УДК 519.21

М. П. МОКЛЯЧУК, ассист., М. И. ЯДРЕНКО, канд. физ.-мат. наук,
Киевский университет

ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ИЗОТРОПНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА СФЕРЕ. I

Различные проблемы теории автоматического управления, ра диофизики, геохимии, астрономии, метеорологии приводят к не обходимости рассматривать случайные функции, зависящие о времени и точки на сфере. При этом иногда оказывается естествен ным предположение об однородности по временной переменной и изотропности по пространственной переменной случайных функций (случайных полей).

В настоящей статье, разделенной на две части, рассмотрены линейные статистические задачи для однородных по времени изо тропных случайных полей на сфере. В первой части указано спек тральное представление однородного по времени изотропного поля на сфере, приведены примеры корреляционных функций таких полей, рассмотрена задача об оценке неизвестного математического ожидания случайного поля. Вторая часть посвящена задаче линей ной экстраполяции для однородного по времени изотропного слу чайного поля на сфере.

Результаты статьи были предметом сообщения на IV Междуна родном симпозиуме по теории информации (Ленинград — Репино июнь 1976 г.).

1. Обозначения, вспомогательные сведения о сферических гар мониках. Пусть S_n — единичная сфера в n-мерном евклидовом пространстве, $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — сферические координаты точки $x \in S_n$, $S_m^l(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \varphi)$ — ортонормированные сферические гармо ники степени m $(l = 1, 2, \ldots, h(m, n))$,

$$h(m,n) = (2m + n - 2)\frac{(m+n-3)!}{(n-2)!\,m!} \qquad (1.1)$$

число линейно независимых сферических гармоник степени m (от носительно свойств сферических гармоник см., например, [1—3]) Пусть $C_m^{\nu}(z)$ — многочлены Гененбауэра, определяемые производя щей функцией

$$(1 - 2zt + t^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{\nu}(z)\, t^m. \qquad (1.2)$$

Мы будем использовать следующие два важных утверждения из теории сферических функций.

Теорема сложения для сферических гар моник. Для любых двух точек x_1 и x_2 из S_n

$$\sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(x_1) S_m^l(x_2) = \frac{h(m,n)}{\omega_n} \cdot \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}, \tag{1.3}$$

где $\cos\theta = \cos\langle x_1, x_2\rangle = (x_1, x_2)$ — «угловое» расстояние между точками x_1 и x_2, $\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

Теорема Функе—Гекке. Если $\psi(v)$ —непрерывная функция на $[-1, 1]$, то для любой точки $x \in S_n$ и любых $m, l : m \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant h(m, n)$

$$\int_{S_n} \psi(\cos\langle x, y\rangle)\, S_m^l(y)\, m_n(dy) = b_m S_m^l(x), \tag{1.4}$$

где

$$b_m = \frac{\omega_{n-1}}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \int_{-1}^{1} \psi(t)\, C_m^{\frac{n-2}{2}}(t)\,(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt, \tag{1.5}$$

$m_n(\cdot)$ — лебегова мера на S_n.

Отметим еще такое соотношение, которое можно получить из (1.2):

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m,n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(x)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}\, t^m = \frac{1-t^2}{(1-2tx+t^2)^{\frac{n}{2}}} \quad (|t| < 1,\ n > 2). \tag{1.6}$$

2. Спектральное разложение однородного по времени изотропного случайного поля на сфере. Пусть $\xi(t, x)$ — случайное поле на $R \times S_n$, где $R = (-\infty, \infty)$. Предположим, что $\xi(t, x)$ непрерывно в среднем квадратичном и $M\xi^2(t, x) < \infty$.

