ˊДК 519.21

И. К. МАЦАК, асп., Киевский университет

О КАСАНИЯХ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$ с непрерывными ыборочными функциями. Обозначим число касаний и пересечений роцесса $\xi(t)$ с непрерывной кривой $u(t)$ на $[0, 1]$ через $T_u(\xi)$ и $C_u(\xi)$ соответственно. Строгое определение величин $T_u(\xi)$ и $C_u(\xi)$ южно найти в книге [1] (с. 201).

В настоящей статье указаны широкие классы случайных процессов, для которых

$$P\{T_u(\xi) = 0\} = 1, \tag{1}$$

$$P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1. \tag{2}$$

Полученные результаты усиливают ранее известные.

Теорема 1. Пусть процесс $\xi(t)$ имеет непрерывные одноерные распределения и представим в виде

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t), \tag{3}$$

де ξ_k независимые случайные величины, $F_k(x) = P\{\xi_k| \leqslant x\}$ непрерывны по x, $\varphi_k(t)$ непрерывные функции на $[0, 1]$, ряд сходится очти наверное для каждого $t \in [0, 1]$.

Тогда для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции $u(t)$ выполнятся равенство (1).

Лемма 1. Пусть $\eta(t)$, $t \in [0, 1]$ — произвольный случайный роцесс с непрерывными выборочными функциями. Предположим, что для любых a, $b \in [0,1]$ функции

$$F_{a,b}(x) = P\{\sup_{t \in [a,b]} \eta(t) \leqslant x\}, \qquad D_{a,b}(x) = P\{\inf_{t \in [a,b]} \eta(t) \leqslant x\}$$

епрерывны по x. Тогда для любой непрерывной функции $u(t)$ ыполняется равенство (1).

Доказательство леммы 1. В условиях леммы не редполагается, что процесс $\eta(t)$ представим в виде (3). Пусть , $b \in [0,1]$,

$$I_{a,b}(u, \eta) = |\sup_{t \in [a,b]} \eta(t) - \inf_{t \in [a,b]} u(t)| \cdot |\inf_{t \in [a,b]} \eta(t) - \sup_{t \in [a,b]} u(t)|.$$

Тогда $P\{I_{a,b}(u, \eta) = 0\} = 0$. Если R — множество рациональых чисел, то

$$P\left\{\bigcup_{a,b \in R \cap [0, 1]} (I_{a,b}(u, \eta) = 0)\right\} = 0.$$

(.праведливость леммы вытекает теперь из следующ(
шения, выполняющегося для любых непрерывных η

$$\{T_u(\xi) \neq 0\} = \left\{ \bigcup_{a,b \in R \cap [0,1]} (I_{a,b}(u, \eta) = 0) \right\}.$$

Это равенство следует из определения $T_u(\eta)$. Из н(
ности, вытекает измеримость события $\{T_u(\eta) = 0\}$. Док
(педующего утверждения имеется в работе [2].

Лемма 2. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с не
одномерными распределениями, представимый в виде (3).
ществуют последовательности $\{t_k,\ k = \overline{0, n+1}\}$, $\{m_k,\ k$
кие, что $t_k < t_{k+1}$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = 1$, $\varphi_{m_k}(t) \neq 0$, $t \in [t_k, t_{\ldots}$

Доказательство теоремы 1. Положим $\eta_k(t) =$
$\zeta_k(t) = \xi(t) - u(t) - \eta_k(t)$, где m_k, t_k определены в лем
цессы $\eta_k(t)$, $\zeta_k(t)$ непрерывны. Из их представления сл
они взаимно независимы. Нетрудно видеть, что $T_u(\xi$
$k = \overline{0, n}$,

$$P\{T_u(\xi) = 0,\ t \in [t_k, t_{k+1}]\} =$$

$$= \int P\{T_x(\eta_k) = 0,\ t \in [t_k, t_{k+1}]\} P\{\zeta_k(t) \in dx\} = 1.$$

Это равенство получаем из лемм 1, 2, так как для любой
ной функции $x(t)$ $P\{T_x(\eta_k) = 0,\ t \in [t_k, t_{k+1}]\} = 1$.

Таким образом, для любых $k = \overline{0, n}$ на отрезке $[t_k, t_{k+}$
поэтому и на всем отрезке $[0, 1]$ выполняется равенс
теоремы 1 получаем результат работы [3].

Следствие 1. Пусть $\xi(t)$ — гауссовский случайный
непрерывными выборочными функциями и $M|\xi(t) - \ldots$
$t \in [0, 1]$. Тогда для любой непрерывной функции $u(t$
ется равенство (1).

Доказательство этого утверждения следует из приве
ние теоремы и разложения Карунена — Лоэва процесс

Следствие 2. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс не
одномерными распределениями, представимый в виде (3).
любых $a, b \in [0, 1]$ функции $P\{\sup\limits_{t \in [a,b]} \xi(t) \leqslant x\}$, $P\{\inf\limits_{t \in [a,b]} \xi(t$
прерывны по x.

