N. V. Kartashov

ON EXPLICIT ESTIMATE OF CONVERGENCE SPEED IN RENEWAL THEOREM

Let $x(t)$ satisfy to renewal equation

$$x(t) = y(t) + \int_0^t x(t-s)\,dF(s).$$

For certain classes of distribution F the explicit estimates for

$$\sup_{t\geqslant 0} e^{\varepsilon t}\,|x(t) - \lim_{t\to\infty} x(t)|,$$

$$\sup_{t\geqslant 0} (1+t)^{\alpha}\,|x(t) - \lim_{t\to\infty} x(t)|$$

in assumption of the existence of corresponding moments F are obtained. One of this classes is the class of distribution which has independent negative-exponential component.

Поступила в редколлегию 18.11 1976.

УДК 519.21

Е. П. КОВАЛЬЧУК, асп., Киевский университет

О ПОВЕДЕНИИ АРГУМЕНТА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть

$$dx_i(t) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{r=1}^{2} \sigma_{ir}^{j} x_j(t)\,dw^r(t) + \sum_{j=1}^{2} b_i^j x_j(t)\,dt \quad (i = 1, 2) \tag{1}$$

(где $t \geqslant 0$, σ_{ir}^{j}, b_i^j — постоянные, $w^r(t)$ — независимые винеровские процессы) — двумерная система линейных стохастических диффузионных уравнений.

Как известно [1], аргумент решения системы (1) определяется однородным диффузионным уравнением, коэффициенты которого определены и непрерывны на всей числовой оси и являются π-периодическими функциями.

Предельное поведение при $t \to \infty$ аргумента $\varphi(t)$ и функционалов от аргумента вида

$$\int_0^t g(\varphi(s))\,ds \quad \text{и} \quad \int_0^t g_1(\varphi(s))\,dw(s),$$

где $g(x)$ и $g_1(x)$ — неслучайные функции, $w(t)$ — некоторый винеровский процесс, изучалось в работах [2—4].

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение при $t \to \infty$ решения однородного диффузионного уравнения вида

$$d\varphi(t) = b(\varphi(t))\,dt + \sigma(\varphi(t))\,dw(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \tag{2}$$

на интервале (φ_1, φ_2) и при соответствующих нормировках поведение функционалов от данного решения указанного выше вида при условии, что $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_2) = 0$. Отсюда непосредственно следует поведение при $t \to \infty$ аргумента решения системы (1), не выходящего из данного интервала.

Рассмотрим однородное стохастическое диффузионное уравнение (2) в предположении, что функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ определены и непрерывны для всех $x \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и на каждом замкнутом промежутке интервала (φ_1, φ_2) удовлетворяют условию Липшица, т. е. для всякого промежутка $[\bar\varphi_1, \bar\varphi_2]$ из (φ_1, φ_2) существует такая постоянная K, что $|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant K|x - y|$, причем $\sigma(x) > 0\ \forall x \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и $\sigma(\varphi_1) = \sigma(\varphi_2) = 0$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2). Если $b(x)$ и $\sigma(x)$ таковы, что существуют

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{l(a(x))}{x} = \sigma_1 \tag{3}$$

и

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^{a(x)} [l'(v)\sigma^2(v)]^{-1} dv = \sigma_2, \tag{4}$$

где

$$l(x) = \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x} \exp\left\{-2 \int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{u} \frac{b(v)}{\sigma^2(v)} dv\right\} du, \tag{5}$$

$$a(x) = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \tag{6}$$

то $\forall z \in (-\infty, +\infty)$ $P\{\varphi_1 < \varphi(t) < a(z\sqrt{t})\}$ при $t \to \infty$ сходится к нормальному закону распределения с параметрами $(0, 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_2})$.