Случайное поле $\xi(t, x)$ будем называть однородным по времени изотропным случайным полем на сфере, если $M\xi(t, x) = \text{const}$ (будем предполагать в дальнейшем $M\xi(t, x) = 0$), а

$$M\xi(t,x)\,\xi(s,y) = B(t-s,\ \cos\langle x, y\rangle). \tag{2.1}$$

Теорема 1. Однородное по времени изотропное случайное поле на сфере имеет вид

$$\xi(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l(t)\, S_m^l(x), \tag{2.2}$$

где $\xi_m^l(t)$, $m = 0, 1, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, h(m, n)$ — последовательность случайных процессов такая, что

$$M\xi_m^l(t)\,\xi_{m'}^{l'}(s) = \delta_m^{m'}\,\delta_l^{l'}\, b_m(t-s), \tag{2.3}$$

а $b_m(t-s)$ — некоторая последовательность положительно определенных ядер на $R \times R$, такая, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} h(m, n)\, b_m(0) < \infty. \tag{2.4}$$

Корреляционная функция $\xi(t, x)$ имеет вид

$$B(t-s, \cos\langle x, y\rangle) = \\ = \frac{1}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\langle x, y\rangle)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}\, b_m(t-s). \tag{2.5}$$

Действительно, запишем разложение (2.2) $\xi(t, x)$ по системе сферических функций. Пусть $\xi_m^l(t)$ определяется соотношением

$$\xi_m^l(t) = \int\limits_{S_n} \xi(t, x)\, S_m^l(x)\, m_n(dx). \tag{2.6}$$

Тогда, используя теорему Функе — Гекке, получаем

$$M\xi_m^l(t)\, \xi_{m'}^{l'}(s) = \int\limits_{S_n} \int\limits_{S_n} B(t-s, \cos\langle x, y\rangle)\, S_m^l(x)\, S_{m'}^{l'}(y)\, m_n(dx) \times \\ \times m_n(dy) = \int\limits_{S_n} S_m^l(x) \left[\int\limits_{S_n} B(t-s, \cos\langle x, y\rangle)\, S_{m'}^{l'}(y)\, m_n(dy)\right] \times \\ \times m_n(dx) = b_m(t-s) \int\limits_{S_n} S_m^l(x)\, S_{m'}^{l'}(x)\, m_n(dx) = b_m(t-s)\, \delta_m^{m'}\, \delta_l^{l'},$$

где

$$b_m(t-s) = \frac{\omega_{n-1}}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \int\limits_{-1}^{1} B(t-s, z)\, C_m^{\frac{n-2}{2}}(z)\, (1-z^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dz.$$

В частности, при $n = 3$ $h(m, n) = 2m + 1$ и соотношение (2.5) примет вид

$$B(t-s, \cos\langle x, y\rangle) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, P_m(\cos\langle x, y\rangle)\, b_m(t-s), \tag{2.7}$$

где $P_m(u)$ — многочлен Лежандра степени m.

При $n = 2$ все формулы принимают особенно простой вид, если рассматривать комплекснозначные величины. В этом случае

$$\xi(t, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(t)\, e^{im\varphi}, \tag{2.8}$$

где $\{\xi_m(t)\}$ — последовательность случайных процессов, такая, что $\mu\xi_m(t)\overline{\xi_l(s)} = b_m(t-s)\,\delta_m^l$, $b_m(u) = b_{-m}(u)$ и $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} b_m(0) < \infty$.

Корреляционная функция $\xi(t, \varphi)$ имеет вид

$$B(t-s,\ \varphi_1-\varphi_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\, b_m(t-s). \qquad (2.9)$$

Укажем несколько примеров корреляционных функций однородных по времени изотропных случайных полей на сфере.

Пример 1. Пусть $n > 2$ и

$$b_m(t-s) = \frac{[b(t-s)]^m}{h(m,n)}\, C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)\,\omega_n,$$

где $b(t-s)$ — некоторое положительно определенное ядро на $R\times R$ (заметим, что $b^m(t-s)$ будет положительно определенным ядром при любом m).

Тогда, используя (2.5) и (1.2), получаем, что

$$B(t-s,\ \cos\theta) = [1 - 2b(t-s)\cos\theta + b^2(t-s)]^{-\frac{n-2}{2}} \qquad (2.10)$$

корреляционная функция однородного по времени изотропного случайного поля на сфере.

Пример 2. Пусть $0 < a < 1$ и

$$b_m(t-s) = a^m\, b(t-s)\, \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)}{h(m,n)}\, \omega_n.$$

Тогда из (2.5) и (1.2) получаем, что

$$B(t-s,\ \cos\theta) = \frac{b(t-s)}{[1 - 2a\cos\theta + a^2]^{\frac{n-2}{2}}} \qquad (2.11)$$

корреляционная функция однородного по времени изотропного случайного поля на сфере.

