*M. P. Moklyachuk, M. I. Yadrenko*

ON THE LINEAR STATISTICAL PROBLEMS FOR HOMOGENEOUS WITH RESPECT TO TIME ISOTROPIC RANDOM FIELDS ON SPHERE. I

The linear statistical problems for homogeneous with respect to time isotropic random fields on sphere are considered in this paper. The spectral representation of homogeneous with respect to time isotropic random field on sphere and its correlation function are obtained. The linear estimations of the regression coefficient and unknown mean value for this type of fields are given.

Поступила в редколлегию 6.12 1976.

УДК 519.21

А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ, канд. физ.-мат. наук, Киевский университет

## К ОЦЕНКЕ СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе выводятся рекуррентные уравнения типа Калмана—Бьюси для минимаксной оценки состояний линейной динамической системы, на входе и выходе которой действуют случайные возмущения. В детерминированном случае подобные результаты получены в работе [1].

Пусть вектор $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t) + \xi_1(t), \quad x(t_0) = \xi_0, \tag{1}$$

а $y(t) = H(t)\,x(t) + \xi_2(t)$, где $x^T(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{n}$, $H(t) = (h_{ij}(t))_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}$ — матрицы, элементы которых являются непрерывными функциями. Пусть $M\xi_0 = a_0$, $M\xi_1(t) = a_1(t)$, $M\xi_2(t) = a_2(t)$; $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ — некоррелированные между собой и некоррелированы с $\xi_0$ случайные процессы, непрерывные в среднем квадратическом, причем известно, что вектор $(\xi_0, \xi_1(t), \xi_2(t)) = \tilde{\xi}$ принадлежит множеству $G$, определяемому следующим образом:

$$G = \{\tilde{\xi} : M[\xi_0 - a_0]^T Q_0 [\xi_0 - a_0] \leqslant 1;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} M[\xi_1(t) - a_1(t)]^T Q_1(t) [\xi_1(t) - a_1(t)]\,dt \leqslant 1;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} M[\xi_2(t) - a_2(t)]^T Q_2(t) [\xi_2(t) - a_1(t)]\,dt \leqslant 1\}$$

и $Q_0$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ — симметрические положительно определенные матрицы, имеющие обратные и, элементы которых являются непрерывными функциями.

Предположим, что нам по наблюдению за функцией $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ нужно оценить наилучшим, в некотором смысле, образс вектор состояния $x(t_1)$. Очевидно, что для того чтобы найти оцені компонент вектора $x(t_1)$, достаточно найти для произвольно вектора $a^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ оценку величины $a^T x(t_1)$. Дальш будем предполагать, что допустимые оценки имеют вид

$$a^T\widehat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\, y(t)\, dt + z^T(t_0)\, a_0 +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\, a_1(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\, a_2(t)\, dt, \qquad ($$

где $u(t)$ — непрерывная вектор-функция, а функция $z(t)$ удовле воряет уравнению

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^T(t)\, z(t) - H^T u(t),$$

$$z(t_1) = a. \qquad ($$

Оценку вида (2) будем называть наилучшей, если функці определяется из условия

$$\inf_{u} \sup_{\tilde{\xi} \in G} M\left(a^T x(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1)\right)^2.$$

**Теорема 1.** Оценка (2) для любой непрерывной векто функции $u(t)$ является несмещенной, причем задача нахожденi наилучшей оценки эквивалентна задаче оптимального управлені системой (3) с квадратичным критерием качества вида

$$I(u) = z^T(t_0)\, Q_0^{-1}\, z(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\, Q_1^{-1}(t)\, z(t)\, dt +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\, Q_2^{-1}\, u(t)\, dt.$$

Доказательство. Имеем

$$a^T x(t_1) = z^T(t_1)\, x(t_1) = z^T(t_0)\, x(t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \frac{dz^T(t)}{dt}\, x(t)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\, \frac{dx(t)}{dt}\, dt.$$

Заменив $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ их выражениями из (1) и (3), получим

$$a^T x(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1) = z^T(t_0)\,x(t_0) - z^T(t_0)\,a_0 +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\,[\xi_1(t) - a_1(t)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,[\xi_2(t) - a_2(t)]\,dt.$$

