УДК 519.21

Ю. С. МИШУРА, асп., Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ, д-р физ.-мат. наук,
Киевский университет

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О ПОВТОРНОМ СЛАБОМ ПРЕДЕЛЕ СУПЕРПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ $\xi_\varepsilon(t) = (\xi_{\varepsilon i}(t),\ i = \overline{1, m})$, $t \geqslant 0$ — случайный процесс со значениями в R_m, без разрывов второго рода, непрерывный справа с вероятностью 1, а ν_ε — неотрицательная с вероятностью 1 случайная величина.

В настоящей работе приведены общие условия, при которых имеет место соотношение

$$w - \lim_{\substack{c>0 \\ c\to 0}} \overline{\lim_{\overline{\varepsilon\to 0}}}\, \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c) = \xi_0(\nu_0). \tag{1}$$

Здесь символ $w - \lim\limits_{c\to 0} \overline{\lim\limits_{\overline{\varepsilon\to 0}}}\, \xi_{\varepsilon c} = \xi_0$ понимается для случайных величин $\xi_{\varepsilon c}$ и ξ_0 со значениями в R_m в том смысле, что

$$\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\, P\{\xi_{\varepsilon c} < \bar{u}\} = \lim_{c\to 0} \lim_{\overline{\varepsilon\to 0}} P\{\xi_{\varepsilon c} < \bar{u}\} = P\{\xi_0 < \bar{u}\}^{*)} \tag{2}$$

для всех точек $\bar{u} \in R_m$, являющихся точками непрерывности функции распределения (ф. р.) случайной величины ξ_0.

2. Будем предполагать, что выполняется условие

А: для всех $t' < t''$, $t', t'' \in T$, где T—некоторое всюду плотное в $[0, \infty)$, содержащее точку 0, множество точек, такое, что $P\{\nu_0 \in \in T \setminus \{0\}\} = 0$,

$$(\nu_\varepsilon, \sup_{t\in[t',t'')} \xi_{\varepsilon i}(t),\ i = \overline{1, m}) \Rightarrow (\nu_0, \sup_{t\in[t',t'')} \xi_{0i}(t),\ i = \overline{1, m}) \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$(\nu_\varepsilon, \inf_{t\in[t',t'')} \xi_{\varepsilon i}(t),\ i = \overline{1, m}) \Rightarrow (\nu_0, \inf_{t\in[t',t'')} \xi_{0i}(t),\ i = \overline{1, m}) \text{ при } \varepsilon \to 0.^{**)}$$

Достаточным (см. [1]) для выполнения условия **А** является более сильное условие

А^1: 1) конечномерные распределения процессов $(\nu_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t))$, $t \geqslant 0$ сходятся слабо к конечномерным распределениям процесса $(\nu_0, \xi_0(t))$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2) процессы $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$ компактны в топологии M_2 [2] на каждом промежутке $[0, T_k]$, $k \geqslant 1$, где T_k — некоторая последовательность, такая, что $T_k \to \infty$, $k \to \infty$.

---

*) Символ $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) < \bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$ означает, что $a_i < b_i$ для всех $i = \overline{1, m}$.

**) Символ $\xi_\varepsilon \Rightarrow \xi_0$ при $\varepsilon \to 0$ означает, как обычно, слабую сходимость функций распределения случайных величин ξ_ε и ξ_0 при $\varepsilon \to 0$.

Условие А было сформулировано в работе одного из авторов [3 в ней было показано, что при выполнении условия А и дополні тельном предположении о том, что предельный процесс $\xi_0(t)$ с ве роятностью 1 непрерывен в точке ν_0, имеет место соотношені

$$\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon) \Rightarrow \xi_0(\nu_0) \text{ при } \varepsilon \to 0. \quad (\text{:}$$

Теорема 1. Если выполняется условие А и процесс ξ_0 (і непрерывен справа с вероятностью 1, то имеет место соотношені (1).

3. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, сделае некоторые вспомогательные замечания. Пусть $\xi_{\varepsilon c}$ для каждоı $\varepsilon \geqslant 0$ и $c > 0$, а также ξ_0 — случайные величины со значениями R_m. Отметим прежде всего, что, как и в случае обычной слабой сх(димости функций распределения, для того чтобы соотношені было справедливо для всех точек $\bar{u}$ непрерывности ф. р. предел ной случайной величины ξ_0, достаточно, чтобы (2) выполнялос для точек $\bar{u}$ из некоторого всюду плотного в R_m множества U.