Ряд примеров корреляционных функций можно получить, используя соотношение (1.6).

Пример 3. Пусть $b_m(t-s) = [b(t-s)]^m$, где $b(t-s)$ — положительно определенное ядро на $R\times R$. Тогда получим, используя (2.5) и (1.6), что

$$B(t-s,\ \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n}\, \frac{1 - b^2(t-s)}{[1 - 2b(t-s)\cos\theta + b^2(t-s)]^{\frac{n}{2}}} \qquad (2.12)$$

корреляционная функция однородного по времени изотропного случайного поля на сфере.

Пример 4. Пусть $b_m(t-s) = a^m b(t-s)$, $0 < a < 1$. Тогда

$$B(t-s, \cos\theta) = \frac{1}{\omega_n} b(t-s) \frac{1-a^2}{[1-2a\cos\theta + a^2]^{\frac{n}{2}}} \tag{2.13}$$

корреляционная функция однородного по времени изотропного поля на сфере.

Пример 5. Пусть a_m — произвольная последовательность неотрицательных чисел, такая, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m h(m, n) < +\infty$, и $b_m(t-s) = a_m b(t-s)$. Тогда

$$B(t-s, \cos\theta) = \frac{b(t-s)}{\omega_n} \sum_{m=0}^{\infty} a_m h(m, n) \frac{C_m^{\frac{n-2}{2}}(\cos\theta)}{C_m^{\frac{n-2}{2}}(1)} \tag{2.14}$$

корреляционная функция однородного по времени изотропного поля на сфере.

Заметим, что однородные по времени и изотропные на окружности случайные поля (случайные поля на $(-\infty, \infty) \times [0,2\pi]$) рассматривались в работах М. П. Моклячука [5, 6] (задачи линейной экстраполяции), С. Б. Хацета, М. И. Ядренко [7] (оценка неизвестного среднего). В работе Г. М. Рахимова [8] рассматривалась задача об оценке корреляционной функции и «спектральных коэффициентов» однородного по времени и изотропного случайного поля на сфере. Условия равномерной сходимости спектральных разложений и свойства непрерывности таких полей изучались в работе Ю. В. Козаченко и М. И. Ядренко [9].

3. Об оценке коэффициентов регрессии и неизвестного математического ожидания. Предположим, что на множестве

$$E = \{(t, x) : t = t_1,\ x \in S_n\} \tag{3.1}$$

наблюдается случайное поле

$$\xi(t, x) = ag(t, x) + \eta(t, x), \tag{3.2}$$

где $\eta(t, x)$ — однородное по времени изотропное случайное поле на сфере, такое, что $M\eta(t, x) = 0$, $g(t, x)$ — известная функция, a — неизвестная константа.

Требуется построить оценку неизвестного параметра a, линейно выражающуюся через результаты наблюдения, несмещенную и имеющую наименьшую среднеквадратическую погрешность среди всех несмещенных линейных оценок.

Пусть $\xi_m^l(t)$, $g_m^l(t)$, $\eta_m^l(t)$ — коэффициенты Фурье разложений функций $\xi(t,x)$, $g(t,x)$, $\eta(t,x)$ соответственно по системе функций $S_m^l(x)$. Предположим, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{[g_m^l(t_1)]^2}{b_m(t_1, t_1)} < +\infty. \tag{3.3}$$

Пусть $H_\xi(t)$ — замкнутая в смысле среднеквадратической сходимости линейная оболочка случайных величин $\xi(t,x)$, $x \in S_n$, а $H(t)$ — гильбертово пространство последовательностей

$$\bar{c} = \left\{c_m^l : m = 0, 1, \ldots;\ l = \overline{1, h(m,n)};\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} [c_m^l]^2 b_m(t, t) < \infty\right\},$$

в котором скалярное произведение двух последовательностей $\bar{c}_1 = \{c_{1m}^l\}$, $\bar{c}_2 = \{c_{2m}^l\}$ определено следующим образом:

$$\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2 \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_{1m}^l c_{2m}^l b_m(t, t).$$

Из (2.2) следует, что каждая случайная величина γ из $H_\xi(t)$ имеет вид

$$\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l \xi_m^l(t),$$

где

$$\bar{c} = \{c_m^l\} \in H(t).$$

Будем искать оценку $\hat{a}$ для a в виде

$$\hat{a} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l \xi_m^l(t), \tag{3.4}$$

где $\bar{c} = \{c_m^l\} \in H(t_1)$.