Из этого представления видно, что оценка $a^T\widehat{x}(t_1)$ — несмещенная. Учитывая некоррелированность $\xi_0$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и их принадлежность множеству $G$, можем получить

$$M\,[a^T x(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1)]^2 = M\,[z^T(t_0)\,x(t_0) - z^T(t_0)\,a_0]^2 +$$
$$+ M\left(\int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\,[\xi_1(t) - a_1(t)]\,dt\right)^2 + M\left(\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,[\xi_2(t) -\right.$$
$$\left. - a_2(t)]\,dt\right)^2 \leqslant z^T(t_0)\,Q_0^{-1}z(t_0)\,M(\xi_0 - a_0)^T\,Q_0\,(\xi_0 - a_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\,Q_1^{-1}(t)\,z(t)\,dt \int_{t_0}^{t_1} M\,[\xi_1(t) - a_1(t)]^T\,Q_1(t)\,[\xi_1(t) -$$
$$- a_1(t)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,Q_2^{-1}(t)\,u(t)\,dt \int_{t_0}^{t_1} M\,[\xi_2(t) -$$
$$- a_2(t)]^T\,Q_2(t)\,[\xi_2(t) - a_2(t)]\,dt.$$

Отсюда следует

$$\sup_{\tilde{\xi}\in G} M\,(a^T x(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1))^2 = z^T(t_0)\,Q_0^{-1}\,z(t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\,Q_1^{-1}(t)\,z(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,Q_2^{-1}(t)\,u(t)\,dt.$$

*Замечание 1.* Теорема справедлива и для того случая, когда процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ зависимы и зависят от случайной величины $\xi_0$. Только в этом случае в качестве области $G$ следует взять область $G_1$, которая определяется следующим образом:

$$G_1 = \left\{\tilde{\xi} : M\,(\xi_0 - a_0)^T\,Q_0\,(\xi_0 - a_0) + M\int_{t_0}^{t_1} [\xi_1(t) -\right.$$
$$- a_1(t)]^T\,Q_1(t)\,[\xi_1(t) - a_1(t)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} M\,[\xi_2(t) -$$
$$\left. - a_2(t)]^T\,Q_2(t)\,[\xi_2(t) - a_2(t)]\,dt \leqslant 1\right\}.$$

**Теорема 2.** Наилучшая оценка вектора состояние систе (1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - H\hat{x}(t) - a_2(t)] +$$

$$+ a_1(t); \quad \hat{x}(t_0) = a_0,$$

где $K(t) = P(t) H^T(t) Q_2(t)$, матрица $P(t)$ — решение уравнен Риккати

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t) P(t) + P(t) A^T(t) + Q_1^{-1}(t) - P(t) H^T(t) Q_2(t) H(t) P$$

$$P(t_0) = Q_0^{-1}$$

и матрица $P(t)$ имеет следующий смысл:

$$a^T P(t) a = \inf_u \sup_{\tilde{\xi} \in G} M(a^T x(t) - a^T \hat{x}(t))^2.$$

Доказательство. Для того чтобы найти оценку состоян $x(t_1)$, согласно теореме 1, нужно решить задачу оптимального у равления системой (3) с квадратичным критерием качества. Согл но (2), оптимальный закон управления имеет вид $u(t) = -K^T z$ где $K(t) = P(t) H^T(t) Q_2(t)$, а матрица $P(t)$ удовлетворяет урав нию (4).

Пусть $\Phi(t, t_1)$ — решение дифференциального уравнения $\frac{d\Phi}{dt} = (A - KH)\Phi$, $\Phi(t_1, t_0) = I$. Тогда

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) K(t) y(t)\, dt + \Phi(t_1, t_0) a_0 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) a_1(t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t) K(t) a_2(t)\, dt.$$

Найдем производную от этого выражения по $t_1$

$$\frac{d\hat{x}(t_1)}{dt_1} = K(t_1) y(t_1) + a_1(t_1) - K(t_1) a_2(t_1) +$$

$$+ [A(t_1) - K(t_1) H(t_1)] \hat{x}(t_1) = A(t_1) \hat{x}(t_1) + a_1(t_1) +$$

$$+ K(t_1)[y(t_1) - H(t_1) \hat{x}(t_1) - a_2(t_1)],$$

а так как $\min_u I(u) = a^T P(t) a$, то этим заканчивается доказате. ство теоремы.

*Замечание* 2. Пусть вектор $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \xi_1(t),$$

$$x(t_0) = \xi_0,$$

$$y(t) = H(t)x(t) + C(t)v(t) + \xi_2(t),$$

где $B(t)$, $C(t)$ — матрицы, элементы которых являются непрерывными функциями; $u(t)$, $v(t)$ — непрерывные вектор-функции и $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi_1(t), \xi_2(t)) \in G$.

