УДК 519.21

Т. Л. МАЛЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук, Н. ТОШОВ, асп.,
Ташкентский университет

О ГРАНИЦАХ МАКСИМУМА ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $x(t), -\infty < t < +\infty$ — стационарный гауссовский процесс,

$$Mx(t) = 0, \tag{1}$$

с абсолютно непрерывной спектральной функцией, спектральной плотностью $f(\lambda)$ и функцией ковариации $r(t)$,

$$r(0) = 1. \tag{2}$$

Траектории процесса предполагаются непрерывными с вероятностью 1. В работах [1, 2] рассмотрены вероятности события

$$B_T(\varepsilon) = \{ | \max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) - \sqrt{2 \ln T} | < (1 + \varepsilon) \ln \ln T (\sqrt{2 \ln T})^{-1} \}$$

и установлено, что $P\{B_T(0)\} \to 1$ при $T \to \infty$ [1], и показано, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 будет выполняться событие $B_T(\varepsilon)$ для всех T, начиная с некоторого T_0 [2]. В этих работах предполагалось, что $f(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 [\ln (1 + \lambda)]^{1+\delta} f(\lambda)\, d\lambda < \infty, \quad \delta > 0.$$

Мы уточним результат [1], а также докажем результат [2] в более слабых предположениях.

Введем обозначения

$$P_T^+(h) = P\left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) > \sqrt{2 \ln T} + \frac{h}{\sqrt{2 \ln T}} \right\};$$

$$P_T^-(h) = P\left\{ \max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) < \sqrt{2 \ln T} - \frac{h}{\sqrt{2 \ln T}} \right\}.$$

Теорема 1. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d\lambda < \infty, \tag{3}$$

то для любой последовательности $h_T \uparrow \infty$, $h_T = O(\sqrt{\ln T})$ при $T \to \infty$ $P_T^-(h_T) = O(e^{-h_T})$.

Теорема 2. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty, \tag{4}$$

для любой последовательности $h_T \uparrow \infty$, $h_T = O(\sqrt{\ln T})$

$$P_T^+(h_T) = O(e^{-h_T}).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1) — (4). Тогда [любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 найдется T_0 такое, что будут ть место события $B_T(\varepsilon)$ для всех $T \geqslant T_0$.

В некоторых частных случаях можно уточнить постоянные в нке для $P_T^-(h)$, приведенной в теореме 1 и улучшить эту оценку.

Теорема 4. Если выполнены условия (1), (2) и

$$\sup_{-\infty<\lambda<+\infty} f(\lambda) = M < \infty, \tag{5}$$

при $h \leqslant 2\ln T - \sqrt{2\ln T}$

$$P_T^-(h) \leqslant 2\pi^{\frac{3}{2}}(1+9c)\, M e^{\frac{h^2}{4\ln T}} e^{-h},$$

c — абсолютная постоянная теоремы 1 [3].

Теорема 5. Пусть $x(t)$ — гауссовский марковский процесс

$$r(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0. \tag{6}$$

да при $h \leqslant 2\ln T - \sqrt{2\ln T}$

$$P_T^-(h) \leqslant \frac{32\sqrt{\pi}\exp\{h^2[4\ln T]^{-1}\}}{a(\sqrt{2\ln T} - h/\sqrt{2\ln T})} e^{-h}.$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия (1), (2) и

$$|r(t)| \leqslant 1 - \frac{b}{2}|t|^{\beta}, \quad b > 0,\ 0 < \beta \leqslant 2,\ |t| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

$$|r(t)| < \theta < 1, \quad |t| > \varepsilon, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r^2(t)\,dt = R < \infty. \tag{9}$$

гда при $h \leqslant 2\ln T - \sqrt{2\ln T}$

$$P_T^-(h) \leqslant \frac{2^{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta b^{\frac{1}{\beta}}}\left(\sqrt{2\ln T} - \frac{h}{\sqrt{2\ln T}}\right)^{1-\frac{2}{\beta}} \times$$

$$\times e^{\frac{h^2}{4\ln T}} e^{-h} + \frac{4R}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \frac{\left(\sqrt{2\ln T} - \frac{h}{\sqrt{2\ln T}}\right)^2}{T^{(1-\theta)/(1+\theta)}} \times$$

$$\times e^{\theta h^2/[2(1+\theta)\ln T]} e^{-\frac{2\theta h}{1+\theta}} + 4\sqrt{2R}\left(\sqrt{2\ln T} - \frac{h}{\sqrt{2\ln T}}\right)^2 / \sqrt{3T}.$$

Примечание. Из теоремы 3 вытекает один из результатов [4], а именно, соотношение

$$P\{\lim_{T\to\infty}[\max_{0\leqslant t\leqslant T} x(t) - \sqrt{2\ln T}] = 0\} = 1$$

при условиях (1) — (4).