Доказательство. Введем функцию

$$q(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{2x - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}, \tag{7}$$

отображающую интервал (φ_1, φ_2) на всю числовую ось. Для $x \in (\varphi_1, \varphi_2)$ функции $q(x)$, $q'(x)$, $q''(x)$ непрерывны. Обозначим $\xi(t) = q(\varphi(t))$ и применим формулу Ито. Получим

$$d\xi(t) = \hat{b}(\xi(t))\, dt + \hat{\sigma}(\xi(t))\, dw(t), \tag{8}$$

где

$$\hat{b}(x) = \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}\left[b(a(x))(1 + x^2) + \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1} x(1 + x^2)\sigma^2(a(x))\right],$$

$$\hat{\sigma}(x) = \frac{\pi}{\varphi_2 - \varphi_1}(1 + x^2)\sigma(a(x)).$$

Заметим, что функция $a(x)$ является обратной к функции $q(x)$. Функции $\hat{b}(x)$ и $\hat{\sigma}(x)$ определены и непрерывны $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и $\hat{\sigma}(x) > 0$. Кроме того, при условиях (3) и (4) выполняются условия теоремы об асимптотической нормальности распределения решения однородного стохастического диффузионного уравнения [5], а именно: при $|x| \to \infty$

$$I_1(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \exp\{-2\Lambda(v)\}\,dv \to \sigma_1,$$

$$I_2(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \exp\{2\Lambda(v)\}\,dv/\hat{\sigma}^2(v) \to \sigma_2,$$

где $\Lambda(x) = \int\limits_0^x \frac{\hat{b}(u)}{\hat{\sigma}^2(u)}\,du$, σ_1 и σ_2 — некоторые постоянные.

Действительно, после несложных преобразований получаем, что

$$\Lambda(x) = \int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{a(x)} \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\,du + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Тогда при $|x| \to \infty$

$$I_1(x) = \frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\,\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{a(x)} \exp\left\{-2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\,du\right\}dv = \frac{l(a(x))}{x}$$

при условии (3) стремится к σ_1, а

$$I_2(x) = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\,\frac{1}{x}\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{a(x)} \exp\left\{2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\,du\right\}\frac{dv}{\sigma^2(v)} =$$

$$= \frac{1}{x}\int\limits_0^{a(x)} [l'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1}dv$$

при условии (4) стремится к σ_2. Следовательно, распределение случайной величины $\xi(t)/\sqrt{t}$ при $t \to \infty$ сходится к нормальному закону распределения с параметрами $(0, 1/\sqrt{\sigma_1\sigma_2})$. Но $\forall z \in (-\infty, +\infty)$

$$P\{\xi(t)/\sqrt{t} < z\} = P\{\varphi_1 < \varphi(t) < a(z\sqrt{t})\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), а функция $l(x)$ задается формулой (5). Если функции $b(x)$ и $\sigma(x)$ таковы, что $\forall x \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и некоторых постоянных δ и c

$$0 < \delta < l'(x)\,\sigma(x) \leqslant c, \tag{9}$$

то распределение случайной величины $\frac{l(\varphi(t))}{\sqrt{t}}$ при $t \to \infty$ сходится к распределению с плотностью

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1}}, & x > 0, \\ \dfrac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2^2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2}}, & x < 0, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\sigma_1 = \lim_{x \to \varphi_2} \frac{l(x)}{\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x} [l'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1} dv}, \tag{11}$$

$$\sigma_2 = \lim_{x \to \varphi_1} \frac{l(x)}{\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x} [l'(v)\,\sigma^2(v)]^{-1} dv}. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим процесс $\xi(t) = q(\varphi(t))$ являющийся решением уравнения (8), $\xi(0) = \xi_0$. Введем функцию

$$f(x) = \int\limits_0^x \exp\left\{-2\int\limits_0^v \frac{\widehat{b}(u)}{\widehat{\sigma}^2(u)}\,du\right\} dv. \tag{13}$$

Так как

$$f'(x)\,\widehat{\sigma}(x) = \frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\exp\left\{-2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{a(x)} \frac{b(u)}{\sigma^2(u)}\,du\right\}\sigma(a(x)),$$

где $a(x)$ задается формулой (6) и принимает значения в интервале (φ_1, φ_2), то из условия (9) следует, что $0 < \delta < f'(x)\,\widehat{\sigma}(x) \leqslant c$. Пусть $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{f(\gamma|x|)}{\int_0^{\gamma|x|} [f'(u)\,\widehat{\sigma}^2(u)]^{-1} du}$ существует и вычисляется по формуле (11) при $\gamma > 0$ или по формуле (12) при $\gamma < 0$. Следовательно по теореме 1 [6] случайная величина $f(\xi(t))/\sqrt{t}$ при $t \to \infty$ имеет предельное распределение с указанной в формулировке теоремы плотностью. Учитывая, что $f(\xi(t)) = l(\varphi(t))$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 существуют такие постоянные $\alpha > 0$ и $c > 0$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(kx)}{f(k)} = \begin{cases} x^{\alpha}, & x > 0, \\ -c|x|^{\alpha}, & x < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $B(t)$ решение уравнения $\sqrt{t} = f(B(t))$. Тогда $P\{\varphi_1 < \varphi(t) < a(xB(t))\}$, где $a(x)$ задается формулой (6), при $t\to\infty$ сходится к распределению с плотностью

$$\rho_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} \alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{2\sigma_1}}, & x > 0, \\ \dfrac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} c\alpha |x|^{\alpha-1} e^{-\frac{c^2|x|^{2\alpha}}{2\sigma_2}}, & x < 0, \end{cases} \tag{14}$$

