\alpha(t)$ с (1) и вычтем из (1). Получим

$$x = y_1 - x * R. \qquad (2$$

Аналогичным образом (2) сводится к

$$x = y_2 + x * (\psi + \psi * R - R). \qquad (3$$

Положим $\psi(t) = R(t) \exp\left(-\int_0^t \rho(s) R(s)\, ds\right)$, $a = \psi + \psi * R - R$.

Тогда из условия монотонности $R$

$$\psi(t) + \int_0^t \psi(s) R(t-s)\, ds \geqslant \psi(t) + R(t) \int_0^t \rho(s) \psi(s)\, ds = R(t),$$

т. е. $a(t) \geqslant 0$;

$$\int_0^\infty a(s)\, ds = 1 - \left(1 + \int_0^\infty R(s)\, ds\right)\left(1 - \int_0^\infty \psi(s)\, ds\right) < 1,$$

так как

$$\int_0^8 \psi(s)\, ds \leqslant \int_0^\infty R(t) \exp\left(-\int_0^t R(s)\, ds\right) dt = 1 - \exp\left(-\int_0^\infty R(t)\, dt\right) < 1$$

Таким образом, $x(t)$ удовлетворяет уравнению восстановления (3 с несобственной неотрицательной плотностью $a(t)$. Из леммы сравнения для уравнения восстановления ([1], с. 253) следует ут верждение теоремы.

Примеры. 1. Пусть $h(t)$ удовлетворяет $B_1$. Тогда $\varphi = 0$

$$\gamma = \lambda, \quad R(t) = \lambda(1 - L(t)), \quad m = \int_0^\infty (1 - L(t))\, dt, \quad \delta(\varepsilon) \geqslant e^{-\lambda m} -$$

$$- \int_0^\infty \frac{e^{\varepsilon s} - 1 - \varepsilon s}{\varepsilon}\, dL(s), \quad \|x\|_\varepsilon \leqslant \frac{(2 - \delta(\varepsilon))(\lambda + \varepsilon)}{\delta(\varepsilon)(\varepsilon + \varepsilon\lambda \widehat{L}(\varepsilon))} \cdot \|y\|_\varepsilon.$$

2. $h(t)=\frac{\alpha^{n+1}t^n}{n!}e^{-\alpha t}$, $\gamma=\lambda$, $\varphi=0$, $n\geqslant 1$, $\delta(\varepsilon)=1-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{2\alpha-\varepsilon}\right)^k$,

$x\|_\varepsilon\leqslant\frac{2-\delta(\varepsilon)}{\delta(\varepsilon)}\cdot\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-\varepsilon}\left[\left(\frac{\alpha}{\alpha-\varepsilon}\right)^{n+1}-1\right]^{-1}\|y\|_\varepsilon$.

**Теорема 2.** Пусть $x(t)$ удовлетворяет (1),

А) $F(t)$ имеет плотность $h(t)$, $s(h)>\alpha+1$, $\alpha>0$;

В) существуют $\gamma>0$, $\varphi(t)$, $s(\varphi)>\alpha$, такие, что

$$R(t)=\gamma H(t)-h(t)+\varphi(t)-\int_0^t\varphi(t-s)h(s)\,ds\downarrow 0;\quad t\geqslant 0;$$

С) $\bar{s}(y)\geqslant\alpha+1$, $\int_0^\infty y(t)\,dt=0$.

Тогда для $\varepsilon>0$ такого, что

$$\delta(\varepsilon)=1-\int_0^\infty(1+\varepsilon t)^\alpha R(t)\exp\left(-\int_0^t\rho(s)R(s)\,ds\right)dt>0,$$

$$D_{\alpha,\varepsilon}(x)\leqslant\frac{(2-\delta(\varepsilon))(1-R_\alpha(\varepsilon))}{\delta(\varepsilon)}\left[(1+\varphi_\alpha(\varepsilon))D_{\alpha,\varepsilon}(y)+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma}{\varepsilon\alpha}D_{\alpha+1,\varepsilon}(y)\right].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Лемма сравнения применяется к функциям $x(t)$ и $C(1+\varepsilon t)^{-\alpha}$.

**Теорема 3.** Пусть $x(t)$ удовлетворяет (1),

А) $F(t)$ имеет плотность $h(t)$, $e(h)>0$;

В) существует $\gamma>0$ такая, что $h(t)-\gamma H(t)=\rho(t)-R(t)$, ричем $e(\rho)>0$, $\rho(t)\geqslant 0$, $\int_0^\infty\rho(t)\,dt=\rho_0<1$ и $R(t)\downarrow 0$, $\int_0^\infty R(t)dt=$ $=R_0<\rho_0+\alpha_0$, где $\alpha_0>0$ корень уравнения $e^{-\alpha_0}=\rho_0\int_{-\rho_0}^{\alpha_0}\frac{e^{-v}}{1+v}\,dv$;

С) $\int_0^\infty y(t)\,dt=0$, $e(y)>0$.