В дальнейшем постоянно используется следующее простое вспс могательное утверждение.

Лемма 1. 1. Если для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ и $c > 0$ случайная вел чина $\xi_{\varepsilon c} = (\xi_{\varepsilon c i},\ i = \overline{1, m})$ представима в виде $\xi_{\varepsilon c} = \alpha_{\varepsilon c} + \beta_{\varepsilon c}$, гд $\alpha_{\varepsilon c}$ и $\beta_{\varepsilon c}$ — случайные величины со значениями в R_m, для которы выполняются условия:

$$\text{а) } w - \lim_{\substack{c>0 \\ c\to 0}} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \alpha_{\varepsilon c} = \xi_0 = (\xi_{0i},\ i = \overline{1, m}),$$

$$\text{б) } \lim_{\substack{c>0 \\ c\to 0}} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{|\beta_{\varepsilon c}| > \delta\} = 0,\ \delta > 0,$$

то и $w - \lim\limits_{\substack{c>0 \\ c\to 0}} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \xi_{\varepsilon c} = \xi_0$.

2. Если для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ и $c > 0$ для случайной величин $\alpha_{\varepsilon c} = (\alpha_{\varepsilon c i},\ i = \overline{1, m})$ существуют случайные величины $\alpha_{\varepsilon c}^{\pm} = (\alpha_{\varepsilon c i}^{\pm}$ $i = \overline{1, m})$, такие, что $\alpha_{\varepsilon c i}^{-} \leqslant \alpha_{\varepsilon c i} \leqslant \alpha_{\varepsilon c i}^{+}$, $i = \overline{1, m}$, причем:

в) $\alpha_{\varepsilon c}^{\pm} \Rightarrow \alpha_{0c}^{\pm}$ при $\varepsilon \to 0$ для $c > 0$,

г) $\alpha_{0c}^{\pm} \Rightarrow \xi_0$ при $c > 0$, $c \to 0$, то $w - \lim\limits_{c>0,\ c\to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \alpha_{\varepsilon c} = \xi_0$.

Доказательство. Пусть $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$ — некоторая точк непрерывности ф. р. ξ_0. Всегда можно выбрать последовательнос положительных чисел $\delta_{ik} = \delta_{ik}(\bar{u})$, $i = \overline{1, m}$, $k \geqslant 1$ так, чтобы вс точки $(u_i - \delta_{ik},\ i = \overline{1, m})$, $k \geqslant 1$ были точками непрерывности ф. р. ξ

Воспользуемся теперь оценкой

$$P\{\xi_{\varepsilon c i} < u_i,\ i = \overline{1, m}\} \geqslant P\{\alpha_{\varepsilon c i} + |\beta_{\varepsilon c i}| < u_i,\ i = \overline{1, m}\} \geqslant$$

$$\geqslant P\{\alpha_{\varepsilon ci}+\delta_{ik}<u_i,\ |\beta_{\varepsilon ci}|\leqslant\delta_{ik},\ i=\overline{1,m}\}\geqslant$$

$$\geqslant P\{\alpha_{\varepsilon ci}<u_i-\delta_{ik},\ i=\overline{1,m}\}-\sum_{i=1}^{m}P\{|\beta_{\varepsilon ci}|>\delta_{ik}\}. \qquad (4)$$

Переходя в (4) к пределу вначале при $\varepsilon\to 0$, а затем при $c\to 0$ и учитывая условия а) и б), получаем

$$\lim_{\substack{c>0\\ c\to 0}}\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}P\{\xi_{\varepsilon ci}<u_i,\ i=\overline{1,m}\}\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{k\to\infty}\lim_{\substack{c>0\\ c\to 0}}\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}P\{\alpha_{\varepsilon ci}<u_i-\delta_{ik},\ i=\overline{1,m}\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lim_{k\to\infty}\lim_{\substack{c>0\\ c\to 0}}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}P\{|\beta_{\varepsilon ci}|>\delta_{ik}\}=\lim_{k\to\infty}P\{\xi_{0i}<u_i-\delta_{ik},$$

$$i=\overline{1,m}\}=P\{\xi_{0i}<u_i,\ i=\overline{1,m}\},\quad k\to\infty. \qquad (5)$$

Аналогично можно показать, что для точек $\bar{u}$ непрерывности ф. р. ξ_0

$$\lim_{\substack{c>0\\ c\to 0}}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}P\{\xi_{\varepsilon c}<\bar{u}\}\leqslant P\{\xi_0<\bar{u}\}.$$