где σ_1 и σ_2 задаются соответственно формулами (11) и (12).

Доказательство. Пусть $h(x) = \begin{cases} x^{\alpha}, & x > 0, \\ -c|x|^{\alpha}, & x < 0 \end{cases}$ и $B(t)$ — решение уравнения $\sqrt{t} = f(B(t))$. В силу свойства регулярности функции $f(x)$ при $x\to\infty$

$$\frac{f(\xi(t))}{\sqrt{t}} / h\left(\frac{\xi(t)}{B(t)}\right) \xrightarrow{P} 1 \text{ при } t\to\infty.$$

Тогда по теореме 2 случайная величина $h\left(\frac{\xi(t)}{B(t)}\right)$ имеет предельное распределение, плотность которого задается формулой (10). Поэтому предел при $t\to\infty$

$$P\{\xi(t)/B(t) < x\} = P\{\varphi_1 < \varphi(t) < a(xB(t))\}$$

имеет плотность распределения $\rho_1(x)$, определяемую формулой (14).

Теорема 4. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), коэффициенты которого удовлетворяют условию (9), и пусть функция $g(x)$ такая, что существуют

$$\lim_{x\to\varphi_2} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x} g(q(v)) \exp\left\{2\int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v} \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du\right\} \frac{dv}{\sigma^2(x)}}{\Psi(|l(x)|)} = \beta_1,$$

$$\lim_{x\to\varphi_1} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x} g(q(v)) \exp\left\{2\int_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v} \frac{b(u)}{\sigma^2(v)} du\right\} \frac{dv}{\sigma^2(v)}}{\Psi(|l(x)|)} = \beta_2,$$

где $\Psi(x)$ — регулярно меняющаяся функция порядка $\alpha \geqslant 0$, а $l(x)$ задается формулой (5).

Тогда распределение случайной величины $\frac{1}{\sqrt{t}\Psi(\sqrt{t})}\int\limits_0^t g(\xi(s))\,ds$, где $\xi(t) = q(\varphi(t))$, при $t \to \infty$ сходится к распределению случайной величины

$$2\left[\frac{1}{\alpha+1}\bar{\sigma}_1(\eta(1))\,|\eta(1)|^{\alpha+1}\operatorname{sign}\eta(1) - \int\limits_0^1 \bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^{\alpha} d\eta(s)\right]. \tag{15}$$

Здесь $\bar{\sigma}_1(x) = \begin{cases} \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\beta_1, & x > 0, \\ \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\beta_2, & x < 0 \end{cases}$, $\eta(t)$ — решение уравнения

$$\eta(t) = \int\limits_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\,dw_1(s), \tag{16}$$

где $w_1(t)$ — некоторый винеровский процесс, $\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sqrt{\bar{\sigma}_1}, & x > 0, \\ \sqrt{\bar{\sigma}_2}, & x < 0 \end{cases}$ задается соответственно формулами (11) и (12), причем $\int\limits_0 P\{\eta(s)=0\}ds = 0$.

Доказательство. Пусть $\xi(t) = q(\varphi(t))$ является решением уравнения (8), функция $f(x)$ определяется формулой (13). Убедимся в том, что при сделанных предположениях имеет место теорема 1 [7]. Действительно,

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\int\limits_0^{\gamma|x|} g(v)\,[f'(v)\,\widehat{\sigma^2}(v)]^{-1}dv}{\Psi(|f(\gamma|x|)|)} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\times$$

$$\times\lim_{|x|\to\infty}\frac{\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{a(\gamma|x|)} g(q(v))\exp\left\{2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}\frac{dv}{\sigma^2(v)}}{\Psi(|f(\gamma|x|)|)}.$$

Обозначая $a(\gamma|x|)$ через y и учитывая, что $f(q(y)) = l(y)$, находим, что при $|x| \to \infty$ этот предел равен $\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\beta_1$, когда $\gamma > 0$ и $\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\pi}\beta_2$, когда $\gamma < 0$. Следовательно, предельное распределение случайной величины $\frac{1}{\sqrt{t}\Psi(\sqrt{t})}\int\limits_0^t g(\xi(s))\,ds$ существует и совпадает с распределением случайной величины, заданной формулой (15).