Для доказательства вышеприведенных теорем нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Введем сначала обозначения

$$u_T(h) = \sqrt{2\ln T} - \frac{h}{\sqrt{2\ln T}}; \tag{10}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Лемма 1. Для стационарного гауссовского процесса $x(t)$ при условиях (1), (2)

$$P_T^-(h) \leqslant 2T^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u_T(h)]^2}{n!} \int_0^T (T-t) r^n(t)\, dt\, [P\{x(0) > u_T(h)\}]^{-2}.$$

Доказательство. Как следует из § 13,5 [5],

$$P_T^-(h) \leqslant DZ_0(T)\,[MZ_0(T)]^{-2}, \tag{11}$$

где $Z_0(T) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x(t))\, dt$, $\varphi(y)$ — характеристическая функция множества $\{y > u_T(h)\}$.

Примеряя к неравенству (11) соотношения (10.8.1) и (10.8.4) [5], получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. Для процесса $x(t)$

$$P\{x(0) > u\} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{при } u \geqslant 1.$$

Доказательство вытекает из отрицательности (при всех $u > 1$) производной от функции $\int_u^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{2u} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Лемма 3. Для процесса $x(t)$

$$P\{x(0) > u\} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}}{\sqrt{1-\rho}}\, d\rho.$$

Доказательство. На основании равенств (2.10.4) [5] и (1), ?) имеем

$$P\{x(0)>u, x(\tau)>u\} = [P\{x(0)>u\}]^2 +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{r(\tau)} \frac{e^{-\frac{u^2}{1+y}}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

)тсюда сразу вытекает, что

$$P\{x(0)>u\} \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{r(\tau)} \frac{e^{-\frac{u^2}{1+y}}}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Iолагая в последнем неравенстве $\tau\to 0$ и используя неравенство $\sqrt{1+y}\leqslant\sqrt{2}$, приходим к утверждению леммы 3.

Лемма 4. Справедливо неравенство (при $u\geqslant 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!}[P\{x(0)>u\}]^{-2}\leqslant 4\sqrt{\pi}ue^{\frac{u^2}{2}}.$$

Доказательство. Полагая в равенстве (21.12.5) [6] $x=y=u$, $_1=\sigma_2=1$ и интегрируя его по ρ в пределах от 0 до 1, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}}{\sqrt{1-\rho^2}}\,d\rho\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}}{\sqrt{1-\rho}}\,d\rho.$$

Iоследнее неравенство в сочетании с леммами 2 и 3 доказывает емму 4.

Лемма 5. Имеет место неравенство (ср. [7])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!}[P\{x(0)>u\}]^{-2}\leqslant 8\sqrt{\pi}\,\frac{1}{u}e^{\frac{u^2}{2}},\quad u\geqslant 1.$$

Доказательство. Снова полагая в равенстве (21.12.5) [6] $=y=u$, $\sigma_1=\sigma_2=1$ и дважды интегрируя его по ρ, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{\rho}\frac{e^{-\frac{u^2}{1+z}}}{\sqrt{1-z^2}}\,dz\,d\rho.$$

Производя в правой части последнего неравенства интегрирование по частям, выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{u^2}{1+\rho}} d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\rho} e^{-\frac{u^2}{1+\rho}} d\rho.$$

Снова интегрируя по частям правую часть последнего неравенства, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \int_0^\rho e^{-\frac{u^2}{1+z}} dz d\rho. \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\rho) = \int_0^\rho e^{-\frac{u^2}{1+z}} dz.$$

Выполняя в нем замену переменных $1/(1+z) = y$, приходим к оценке

$$I(\rho) = \int_{1/(1+\rho)}^1 \frac{1}{y^2} e^{-u^2 y} dy \leqslant (1+\rho)^2 \frac{1}{u^2} \left(e^{-\frac{u^2}{1+\rho}} - e^{-u^2}\right) \leqslant \frac{4}{u^2} e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}.$$

Подставляя последнюю в (12), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{\pi u^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} e^{-\frac{u^2}{1+\rho}} d\rho. \tag{13}$$

Соотношение (13) и леммы 2, 3 доказывают лемму 5.