Докажем теперь второе утверждение леммы. Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что параметр c пробегает лишь счетное число значений $c_k>0$, $c_k\to 0$ при $k\to\infty$. Для всех точек $\bar{u}\in U$, где U — множество точек, являющихся точками непрерывности ф. р. случайных величин $\xi^{\pm}_{0c_k}$, $k\geqslant 1$ и ξ_0 ($\bar{U}$ — не более чем счетно, и, следовательно, U всюду плотно в R_m), имеем в силу в) и г)

$$\lim_{\substack{c_k>0\\ c_k\to 0}}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}P\{\alpha^{-}_{\varepsilon c_k}<\bar{u}\}=\lim_{\substack{c_k>0\\ c_k\to 0}}P\{\alpha^{-}_{0c_k}<\bar{u}\}=P\{\xi_0<\bar{u}\}=$$

$$=\lim_{\substack{c_k>0\\ c_k\to 0}}\underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}P\{\alpha^{+}_{\varepsilon c_k}<\bar{u}\}. \qquad (6)$$

Утверждение леммы очевидным образом следует из (6), так как по определению величин $\alpha^{\pm}_{\varepsilon c}$

$$P\{\alpha^{+}_{\varepsilon c}<\bar{u}\}\leqslant P\{\alpha_{\varepsilon c}<\bar{u}\}\leqslant P\{\alpha^{-}_{\varepsilon c}<\bar{u}\}$$

для всех $\bar{u}\in R_m$.

4. Доказательство теоремы 1. Для каждого $c>0$ можно построить последовательность разбиений промежутка $[0,\infty)$ $0=z_{c,0}<z_{c,1}<\ldots<z_{c,n}<\ldots$ так, чтобы:

а) $z_{c,n}\in T$, $n=0,1,\ldots$,

б) $c/2\leqslant z_{c,n+1}-z_{c,n}<c$, $n=0,1,\ldots$.

Определим случайные величины: $\alpha_{\varepsilon c}^{+} = (\alpha_{\varepsilon ci}^{+},\ i=\overline{1,m})$, где $\alpha_{\varepsilon ci}^{+} = \sup_{t\in[z_{c,n+1}, z_{c,n+3})} \xi_{\varepsilon i}(t)$, если $\nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})$, $n=0,1,\ldots$, и $\alpha_{\varepsilon c}^{-} = (\alpha_{\varepsilon ci}^{-},\ i=\overline{1,m})$, где $\alpha_{\varepsilon ci}^{-} = \inf_{t\in[z_{c,n+1}, z_{c,n+3})} \xi_{\varepsilon i}(t)$, если $\nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})$, $n=0,1,\ldots$.

Очевидно, если $\nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})$, то необходимо $\nu_\varepsilon + c \in [z_{c,n+1}, z_{c,n+3})$. Поэтому для любого $c>0$ и $\varepsilon \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\alpha_{\varepsilon ci}^{-} \leqslant \xi_{\varepsilon i}(\nu_\varepsilon + c) \leqslant \alpha_{\varepsilon ci}^{+},\quad i=\overline{1,m}. \tag{7}$$

По определению величин $\alpha_{\varepsilon ci}^{+}$

$$P\{\alpha_{\varepsilon ci}^{+} < u_i,\ i=\overline{1,m}\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\sup_{t\in[z_{c,n+1}, z_{c,n+3})} \xi_{\varepsilon i}(t) < u_i,\quad i=\overline{1,m},\ \nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})\}. \tag{8}$$

Ряд справа в (8) сходится асимптотически равномерно по ε, а именно:

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sum_{n\geqslant N} P\{\sup_{t\in[z_{c,n+1}, z_{c,n+3})} \xi_{\varepsilon i}(t) < u_i,\ i=\overline{1,m},$$

$$\nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})\} \leqslant \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sum_{n\geqslant N} P\{\nu_\varepsilon \in [z_{c,n}, z_{c,n+1})\} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\nu_\varepsilon \in [z_{c,N}, \infty)\} = \lim_{N\to\infty} P\{\nu_0 \geqslant z_{c,N}\} = 0.$$

Поэтому из (8) в силу условия **А** следует очевидным образом, что случайные величины

$$\alpha_{\varepsilon c}^{+} \Rightarrow \alpha_{0c}^{+} \text{ при } \varepsilon\to 0,\ c>0. \tag{9}$$

Кроме того, в силу непрерывности процесса $\xi_0(t)$ справа, имеет место соотношение $\alpha_{0c}^{+} \Rightarrow \xi_0(\nu_0)$ с вероятностью 1 при $c>0$, $c\to 0$, а, следовательно, и

$$\alpha_{0c}^{+} \Rightarrow \xi_0(\nu_0) \text{ при } c>0,\ c\to 0. \tag{10}$$

Аналогично проверяется выполнение условий в) и г) леммы 1 для случайных величин $\alpha_{\varepsilon c}^{-}$ и $\xi_0 = \xi_0(\nu_0)$.