Теорема 5. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), коэффициенты которого удовлетворяют условию (9), и пусть функция $g_1(x)$ такая, что существуют

$$\lim_{x\to\varphi_2}\frac{g_1(q(x))\exp\left\{2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\Psi(|l(x)|)\,\sigma(x)}=c_1,$$

$$\lim_{x\to\varphi_1}\frac{g_1(q(x))\exp\left\{2\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{x}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\Psi(|l(x)|)\,\sigma(x)}=c_2,$$

где $\Psi(x)$ — некоторая регулярно меняющаяся функция порядка $\alpha\geqslant 0$, а функции $l(x)$ и $q(x)$ задаются соответственно формулами (5) и (7).

Тогда случайная величина $\frac{1}{\sqrt{t}\Psi(\sqrt{t})}\int\limits_0^t g_1(\xi(t))dw(s)$, где $\xi(t)=q(\varphi(t))$, имеет предельное распределение при $t\to\infty$, совпадающее с распределением случайной величины $\int\limits_0^1\bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^\alpha\,d\eta(s)$,

где $\bar{\sigma}_1(x)=\begin{cases}c_1, & x>0,\\ c_2, & x<0\end{cases}$, а $\eta(t)$ — решение уравнения (16).

Доказательство можно получить методом, аналогичным использованному при доказательстве теоремы 2 [7].

Теорема 6. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\exp\left\{4\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{2v-\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}\sigma^2(v)}dv=c<\infty. \tag{17}$$

Тогда $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $P\{l(\varphi(t))<x\}$ при $t\to\infty$ сходится к функции

$$F(x)=\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\frac{1}{c}\int\limits_{\varphi_1}^{a(x)}\frac{\exp\left\{4\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\sigma^2(v)\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{2v-\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}}dv,$$

где функции $l(x)$ и $a(x)$ задаются соответственно формулам и (6).

Доказательство. Рассмотрим процесс $f(\xi(t))$, $\xi(t)$ — решение уравнения (8), функция $f(x)$ задается форм (13). По формуле Ито получаем

$$df(\xi(t))=f'(\xi(t))\,\widehat{\sigma}(\xi(t)\,dw(t).$$

Отсюда из условия (17) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}1/[f'(y)\widehat{\sigma}(y)]^2dy<\infty$.

означает, что для распределений процесса $f(\xi(t))$ справедлива дическая теорема [8]. Но $f(\xi(t))=l(\varphi(t))$. Следовательно, фун распределения процесса $l(\varphi(t))$ сходится к функции $F($

$=\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dy}{f'(y)\widehat{\sigma}(y)}$. Выражая функцию $F(x)$ через коэффици уравнения (2), получаем утверждение теоремы.

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 6 для некот борелевской функции $g_1(x)$

$$\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{|g_1(q(v))|\exp\left\{4\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\sigma^2(v)\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{2v-\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}}dv<\infty,$$

где $q(x)$ определяется формулой (7).

Тогда

$$P\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_1(l(\varphi(t))\,dt=\right.$$

$$\left.=\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}\frac{1}{c}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{g_1(q(v))\exp\left\{4\int\limits_{\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}^{v}\frac{b(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}}{\sigma^2(v)\cos^2\frac{\pi}{2}\frac{2v-\varphi_1-\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1}}dv\right\}=1,$$

где функции $q(x)$ и $l(x)$ задаются соответственно формулами (7) и (5), а постоянная c вычисляется по формуле (17).