Перейдем к рассмотрению величины $C_u(\xi)$. Пусть ξ
совский стационарный процесс со спектральной функ
Известно [1] (гл. 10.3), что условие $\lambda_2 = \int \lambda^2 dF(\lambda) < \ldots$
димо и достаточно, чтобы $MC_0(\xi) < \infty$.

В работе [2] было показано, что если $\lambda_2 = \infty$ и
процесса $\xi(t)$ пересекает ось абсцисс, то для любых ε
существует уровень y такой, что $|y| \leqslant \varepsilon$, $C_y(\xi) \geqslant k$.

Тем не менее оказывается, что существуют гауссовс
онарные процессы, для которых $\lambda_2 = \infty$ и $P\{C_0(\xi)$

акого рода процессы уже применялись в работе [4] для других елей. Нам потребуется следующий ниже результат, усиливающий еорему Булинской [1] (гл. 4.5).

Назовем непрерывную функцию $f(t)$ равномерно гладкой на), 1], если

$$\frac{1}{h}(f(t+h)+f(t-h)-2f(t))=o(1) \qquad (4)$$

авномерно на $t\in[0,\ 1]$. Определение и все факты о равномерно ладких функциях, используемые здесь, можно найти в книге] (гл. 2.3).

Теорема 2. Пусть выборочные функции процесса $\xi(t)$ и ункция $u(t)$ равномерно гладки на $[0,\ 1]$. Если одномерная плотость $f_t(x)$ процесса $\xi(t)$ ограничена при $t\in[0,\ 1]$, $x\in(-\infty,+\infty)$, о выполнены равенства (1), (2).

Доказательство достаточно провести для случая $u(t)=0$. оотношение (4) можно записать в виде

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{h}[f(t+h)-f(t)]-\frac{1}{h}[f(t)-f(t-h)]\right|=\omega_f(h)\underset{h\to 0}{\to}0.$$

Если t_0 — точка экстремума функции $f(t)$ и h достаточно мало, о $|h^{-1}(f(t_0+h)-f(t_0))|\leqslant\omega_f(h)$, $f'(t_0)=0$. Обозначим через $A_{k,n}$ ножество выборочных функций, для которых существует точка кстремума $\tau_{k,n}\in\left(\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right)$ такая, что $|\xi(\tau_{k,n})|\leqslant n^{-1}\cdot 2\omega_\xi\left(\frac{2}{n}\right)$, $(\tau_{k,n})=\sup_{t\in\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]}\xi(t)$ или $\xi(\tau_{k,n})=\inf_{t\in\left[\frac{k-1}{n},\ \frac{k}{n}\right]}\xi(t)$.

Положим $A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_{k,n}$, $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}A_n$. Пусть выборочная функия пересекает ось абсцисс бесконечное число раз. Тогда сущестует последовательность точек экстремумов $\tau_m(\omega)$ и последовательость $t_m(\omega)$, $\xi(t_m)=0$, такие, что в силу равенства (4) $|\xi(\tau_m)|\leqslant$ $\leqslant|\tau_m-t_m|\,\omega_\xi(\tau_m-t_m)$. Для любой точки τ_m существуют k, n акие, что $\xi(\tau_{k,n})=\xi(\tau_m)$, $|\tau_k-t_k|\leqslant\frac{2}{n}$. Поэтому $|\xi(\tau_{k,n})|\leqslant$ $\leqslant\frac{2}{n}\omega_\xi\left(\frac{2}{n}\right)$, т. е. $\{C_0(\xi)=\infty\}\in A$.

Аналогично убеждаемся, что $\{T_0(\xi)>0\}\in A$. Так как $\left|\xi(\tau_{k,n})-\xi\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant n^{-1}\omega_\xi(n^{-1})$, то, повторяя доказательство теоремы Буинской, имеем $P\{A_n\}\leqslant c\omega_\varepsilon\left(\frac{2}{n}\right)+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, $\omega_\varepsilon(x)\to 0$, $x\to 0$. з соотношения $A_{n+1}\in A_n$ следует, что $P\{A\}=\lim_{n\to\infty}P\{A_n\}\leqslant\varepsilon$.

Отсюда в силу произвольности ε $P\{C_0(\xi)=\infty\}=P\{T_0(\xi)>0\}=0$.

Доказательство закончено.

Рассмотрим гауссовский стационарный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k} (\xi_k \cos 2^k t + \xi_k' \sin 2^k t), \tag{5}$$

где ξ_k, ξ_k' — независимые стандартные гауссовские величины.