Условие несмещенности оценки (3.4) имеет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} c_m^l g_m^l(t_1) = 1. \tag{3.5}$$

Пусть

$$\bar{d} = \left\{\frac{g_m^l(t_1)}{b_m(t_1, t_1)},\ m = 0, 1, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, h(m,n)\right\}.$$

В силу предположения (3.3) $\bar{d} \in H(t_1)$. Условие несмещенности (3.5) теперь можно записать в виде $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle = 1$.

Заметим теперь, что при выполнении условия (3.5) L
$= M\,|\,\widehat{a} - a\,|^2 = \langle \bar{c}, c \rangle = \|\,\bar{c}\,\|^2$.

Таким образом, задача отыскания линейной несмещенной оц
$\widehat{a}$ параметра a, имеющей минимальную дисперсию, свелась к т
геометрической задаче в гильбертовом пространстве $H(t_1)$: с
всех векторов $\bar{c} \in H(t_1)$, удовлетворяющих условию $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle = 1$,
но найти вектор $\bar{c}$ с наименьшей нормой. Очевидно, $\bar{c} = k\bar{d}$,
коэффициент k находится из условия $\langle \bar{c}, \bar{d} \rangle = 1$, то есть

$$k = \frac{1}{\langle \bar{d}, \bar{d} \rangle} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{[g_m^l(t_1)]^2}{b_m(t_1, t_1)} \right)^{-1}.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Пусть случайное поле $\xi(t, x) = ag(t, x)$
$+ \eta(t, x)$, $x \in S_n$, где a — неизвестный параметр, $g(t, x)$ — извес
функция, $\eta(t, x)$ — однородное по времени изотропное случа
поле на сфере, наблюдается на множестве (3.1).

Тогда линейная несмещенная оценка a с минимальной дис
сией имеет вид

$$\widehat{a} = \frac{\int\limits_{S_n} \xi(t_1, x)\, l(t_1, x)\, m_n(dx)}{\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{l=1}^{h(m,n)} [g_m^l(t_1)]^2\, b_m^{-1}(t_1, t_1)},$$

где

$$l(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{g_m^l(t)}{b_m(t, t)} S_m^l(x).$$

Дисперсия оценки $\widehat{a}$ равна

$$D\widehat{a} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \frac{[g_m^l(t_1)]^2}{b_m(t_1, t_1)} \right)^{-1}.$$

Заметим, что соотношения (3.6) — (3.8) принимают особ
простой вид, если функция $g(t, x) = g(t)$ не зависит от пере
ной $x \in S_n$. В этом случае

$$\widehat{a} = \frac{1}{g(t)} \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{S_n} \xi(t_1, x)\, m_n(dx), \qquad ($$

$$D\widehat{a} = \frac{b_0(t_1, t_1)}{\omega_n g^2(t_1)}. \qquad (3$$

В частности, если $g(t, x) \equiv 1$, мы имеем задачу об оценке
известного среднего a случайного поля $\xi(t, x)$. Из теоремы
соотношений (3.9) — (3.10) получаем следующий результат.

Теорема 3. Среди всех линейных несмещенных оценок неизвестного среднего случайного поля $\xi(t, x)$, наблюдаемого на множестве (3.1), минимальную дисперсию имеет оценка

$$\hat{a} = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_n} \xi(t_1, x)\, m_n(dx). \tag{3.11}$$

Дисперсия этой оценки равна

$$D\hat{a} = \omega_n^{-1} b_0(t_1, t_1). \tag{3.12}$$

Рассмотрим задачу об оценке неизвестного среднего случайного поля $\xi(t, x)$ в том случае, когда случайное поле наблюдается на множестве

$$E = \{(t, x) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in S_n\}. \tag{3.13}$$