Лемма 6. Для любого $\alpha > 0$ и $u \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!\, n^\alpha} [P\{x(0) > u\}]^{-2} = 2^{2(1+\alpha)} \sqrt{\pi} u^{1-2\alpha} e^{u^2/2}.$$

Доказательство. Запишем равенство

$$s_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!\,(n+1)^\alpha} [P\{x(0) > u\}]^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \tag{14}$$

в котором

$$a_n = \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^{2(1-\alpha)}}{(n!)^{1-\alpha}\, [P\{x(0) > u\}]^{2(1-\alpha)}};$$

$$b_n = \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^{2\alpha}}{[(n+1)!]^\alpha\, [P\{x(0) > u\}]^{2\alpha}}.$$

Тогда применение неравенства Гельдера к соотношению (14) дает

$$s_\alpha \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!\,[P\{x(0) > u\}]^2} \right)^{1-\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{(n+1)!\,[P\{x(0) > u\}]^2} \right)^{\alpha}.$$

Утверждение леммы 6 вытекает из применения к правой части последнего неравенства лемм 4 и 5 и из очевидного неравенства $(n+1)^\alpha n^{-\alpha} \leqslant 2^\alpha, \quad n \geqslant 1$.

Лемма 7. При $u \geqslant 1$ и $0 < \theta < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2 \theta^n}{n!\,[P\{x(0) > u\}]^2} \leqslant \frac{4\theta u^2}{\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left\{ \frac{\theta u^2}{1+\theta} \right\}.$$

Доказательство. Проинтегрировав равенство (21.12.5) [6] по ρ в пределах от 0 до θ, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Phi^{(n)}(u)]^2}{n!} \theta^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta \frac{e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}}{\sqrt{1-\rho^2}}\, d\rho \leqslant \theta e^{-\frac{u^2}{1+\theta}} / 2\pi \sqrt{1-\theta^2}.$$

Из последнего неравенства и леммы 2 вытекает утверждение леммы 7.

Приступим к доказательству теорем.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим величину

$$A_n^{(1)} = \left| \frac{1}{T} \int_0^\varepsilon (T-t)\, r^n(t)\, dt \right|. \tag{15}$$

Из условия (7) следует, что

$$|r(t)| \leqslant \exp\left\{ -\frac{b}{2} |t|^\beta \right\}, \quad |t| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) вытекает оценка

$$A_n^{(1)} \leqslant \int_0^\infty e^{-\frac{bnt^\beta}{2}}\, dt = \frac{2^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta b^{\frac{1}{\beta}}} n^{-\frac{1}{\beta}}, \quad n \geqslant 1. \tag{17}$$

Далее, в силу условий (8) и (9) для $n \geqslant 2$

$$A_n^{(2)} = \left| \frac{1}{T} \int_\varepsilon^T (T-t)\, r^n(t)\, dt \right| \leqslant \theta^{n-2} R/2. \tag{18}$$

Заметим, что благодаря условию (9)

$$\left|\frac{1}{T}\int\limits_0^T (T-t)\,r(t)\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{T}\sqrt{\int\limits_0^T (T-t)^2\,dt}\sqrt{\int\limits_0^\infty r^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{R}{6T}}\right. \quad (19$$

В силу леммы 1 и обозначений (10), (15), (18)

$$P_T^-(h) \leqslant \frac{2}{T}\sum_{i=1}\sum_{n\geqslant 2}\frac{[\Phi^{(n)}(u_T(h))]^2}{n!\,[P\{x(0)>u_T(h)\}]}\times$$

$$\times A_n^{(i)} + \frac{2}{T^2}\,\frac{[\Phi'(u_T(h))]^2}{[P\{x(0)>u_T(h)\}]^2}\left|\int\limits_0^T (T-t)\,r(t)\,dt\right|. \quad (20$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (20) на основани соотношения (17) и леммы 6 с $\alpha=\frac{1}{\beta}$ не превосходит величинь

$$\rho_T^{(1)} = \frac{2^{3(1+1/\beta)}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta b^{1/\beta}T}\,[u_T(h)]^{1-2/\beta}e^{u_T^2(h)/2}. \quad (21$$

Второе слагаемое на основании соотношения (18) и леммы 7 н превосходит величины

$$\rho_T^2 = \frac{4R\,[u_T(h)]^2}{\theta\sqrt{1-\theta^2}\,T}\,e^{\frac{\theta u_T^2(h)}{1+\theta}}. \quad (22$$

Третье слагаемое в правой части (20) на основании неравенств (19) и леммы 2 не превосходит величины

$$\rho_T^{(3)} = 4\sqrt{2R}\,[u_T(h)]^2/\sqrt{3T}. \quad (23$$

Поскольку из неравенства (20) следует, что $P_T^-(h)\leqslant\sum_{i=1}^{3}\rho_T^{(i)}$, то, подставляя оценки (21) — (23) и снова учитывая обозначение (10), получаем утверждение теоремы 6.