Пусть c_k удовлетворяют следующим условиям:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \infty$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp\{-x_k^2/2c_k^2\} < \infty$, $x_k \to 0$. $\left(\text{Они выполняются, если } c_k = \frac{1}{\sqrt{k}},\ x_k = \frac{1}{\ln k}\right)$. Из 1), 2) следует, что $\lambda_2 = \infty$ и $\varepsilon_k = c_k\ \xi_k \to 0$, $\varepsilon_k' = c_k\ \xi_k' \to 0$.

Известно [5] (с. 83), что если $\varepsilon_k \to 0$, $\varepsilon_k' \to 0$, то ряд (5) представляет равномерно гладкую функцию при $t \in [0, 1]$ и по теореме 2 получаем $P\{C_0(\xi) < \infty\} = 1$.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность М. И. Ядренко за постоянную поддержку и внимание к работе.

Список литературы: 1. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969. 2. *Мацак И. К.* О числе пересечений кривой случайным процессом. — «Теория вероятностей и математическая статистика», 1977, вып. 17, с. 93—102. 3. *Ylvisaker N. D.* A note on the absence of tangencies in Gaussian sample paths. — «Ann. Math. Statist.», 1968, 39, 1, p. 261—262. 4. *Davies P. L* A class of almost nowher differentiable stationary Gaussian processes which are somewhere differentiable. — «J. Appl. Probab.», 1973, 10, 3, p. 682—684. 5. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. 1. М., «Мир», 1965.

I. K. Matsak

ON TANGENCIES AND INTERSECTIONS OF THE RANDOM PROCESS WITH A CONTINUOUS CURVE

Let $T_u(\xi)$ and $C_u(\xi)$ be the numbers of tangencies and intersections of the random process $\xi(t)$ with a continuous curve $u(t)$. In the note the vast classes of the random processes with $P\{T_u\}(\xi) = 0\} = 1$, $P\{C_u(\xi) < \infty\} = 1$ are studied.

Поступила в редколлегию 4.06 1976.

УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, асп., Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О ПОВТОРНОМ СЛАБОМ ПРЕДЕЛЕ СУПЕРПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ $\xi_\varepsilon(t) = (\xi_{\varepsilon i}(t), i = \overline{1, m})$, $t \geqslant 0$ — случайный процесс со значениями в R_m, без разрывов второго рода, непрерывный справа с вероятностью 1, а ν_ε — неотрицательная с вероятностью 1 случайная величина.

В настоящей работе приведены общие условия, при которых имеет место соотношение

$$w - \lim_{\substack{c>0\\ c\to 0}} \overline{\lim_{\overline{\varepsilon\to 0}}} \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c) = \xi_0(\nu_0). \tag{1}$$

Здесь символ $w - \lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{\overline{\varepsilon\to 0}}} \xi_{\varepsilon c} = \xi_0$ понимается для случайных величин $\xi_{\varepsilon c}$ и ξ_0 со значениями в R_m в том смысле, что

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\xi_{\varepsilon c} < \bar{u}\} = \lim_{c\to 0} \underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\xi_{\varepsilon c} < \bar{u}\} = P\{\xi_0 < \bar{u}\}^{*)} \tag{2}$$

для всех точек $\bar{u} \in R_m$, являющихся точками непрерывности функции распределения (ф. р.) случайной величины ξ_0.

2. Будем предполагать, что выполняется условие

А: для всех $t' < t''$, $t', t'' \in T$, где T—некоторое всюду плотное в $[0, \infty)$, содержащее точку 0, множество точек, такое, что $P\{\nu_0 \in T \setminus \{0\}\} = 0$,

$$(\nu_\varepsilon, \sup_{t\in[t',t'')} \xi_{\varepsilon i}(t), i = \overline{1,m}) \Rightarrow (\nu_0, \sup_{t\in[t',t'')} \xi_{0i}(t), i = \overline{1,m}) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$(\nu_\varepsilon, \inf_{t\in[t',t'')} \xi_{\varepsilon i}(t), i = \overline{1,m}) \Rightarrow (\nu_0, \inf_{t\in[t',t'')} \xi_{0i}(t), i = \overline{1,m}) \text{ при } \varepsilon \to 0.^{**)}$$

Достаточным (см. [1]) для выполнения условия **А** является более сильное условие

А[1]: 1) конечномерные распределения процессов $(\nu_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t))$, $t \geqslant 0$ сходятся слабо к конечномерным распределениям процесса $(\nu_0, \xi_0(t))$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) процессы $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$ компактны в топологии M_2 [2] на каждом промежутке $[0, T_k]$, $k \geqslant 1$, где T_k — некоторая последовательность, такая, что $T_k \to \infty$, $k \to \infty$.

---

*) Символ $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) < \bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ означает, что $a_i < b_i$ для всех $i = \overline{1, m}$.

**) Символ $\xi_\varepsilon \Rightarrow \xi_0$ при $\varepsilon \to 0$ означает, как обычно, слабую сходимость функций распределения случайных величин ξ_ε и ξ_0 при $\varepsilon \to 0$.