Доказательство. Рассмотрим процесс $f(\xi(t))$, где $\xi(t)$ — решение уравнения (8), функция $f(x)$ задается формулой (13). По формуле Ито получаем

$$df(\xi(t)) = f'(\xi(t))\hat{\sigma}(\xi(t))\,dw(t).$$

Отсюда и из условия (18) следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g_1(y)|\,dy}{[f'(y)\hat{\sigma}(y)]^2} < \infty$. Так как и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{[f'(y)\hat{\sigma}(y)]^2} < \infty$, то для процесса $f(\xi(t))$, а значит, и для процесса $l(\varphi(t))$ имеет место эргодическая теорема [8]. Применяя ее, получаем то, что требовалось доказать.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Г. Л. Кулиничу за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Хасьминский Р. З.* Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных стохастических систем. — «Теория вероятностей и ее применения», 1967, № 1, с. 167—171. 2. *Friedman A., Pinsky M. A.* Asymptotic behaviour of solutions of linear stochastic differential system. —«Trans. Amer. Math. Soc.» 1973, **181**, 1, p. 1—22. 3. *Ковальчук Е. П.* О предельном поведении аргумента решения двумерной системы линейных стохастических диффузионных уравнений. — В сб.: Исследования по теории случайных процессов. Киев, ИМ АН УССР, 1976, с. 85—88. 4. *Ковальчук Е. П., Кулинич Г. Л.* Об асимптотическом поведении распределений функционалов от аргумента решения двумерной системы линейных стохастических диффузионных уравнений. — «ДАН УССР», 1977, № 8. 5. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения. — «УМЖ», 1968, **20**, № 3, с. 396—400. 6. *Кулинич Г. Л.* Асимптотическое поведение неустойчивого решения стохастического однородного диффузионного уравнения. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1971, вып. 5, с. 81—87. 7. *Кулинич Г. Л.* Предельные распределения для функционалов интегрального типа от неустойчивых диффузионных процессов. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1974, вып. 11, с. 81—85. 8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наукова думка», 1968.

E. P. Kovalchuk

ON THE BEHAVIOUR OF THE ARGUMENT OF LINEAR DIFFUSION ON THE PLANE

Let $\varphi(t)$ be the solution of the homogeneous diffusion equation

$$d\varphi(t) = b(\varphi(t))\,dt + \sigma(\varphi(t))\,dw(t), \quad \varphi(0) = \varphi_0$$

if $\varphi_1 < \varphi(t) < \varphi_2$ with probability 1 for all $t \geqslant 0$. Behaviour of $\varphi(t)$, $l(\varphi(t))$ and functionals kind of $\int\limits_0^t g(\varphi(s))\,ds$, $\int\limits_0^t g_1(\varphi(s))\,dw(s)$ as $t \to \infty$ where $l(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$ are nonrandom functions is investigated. In particular, $\varphi(t)$ may be an argument of linear diffusion on the plane.

Поступила в редколлегию 19.10 1976.

УДК 519.21

Т. Л. МАЛЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, Н. ТОШОВ, асп.,
Ташкентский университет

О ГРАНИЦАХ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ — стационарный гауссовский процесс,

$$Mx(t) = 0, \tag{1}$$

с абсолютно непрерывной спектральной функцией, спектральной плотностью $f(\lambda)$ и функцией ковариации $r(t)$,

$$r(0) = 1. \tag{2}$$

Траектории процесса предполагаются непрерывными с вероятностью 1. В работах [1, 2] рассмотрены вероятности события

$$B_T(\varepsilon) = \{ | \max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) - \sqrt{2 \ln T} | < (1 + \varepsilon) \ln \ln T (\sqrt{2 \ln T})^{-1} \}$$

и установлено, что $P\{B_T(0)\} \to 1$ при $T \to \infty$ [1], и показано, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 будет выполняться событие $B_T(\varepsilon)$ для всех T, начиная с некоторого T_0 [2]. В этих работах предполагалось, что $f(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 [\ln (1 + \lambda)]^{1+\delta} f(\lambda)\, d\lambda < \infty, \quad \delta > 0.$$

Мы уточним результат [1], а также докажем результат [2] в более слабых предположениях.

Введем обозначения

$$P_T^+(h) = P\left\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) > \sqrt{2 \ln T} + \frac{h}{\sqrt{2 \ln T}}\right\};$$

$$P_T^-(h) = P\left\{\max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) < \sqrt{2 \ln T} - \frac{h}{\sqrt{2 \ln T}}\right\}.$$

Теорема 1. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d\lambda < \infty, \tag{3}$$

то для любой последовательности $h_T \uparrow \infty$, $h_T = O(\sqrt{\ln T})$ при $T \to \infty$ $P_T^-(h_T) = O(e^{-h_T})$.

Теорема 2. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty, \tag{4}$$