Доказательство теоремы 1. В силу абсолютно непрерывности спектра процесса $x(t)$ имеет место условие (8) Из условия (3) вытекает условие (9). Покажем еще, что верно условие (7) с $\beta=2$. Действительно,

$$1-r(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos t\lambda)\,f(\lambda)\,d\lambda \geqslant 2\int\limits_{-\pi/|t|}^{\pi/|t|}\sin^2\frac{t\lambda}{2}\,f(\lambda)\,d\lambda \geqslant$$

$$\geqslant (2/\pi^2)\,t^2\int\limits_{-\pi/|t|}^{\pi/|t|}\lambda^2 f(\lambda)\,d\lambda,$$

откуда видно, что для $|t| < \varepsilon$ при достаточно малом ε $1 - r(t) \geqslant ct^2$, $c > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 выполняются все условия теоремы 6. На основании последней с учетом соотношения $h_T = O(\sqrt{\ln T})$ приходим к утверждению теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 вытекает из рассуждений § 13.5 [5] и подробно приведено в работе [7].

Доказательство теоремы 3 вытекает непосредственно из леммы [2] и наших теорем 1, 2, в которых полагаем $h_T = (1 + \varepsilon) \ln \ln T$.

Доказательство теоремы 4. Так как $r(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda$, то можем записать [8]

$$\frac{2}{T} \int\limits_0^T (T - t) r^n(t)\, dt = \frac{4}{T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{T\lambda}{2}}{\lambda^2} f_n(\lambda)\, d\lambda, \tag{24}$$

где $f_n(\lambda)$ — $(n-1)$-кратная свертка функции $f(\lambda)$.

В силу условий (2) и (5) $f(\lambda)$ можно считать некоторой ограниченной плотностью распределения. Тогда можно применить лемму 3 [9], на основании которой

$$|f_n(\lambda)| \leqslant c_1 M / \sqrt{n}, \tag{25}$$

$$c_1 = 4\sqrt{2}(1 + 9c), \tag{25'}$$

где M — постоянная из условия (5), а c — абсолютная постоянная теоремы 1 [3].

Соотношения (24) и (25) дают

$$\left| \frac{1}{T} \int\limits_0^T (T - t) r^n(t)\, dt \right| \leqslant \frac{4c_1 M}{\sqrt{n} T} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin^2 \frac{T\lambda}{2} / \lambda^2 \right) d\lambda \leqslant \frac{2\pi c_1 M}{\sqrt{n}}.$$

Из последнего неравенства и леммы 1 находим

$$P_T^-(h) \leqslant 2\pi c_1 M / T \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi^{(n)}(u_T(h))]^2 / n! \sqrt{n} \, [P\{x(0) > u_T(h)\}]^2. \tag{26}$$

К неравенству (26) можем применить лемму 6 с $\alpha = \frac{1}{2}$, поскольку $u_T(h) \geqslant 1$ (на основании ограничений на h в теореме 4 и обозначения (10)), в результате чего получаем

$$P_T^-(h) \leqslant \frac{16\pi^{\frac{3}{2}} c_1 M}{T} \exp\left\{ \frac{[u_T(h)]^2}{2} \right\}. \tag{27}$$

Неравенство (27), обозначение (10) и равенство (25′) приводя к утверждению теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Согласно услови (6), можем записать

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T (T-t)\, r^n(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^\infty e^{-ant} dt = \frac{1}{an}.$$

Отсюда с учетом леммы 1 получаем

$$P_T^-(h) \leqslant \frac{2}{aT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{(n)}(u_T(h))}{n!\, n\, [P\{x(0) > u_T(h)\}]^2}.$$

Применение к последнему неравенству леммы 6 с $\alpha = 1$ и обс значение (10) завершает доказательство теоремы 5.