Тогда для $0<\varepsilon<\min(\gamma, e(y), e(h), e(\rho))$ таких, что $\widehat{\rho}(\varepsilon)<1$,

$$\delta(\varepsilon)=1-\int_0^\infty R(t)\exp\left(\varepsilon t-\int_0^t R(s)\,ds\right)\frac{1+\int_0^t R(s)\,ds}{1-\widehat{\rho}(\varepsilon)+\int_0^t R(s)ds}\,dt>0,$$

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \frac{2-\delta(\varepsilon)}{\varepsilon\delta(\varepsilon)\,\widehat{H}(\varepsilon)} \cdot \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}\|y\|_\varepsilon.$$

*Замечания.* 1. Из условия $B$ следует, что $\delta(0) > 0$, $\hat{\rho}(0) = \rho_0 < 1$.

2. Условию $B$ теоремы 3 удовлетворяют все плотности $h$ (
такие, что:

$$B_1\ \gamma = \inf_{t\geqslant 0} \frac{h(t)}{H(t)} > 0.$$

При этом $R \equiv 0$, $\rho = h - \gamma H$ и $\varepsilon$ выбирается из единственног условия $0 < \varepsilon < \min(\gamma, e(h), e(y))$. Для выполнения $B_1$ необхс димо и достаточно $e^{\gamma t}H(t) \downarrow 0$. В частности, все распределения сосредоточенные на конечном интервале с плотностью, отделенно от нуля, удовлетворяют $B_1$.

Доказательство. Как и в теореме 1, сведем (1) к

$$x = y_2 + x*(\psi + \psi * R - R + \rho - \rho * \psi). \tag{4}$$

Положим

$$\psi = \sum_{j\geqslant 0} \psi_j * \rho^{*j}, \tag{5}$$

где $\psi_j(t) = R(t)\exp\left(-\int\limits_0^t R(s)\,ds\right)\left(1+\int\limits_0^t R(s)\,ds\right)^{-j}$.

Ряд (5) сходится, так как $\rho_0 = \int\limits_0^\infty \rho(s)\,ds < 1$. Представим $a = \rho + \psi + \psi * R - R - \rho * \psi$ в виде $a = \rho + (\psi_0 + \psi_0 * R - R) + \sum_{j\geqslant 1}(\psi_j + \psi_j * R - \psi_{j-1}) * \rho^{*j}$. Из определения $\psi_j$, как и в теореме 1, следует $\psi_0 + \psi_0 * R - R \geqslant 0$, $\psi_j + \psi_j * R - \psi_{j-1} \geqslant 0$, отсюда $a(t) \geqslant 0$.

Из условия $B$ теоремы нетрудно получить $\int\limits_0^\infty a(s)\,ds < 1$. Применение леммы сравнения завершает доказательство.

Пример. $h(t) = T^{-1}\chi(t \leqslant T)$, $\gamma = T^{-1}$, $R \equiv 0$. Для $0 < \varepsilon < \min(T^{-1}, e(y))$

$$\|x\|_\varepsilon \leqslant \frac{1+\varepsilon T}{1-\varepsilon T} \cdot \frac{\varepsilon T}{e^{\varepsilon T} - 1 - \varepsilon T}\|y\|_\varepsilon.$$

**Список литературы**: 1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения, т. 2, М., «Наука», 1967. 2. *Боровиков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972. 3 *Teugels J. L.* Exponentia decay in renewal theorems. — «Bull. Soc. Math. Belg.», 1967, 19, p. 259—276 4. *Stone C.* On characteristic function and renewal theory. —«Trans. Amer. Math Soc.» ,1965, **120**, 2, p. 11—35.

*N. V. Kartashov*

## ON EXPLICIT ESTIMATE OF CONVERGENCE SPEED IN RENEWAL THEOREM

Let $x(t)$ satisfy to renewal equation

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s)\, dF(s).$$

For certain classes of distribution $F$ the explicit estimates for

$$\sup_{t\geqslant 0} e^{\varepsilon t} \,|\, x(t) - \lim_{t\to\infty} x(t) \,|,$$

$$\sup_{t\geqslant 0} (1+t)^{\alpha} \,|\, x(t) - \lim_{t\to\infty} x(t) \,|$$

in assumption of the existence of corresponding moments $F$ are obtained. One of this classes is the class of distribution which has independent negative-exponential component.

Поступила в редколлегию 18.11 1976.

УДК 519.21

Е. П. КОВАЛЬЧУК, асп., Киевский университет

## О ПОВЕДЕНИИ АРГУМЕНТА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть

$$dx_i(t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} \sigma_{ir}^{j} x_j(t)\, dw^r(t) + \sum_{j=1}^{2} b_i^j x_j(t)\, dt \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

(где $t \geqslant 0$, $\sigma_{ir}^j, b_i^j$ — постоянные, $w^r(t)$ — независимые винеровские процессы) — двумерная система линейных стохастических диффузионных уравнений.

Как известно [1], аргумент решения системы (1) определяется однородным диффузионным уравнением, коэффициенты которого определены и непрерывны на всей числовой оси и являются $\pi$-периодическими функциями.

Предельное поведение при $t \to \infty$ аргумента $\varphi(t)$ и функционалов от аргумента вида

$$\int_0^t g(\varphi(s))\, ds \quad \text{и} \quad \int_0^t g_1(\varphi(s))\, dw(s),$$

где $g(x)$ и $g_1(x)$ — неслучайные функции, $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, изучалось в работах [2—4].

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решения однородного диффузионного уравнения вида

$$d\varphi(t) = b(\varphi(t))\, dt + \sigma(\varphi(t))\, dw(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \tag{2}$$