Ниже мы используем следующий факт [11]: если случайное поле $\xi(z) = a + \eta(z)$ наблюдается на множестве E, то линейная несмещенная оценка $\hat{a}$ с минимальной дисперсией определяется из уравнения

$$M\eta(z)\hat{a} = c, \quad z \in E. \tag{3.14}$$

Будем искать оценку $\hat{a}$ в виде

$$\hat{a} = \int_0^T \int_{S_n} c(t, x)\, \xi(t, x)\, dt m_n(dx). \tag{3.15}$$

Условие несмещенности оценки и условие (3.14) принимают соответственно вид

$$\int_0^T \int_{S_n} c(t, x)\, dt m_n(dx) = 1, \tag{3.16}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(y) \int_0^T c_m^l(t)\, b_m(t-u)\, dt = c \tag{3.17}$$

$$(\forall (u, y) : 0 \leqslant u \leqslant T,\ y \in S_n),$$

где

$$c_m^l(t) = \int_{S_n} c(t, x)\, S_m^l(x)\, m_n(dx). \tag{3.18}$$

Из условия (3.17), используя свойства ортонормированности сферических гармоник $S_m^l(y)$ на S_n, получаем

$$\int_0^T c_0^1(t)\, b_0(t-u)\, dt = c\sqrt{\omega_n}, \quad 0 \leqslant u \leqslant T; \tag{3.19}$$

$$\int_0^T c_m^l(t)\, b_m(t-u)\, dt = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant T, \quad m^2 + (l-1)^2 \neq 0 \tag{3.20}$$

(таким образом, можно положить $c_m^l(t) \equiv 0$ при $m^2 + (l-1)^2 \neq 0$). Условие несмещенности (3.16) записывается в виде

$$\sqrt{\omega_n} \int_0^T c_0^1(t)\, dt = 1. \tag{3.21}$$

Теорема 4. Если случайное поле $\xi(t;\, x) = a + \eta(t,\, x)$, где $\eta(t,\, x)$ — однородное по времени изотропное случайное поле на сфере с нулевым средним, a — неизвестная константа, наблюдается на множестве (3.13), то линейная несмещенная оценка параметра a с минимальной дисперсией имеет вид (3.15), где $c(t,\, x) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} c_0^1(t)$, и функция $c_0^1(t)$ является решением интегрального уравнения (3.19), удовлетворяющим условию (3.21). Дисперсия оценки равна константе c, которая определяется условием (3.21).

Интегральное уравнение (3.19) является основным интегральным уравнением статистики случайных процессов; методы его решения многократно обсуждались в литературе по статистике случайных процессов (см., например, [10], где приведена дальнейшая библиография).

Пример 6. Пусть в примерах 1—5 $b_0(t-s) = \exp\{-\alpha\,|t-s|\}$. Тогда

$$\hat{a} = \frac{1}{\omega_n} \frac{1}{2+\alpha T}\left[\alpha \int_0^T \int_{S_n} \xi(t,x)\, dt m_n(dx) + \right.$$

$$\left. + \int_{S_n} \xi(0,x)\, m_n(dx) + \int_{S_n} \xi(T,x)\, m_n(dx)\right].$$

Список литературы: 1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1966. 2. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. М., «Наука», 1965. 3. *Muller C.* Spherical harmonics. Lect. Not. in Math., 1966, 17. 4. *Яглом А. М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— «Труды Московского математич. общества», 1955, 4, с. 333—375. 5. *Моклячук М. П.* Некоторые задачи линейной экстраполяции однородных случайных полей на цилиндре, I, II.— «Исследование операций и АСУ», 1974, 3, с. 97—109; 1974, 4, с. 91—102. 6. *Моклячук М. П.* Про задачу лінійної екстраполяції для одного класу однорідних випадкових полів.— «ДАН УРСР. Сер. А», 1974, 6, с. 515—518. 7. *Хацет С. Б., Ядренко М. Й.* Про оцінку невідомого середнього значення однорідного випадкового поля на циліндрі.— «Вісник Київського університету. Серія математики, механіки», 1976, 18, с. 75—80. 8. *Рахимов Г. М.* Статистические оценки спектра и корреляционной функции однородного по времени и изотропного случайного поля на сфере.— В сб.: Исследования по статистике случайных процессов. Киев, ИМ АН УССР, 1976, с. 152—161. 9. *Козаченко Ю. В., Ядренко М. И.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей. I, II.— «Теория вероятностей и математическая статистика», 1976, 14, с. 53—66; 15, с. 82—98. 10. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции, т. 1. М., «Советское радио», 1972. 11. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их применения. М., Физматгиз, 1961.