Список литературы: 1. *Cramer H.* On the maximum of a normal stationa stochastic process. — «Bull. Amer. Math. Soc.», 1962, **69**, 5, p. 512 — 51 2. *Шур М. Г.* О максимуме гауссовского стационарного процесса.—«Теория в роятностей и ее применения», 1965, **10**, вып. 2. 3. *Kesten H.* A sharper form of tl Doeblin — Levy — Kolmogorov — Rogozin inequality for concentration funct ons. —«Mathematica Scandinavica», 1969, **25**, 1, p. 133—144. 4. *Pickands* J. Maxin of Stationary Gaussian Processes. — «Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.» 1967, 7, p. 190—223. 5. Крамер *Г*, *Лидбеттер М*. Стационарные случайные пр цессы. М., «Мир», 1969. 6. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М «Мир», 1975. 7. *Тошов Н.* Характеристики превышения стационарного гауссо ского процесса над заданным уровнем. Деп. №. 2433—76. 8. *Титчмарш Е.* Вв дение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948. 9. *Калжанов* О близости двух пальмовских потоков. — «Изв. АН УзССР. Серия физ.-ма наук», 1975, № 4, с. 25—30.

T. L. Malevich, N. Toshov

ON BOUNDARIES OF THE MAXIMUM OF A GAUSSIAN STATIONARY PROCESS

Let $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ be Gaussian stationary process with $Mx(t) = Dx(t) = 1$ and a spectral density $f(\lambda)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)\, d\lambda < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 f(\lambda)\, d\lambda < \infty$.

In this case for every $h_T \uparrow \infty$ by $T \to \infty$

$$P\{ |\max_{0 \leqslant t \leqslant T} x(t) - \sqrt{2 \ln T}| \geqslant h_T / \sqrt{2 \ln T} \} = o(e^{-h_T})$$

and for every $\varepsilon > 0$ with probability 1

$$|\max x(t) - \sqrt{2 \ln T}| \leqslant (1+\varepsilon) \sqrt{\ln \ln T} / \sqrt{2 \ln T}$$

for T sufficient large.

Поступила в редколлегию 15.09 1976.

ДК 519.21

И. К. МАЦАК, асп., Киевский университет

О КАСАНИЯХ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$ с непрерывными ыборочными функциями. Обозначим число касаний и пересечений роцесса $\xi(t)$ с непрерывной кривой $u(t)$ на $[0, 1]$ через $T_u(\xi)$ и $C_u(\xi)$ соответственно. Строгое определение величин $T_u(\xi)$ и $C_u(\xi)$ южно найти в книге [1] (с. 201).

В настоящей статье указаны широкие классы случайных проессов, для которых

$$P\{T_u(\xi) = 0\} = 1, \tag{1}$$

$$P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1. \tag{2}$$

Полученные результаты усиливают ранее известные.

Теорема 1. Пусть процесс $\xi(t)$ имеет непрерывные одноерные распределения и представим в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t), \tag{3}$$

де ξ_k независимые случайные величины, $F_k(x) = P\{\xi_k| \leqslant x\}$ нерерывны по x, $\varphi_k(t)$ непрерывные функции на $[0, 1]$, ряд сходится очти наверное для каждого $t \in [0, 1]$.

Тогда для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции $u(t)$ выполнятся равенство (1).

Лемма 1. Пусть $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$ — произвольный случайный роцесс с непрерывными выборочными функциями. Предполоим, что для любых a, $b \in [0,1]$ функции

$$F_{a,b}(x) = P\{\sup_{t \in [a,b]} \eta(t) \leqslant x\}, \qquad D_{a,b}(x) = P\{\inf_{t \in [a,b]} \eta(t) \leqslant x\}$$

епрерывны по x. Тогда для любой непрерывной функции $u(t)$ ыполняется равенство (1).

Доказательство леммы 1. В условиях леммы не редполагается, что процесс $\eta(t)$ представим в виде (3). Пусть , $b \in [0,1]$,

$$I_{a,b}(u, \eta) = |\sup_{t \in [a,b]} \eta(t) - \inf_{t \in [a,b]} u(t)| \cdot |\inf_{t \in [a,b]} \eta(t) - \sup_{t \in [a,b]} u(t)|.$$

Тогда $P\{I_{a,b}(u, \eta) = 0\} = 0$. Если R — множество рациональых чисел, то

$$P\left\{\bigcup_{a,b \in R \cap [0,\ 1} (I_{a,b}(u, \eta) = 0)\right\} = 0.$$