Тогда оценка вида

$$a^T\widehat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)\,dt + z^T(t_0)d_0 + \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)[a_1(t) - B(t)u(t)]\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)[a_2(t) + C(t)v(t)]\,dt,$$

где $z(t)$ удовлетворяет уравнению (3), будет несмещенной, и дифференциальное уравнение для $\widehat{x}(t)$ будет иметь вид

$$\frac{d\widehat{x}(t)}{dt} = A(t)\widehat{x}(t) + B(t)u(t) + a_1(t) + K(t)[y(t) - H(t)\widehat{x}(t) - C(t)v(t) - a_2(t)],$$

$$\widehat{x}(t_0) = a_0,$$

а матрица $K(t)$ будет иметь такой же смысл, как и в теореме 2.

Рассмотрим случай, когда информация о начальном состоянии уравнения (1) отсутствует. Прежде всего заметим, что если $\xi_1(t) = \xi_2(t) = 0$ и существует по крайней мере одно управление, переводящее систему (3) из состояния $z(t_1) = a$ в состояние $z(t_0) = 0$, то состояние $x(t_1)$ по наблюдениям $y(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ оценивается без ошибки.

Пусть $U$ — множество управлений $u(t)$, переводящих систему (3) из состояния $z(t_1) = 0$ в состояние $z(t_0) = 0$. Оценку $a^T x(t_1)$ будем искать в виде

$$a^T\widehat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)y(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} z^T(t)a_1(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)a_2(t)\,dt.$$

Функция $u(t)$ определяется из условия $\inf\limits_{u \in U} \sup\limits_{\tilde{\xi} \in G} M(a^Tx(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1))^2$. Так же, как и в теореме 1, эту задачу можно свести к задаче оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием качества и получить уравнение, аналогичное урав нениям теоремы 2, подобно тому, как это сделано в работе [1].

Предположим, что вектор $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dx(t) = (A(t)\,x(t) + \xi_1(t))\,dt + B(t)\,dw(t),$$
$$x(t_0) = \xi_0,$$
$$y(t) = H(t)\,x(t) + \xi_2(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — непрерывные в смысле среднеквадратическог( случайные процессы, некоррелированные между собой и с $\xi_0$ причем известно, что $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi_1(t), \xi_2(t)) \in G$.

Для простоты предположим, что $A(t)$, $B(t)$, $H(t)$ — матрицы элементы которых являются непрерывными функциями. Пуст относительно $B(t)$ мы располагаем лишь той информацией, чт( $(B(t)\,B^T(t)\,x, x) \leqslant (C(t), x, x)$ для любого вектора $x$. Множеств( матриц $B(t)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим чере: $G_1$; $W(t)$ — винеровский в широком смысле [3] случайный процесс некоррелированный с $\xi_0$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $C(t) = C_1(t)\,C_1^T(t)$, гд( $C(t)$ — неотрицательно определенная непрерывная матрица, ; размерность $C_1(t)$ совпадает с размерностью $B(t)$. Оценку выра жения $a^T x(t)$ будем искать в виде

$$a^T\widehat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,y(t)\,dt + z^T(t_0)\,a_0 +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} z^T(t)\,a_1(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} u^T(t)\,a_2(t)\,dt,$$

где вектор $z(t)$ удовлетворяет уравнению (3), а $u(t)$ — непрерыв ная вектор-функция, которая находится из условия

$$\inf_{u}\ \sup_{\tilde{\xi}\in G,\ B\in G_1} M(a^T x(t_1) - a^T\widehat{x}(t_1))^2.$$

Можно показать, что эта оценка несмещенная, и выписать диф ференциальное уравнение для оптимальной оценки.

**Список литературы:** 1. *Кириченко Н. Ф., Наконечный А. Г.* Минимаксны подход к рекуррентному оцениванию состояний линейных динамических систем. – «Кибернетика», 1977, №4. 2. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управ ления. М., «Мир», 1973. 3. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайны процессов. М., «Наука», 1974.

*A. G. Nakonechny*

ON THE ESTIMATION OF STATES FOR LINEAR STOCHASTIC SYSTEMS

For minimax estimation of states the recurrent equations of Kalman-Bucy typ are obtained.

Поступила в редколлегию 12.05 1976.