Применяя к величинам $\alpha_{\varepsilon c} = \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c)$ и $\alpha_{\varepsilon c}^{\pm}$ лемму 1, получаем утверждение теоремы.

5. В качестве следствий теоремы 1 могут быть получены некоторые достаточные и необходимые условия слабой сходимости распределений суперпозиций случайных функций $\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon)$ и $\xi_0(\nu_0)$ при $\varepsilon\to 0$, выраженные через конечномерные распределения процессов $\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + t)$, $t\geqslant 0$.

Следствие 1. Пусть выполняется условие **A**. Тогда для того чтобы имело место соотношение (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{B}_1\colon \lim_{\substack{c>0\\c\to 0}} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P \mid \{A_{\varepsilon c}^{(\bar u)} \setminus A_{\varepsilon 0}^{(\bar u)}\} - P\{A_{\varepsilon 0}^{(\bar u)} \setminus A_{\varepsilon c}^{(\bar u)}\} \mid = 0$$

для всех точек $\bar u \in R_m$ непрерывности ф. р. $\xi_0(\nu_0)$ (здесь $A_{\varepsilon c}^{(\bar u)} = \{\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c) < \bar u\}$).

Следствие 2. Пусть выполняется условие **A**. Тогда для того чтобы имело место соотношение (3), достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{B}_2\colon \lim_{\substack{c>0\\c\to 0}} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{|\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c) - \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon)| > \delta\} = 0,\ \delta > 0.$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к случайным величинам $\alpha_{\varepsilon c} = \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c)$ и $\beta_{\varepsilon c} = \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon) - \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c)$.

Замечание 1. В работе [4] утверждение, сформулированное в следствии 2, доказано методом одного вероятностного пространства для случая, когда вместо **A** выполняется более сильное условие $\mathbf{A}_1$. Заметим, однако, что условие $\mathbf{B}_2$ даже в этом случае не является необходимым для того, чтобы имело место соотношение (3).

Замечание 2. Совершенно аналогично теореме 1 можно показать, что при выполнении условия **A**

$$w - \lim_{\substack{c>0\\c\to 0}} \overline{\underline{\lim}}_{\varepsilon\to 0} \xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon - c) = \xi_0(\nu_0 - 0)$$

(для $t < 0$ по определению необходимо считать $\xi_0(t) = \xi_0(0)$).

Замечание 3. В теореме 1 можно было не требовать непрерывности справа для допредельных процессов. Достаточно было потребовать, чтобы $\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon)$, $\sup\limits_{a\leqslant t<b} (\inf)\, \xi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$ представляли собой случайные величины (возможно, несобственные).

Список литературы: 1. *Сильвестров Д. С.* Предельные теоремы для сложных случайных функций. Изд-во при КГУ, 1974. 2. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов. — «Теория вероят. и ее применения», 1956, **1**, 3, с. 289—319. 3. *Сильвестров Д. С.* Замечания о пределе сложной случайной функции. — «Теория вероят. и ее применения», 1972, **17**, 4, с. 707—715. 4. *Анисимов В. В.* О некоторых предельных теоремах для суперпозиции случайных процессов. — «ДАН УССР», 1974, 8, с. 675—677.

Yu. S. Mishura, D. S. Silvestrov

A REMARK ABOUT REPEATED WEAK LIMIT OF THE SUPERPOSITION OF STOCHASTIC FUNCTIONS

Let $\xi_\varepsilon(t)$ be a stochastic process, ν_ε —a random function. The sufficient conditions under which

$$\lim_{\substack{c>0\\c\to 0}} \overline{\underline{\lim}}_{\varepsilon\to 0} P\{\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon + c) < \bar u\} = P\{\xi_0(\nu_0) < \bar u\}$$

are obtained.

Поступила в редколлегию 5.03 1976.